

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

ESTÁTICA

DÉCIMA EDICIÓN

R. C. Hibbeler

TRADUCCIÓN

José de la Cera Alonso

*Profesor titular, Universidad Autónoma Metropolitana
Plantel Azcapotzalco*

REVISIÓN TÉCNICA

Felipe de Jesús Hidalgo Cavazos, MC.C.

*Departamento de Ingeniería Mecánica
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Monterrey*



México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

HIBBELER, R. C.
Mecánica vectorial para ingenieros. Estática.
Décima edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2004

ISBN: 970-26-0501-6

Área: Universitarios

Formato: 20 x 25.5 cm

Páginas: 656

Authorized translation from the English language edition, entitled *Engineering Mechanics Statics, Tenth Edition*, by R. C. Hibbeler, published by Pearson Education, Inc., publishing as PRENTICE HALL, INC., Copyright ©2004. All rights reserved.

ISBN 0-13-141167-5

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, titulada *Intermediate Engineering Mechanics Statics, Tenth Edition*, por R. C. Hibbeler, publicada por Pearson Education, Inc., publicada como PRENTICE-HALL INC., Copyright ©2004. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español

Editor: Guillermo Trujano Mendoza

e-mail: guillermo.trujano@pearsoned.com

Supervisora de desarrollo: Diana Karen Montaña González

Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño

Edición en inglés

Vice President and Editorial Director, ECS: *Marcia Horton*
Vice President and Director of Production and Manufacturing,
ESM: *David W. Riccardi*

Associate Editor: *Dee Bernhard*

Editorial Assistant: *Brian Hoehl*

Executive Managing Editor: *Vince O'Brien*

Managing Editor: *David A. George*

Production Editor: *Rose Kernan*

Director of Creative Services: *Paul Belfanti*

Manager of Electronic Composition & Digital Content: *Jim Sullivan*

Assistant Manager of Electronic Composition & Digital Content:
Allyson Graesser

Creative Director: *Carole Anson*

Art Director: *Jonathan Boylan*

Electronic Composition: *Clara Bartunek, Beth Gschwind, Julita Nazario, and Judith R. Wilkens*

Art Editor: *Xiaohong Zhu*

Manufacturing Manager: *Trudy Piscioti*

Manufacturing Buyer: *Lisa McDowell*

Senior Marketing Manager: *Holly Stark*

DÉCIMA EDICIÓN, 2004

D.R. © 2004 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Atlacomulco 500-5to. piso

Industrial Atoto

53519 Naucalpan de Juárez, Edo. de México

E-mail: editorial.universidades@pearsoned.com

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031

Prentice Hall es una marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.



ISBN 970-26-0501-6

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 07 06 05 04

El propósito principal de este libro es proporcionar al estudiante una presentación clara y completa de la teoría y las aplicaciones de la ingeniería mecánica. Para lograr este objetivo, el autor no ha trabajado solo; en gran medida, a lo largo de sus 10 ediciones, el libro ha tomado forma gracias a los comentarios y sugerencias de más de un centenar de revisores de la profesión docente y de muchos alumnos del autor.

Nuevas características

Algunos aspectos únicos contenidos en esta décima edición incluyen lo siguiente:

- **Ilustraciones.** A lo largo del libro han sido agregadas nuevas ilustraciones con base en fotografías para establecer una fuerte conexión con la naturaleza tridimensional de la ingeniería. Además, se ha puesto particular atención en proporcionar una vista de cualquier objeto físico con sus dimensiones y los vectores aplicados a él, de manera que su naturaleza pueda ser comprendida fácilmente.
- **Problemas.** Los conjuntos de problemas han sido revisados de tal forma que los instructores pueden seleccionar problemas tanto de diseño como de análisis con un amplio rango de dificultad. Además del autor, otros dos profesionales han revisado todos los problemas para mayor claridad y exactitud de las soluciones. Al final de algunos capítulos se han incluido proyectos de diseño.
- **Material de repaso.** Para ayudar a los alumnos a estudiar y recordar puntos clave de cada capítulo, han sido agregadas nuevas secciones de repaso al final de cada uno de ellos.

Por supuesto, algunos aspectos del libro permanecen iguales: donde se ha considerado conveniente se pone un especial énfasis en el trazado de diagramas de cuerpo libre o en la importancia de seleccionar el sistema coordenado correcto, y cuando son aplicadas las ecuaciones propias de la mecánica, la convención asociada de signos para componentes de vectores es aplicada puntualmente.

Contenido

El libro está dividido en 11 capítulos, en los cuales los principios son aplicados primero a situaciones simples y luego a situaciones más complicadas. Con frecuencia, cada principio es aplicado primero a una partícula, luego a un cuerpo rígido sometido a un sistema coplanar de fuerzas y finalmente, a un caso general de sistemas tridimensionales de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido.

El capítulo 1 empieza con una introducción a la mecánica y un análisis de unidades de medición. La notación de un vector y las propiedades de un sistema concurrente de fuerzas son presentadas en el capítulo 2. Esta teoría es aplicada entonces al equilibrio de una partícula en el capítulo 3. El capítulo 4 contiene un análisis general de sistemas de fuerzas concentradas y distribuidas, así como los métodos usados para simplificarlos. Los principios del equilibrio de un cuerpo rígido son desarrollados en el capítulo 5 y luego aplicados a problemas específicos que implican el equilibrio de armaduras, bastidores y máquinas en el capítulo 6, y después, al análisis de fuerzas internas en vigas y cables en el capítulo 7. Las aplicaciones a problemas que implican fuerzas de fricción son presentadas en el capítulo 8, y los temas relativos al centro de gravedad y al centroide se tratan en el capítulo 9. Si el tiempo lo permite, pueden tratarse secciones con temas más avanzados, las cuales se señalan mediante asteriscos (*). La mayoría de esos temas están incluidos en el capítulo 10 (momentos de inercia para área y masa) y en el capítulo 11 (trabajo virtual y energía potencial). Advertida que este material también proporciona una referencia apropiada para los principios básicos cuando éstos se tratan en cursos más avanzados.

Cobertura alternativa. A discreción del instructor, parte del material puede presentarse en una secuencia diferente sin pérdida de continuidad. Por ejemplo, es posible introducir el concepto de una fuerza y todos los métodos necesarios del análisis vectorial cubriendo primero el capítulo 2 y la sección 4.2. Luego, después de cubrir el resto del capítulo 4 (sistemas de fuerza y momento), pueden analizarse los métodos de equilibrio de los capítulos 3 y 5.

Características especiales

Organización y enfoque. Los contenidos de cada capítulo están organizados en secciones bien definidas que contienen una explicación de temas específicos, ilustrativos problemas de ejemplo, y un conjunto de problemas de tarea. Los temas de cada sección están situados en subgrupos definidos por títulos en negritas. El propósito de esto es presentar un método estructurado para introducir cada nueva definición o concepto y hacer el texto conveniente para posteriores referencias y repaso.

Contenidos de los capítulos. Cada capítulo comienza con una ilustración que muestra un amplio rango de aplicaciones del material presentado. Se proporciona una lista del contenido del capítulo para dar una visión general del material a tratar.

Diagramas de cuerpo libre. El primer paso al resolver problemas de mecánica consiste en trazar un diagrama. Al hacerlo así, el estudiante adquiere el hábito de tabular los datos necesarios y enfocar su atención en los aspectos físicos del problema y de su geometría asociada. Si este paso se efectúa de manera correcta, la aplicación de las ecuaciones pertinentes de la mecánica resulta casi automática, ya que los datos pueden ser tomados directamente del diagrama. Esta etapa es particularmente importante al resolver problemas de equilibrio, y por esta razón el trazo de los diagramas de cuerpo libre es muy enfatizado en todo el libro. En particular, secciones y ejemplos especiales están dedicados a mostrar cómo trazar diagramas de cuerpo libre y, para desarrollar esta práctica, han sido agregados problemas específicos de tarea en muchas secciones del libro.

Procedimientos de análisis. Estos procedimientos se encuentran al final de numerosas secciones y proporcionan al estudiante un repaso o resumen del material y un método lógico y ordenado para aplicar la teoría. Los problemas de ejemplo se resuelven usando los lineamientos de este método para dejar clara su aplicación numérica. Sin embargo, debe entenderse que una vez dominados los principios pertinentes, y adquiridos suficientes criterio y confianza, el estudiante podrá desarrollar sus propios métodos para resolver los problemas.

Fotografías. Para explicar cómo los principios de la mecánica se aplican a situaciones del mundo real, en el presente libro son usadas muchas fotografías. En algunas secciones, las fotografías se emplean para mostrar cómo los ingenieros deben elaborar primero un modelo idealizado para efectuar el análisis y luego proceder a trazar un diagrama de cuerpo libre de este modelo para aplicar la teoría.

Puntos importantes. Esta característica proporciona un repaso o resumen de los conceptos más importantes presentados en una sección y enfatiza los puntos de relevancia que deben observarse cuando se aplica la teoría para resolver problemas.

Comprensión conceptual. Por medio del uso de fotografías, la teoría es aplicada de manera sencilla para ilustrar algunos de los aspectos más importantes y transmitir el significado físico de muchos de los términos empleados en las ecuaciones. Estas aplicaciones simplificadas aumentan el interés en el tema y preparan mejor al estudiante para la comprensión de los ejemplos y la resolución de los problemas.

Problemas de ejemplo. Todos los problemas de ejemplo se presentan de manera concisa y en un estilo fácil de entender.

Problemas de tarea

- **Problemas de diagrama de cuerpo libre.** Muchas secciones del libro contienen problemas introductorios que sólo requieren trazar el diagrama de cuerpo libre para los problemas específicos dentro de un grupo de problemas. Estos trabajos mostrarán al estudiante la importancia de dominar esta habilidad como un requisito para lograr una solución completa de cualquier problema de equilibrio.
- **Análisis general y problemas de diseño.** La mayoría de los problemas presentados en el libro muestran situaciones reales encontradas en la práctica de la ingeniería. Algunos provienen de productos reales usados en la industria y son formulados tal cual. Esperamos que este realismo estimule el interés del estudiante en la ingeniería mecánica y le proporcione un medio con el cual desarrollar la habilidad para reducir cualquier problema desde su descripción física hasta un modelo o representación simbólica al que puedan aplicarse los principios de la mecánica.

En todo el libro hay un balance aproximado de problemas que usan ya sea el sistema de unidades FPS o el SI. Todos los conjuntos de problemas se han intentado arreglar en orden de dificultad creciente. (Los problemas de repaso que aparecen al final de cada capítulo están presentados en orden aleatorio). Excepto para cada cuarto problema, las respuestas a todos los demás están dadas al final del libro. Para alertar al usuario con respecto a un problema sin respuesta incluida, se ha colocado un asterisco (*) antes del número del problema.

- **Problemas con computadora.** Se ha hecho un esfuerzo por incluir algunos problemas que pueden ser resueltos usando un procedimiento numérico ejecutable en una computadora personal o en una calculadora programable de bolsillo. El Apéndice B presenta técnicas numéricas apropiadas junto con sus programas de computadora asociados. Lo que se intenta con ello es ampliar la capacidad del estudiante para usar otras formas de análisis sin sacrificar el tiempo requerido para concentrarse en la aplicación de los principios de la mecánica. Los problemas de este tipo que se pueden o se deben resolver mediante los métodos numéricos se identifican en el texto con el símbolo “cuadrado” (■), contiguo al número del problema.
- **Proyectos de diseño.** Al final de algunos de los capítulos se han incluido proyectos de diseño. Consideramos que este tipo de tarea debe ser encomendada sólo después de que el estudiante ha desarrollado una comprensión básica del tema visto. Estos proyectos se enfocan en la resolución de un problema especificando la geometría de una estructura u objeto mecánico necesarios para un fin particular. Se requiere presentar un análisis de fuerzas y, en muchos casos, que se consideren aspectos de seguridad y costos.

Repasos de capítulo. Nuevas secciones de repaso de capítulo resumen puntos claves del mismo, a menudo en listas caracterizadas por puntos secuenciales.

Apéndices. Los apéndices proporcionan las fórmulas matemáticas y los análisis numéricos necesarios para resolver los problemas del libro. El Apéndice C presenta un conjunto de problemas que son característicos de los encontrados en el examen estadounidense denominado Fundamentals of Engineering. Al proporcionar una solución parcial de todos los problemas, se le da al estudiante la oportunidad de practicar adicionalmente sus habilidades.

Agradecimientos

El autor ha intentado escribir este libro de modo que suscite el interés del instructor y del estudiante. Un gran número de personas ha contribuido a desarrollarlo a lo largo de muchos años, y deseo expresarles mi agradecimiento por sus comentarios y sugerencias que mucho he apreciado. Específicamente, quiero dar las gracias a las siguientes personas por su contribución a la serie *Estática y Dinámica*:

Paul Heyliger, *Colorado State University*
 Kenneth Sawyers, *Lehigh University*
 John Oyler, *University of Pittsburgh*
 Glenn Beltz, *University of California*
 Johannes Gessler, *Colorado State University*
 Wilfred Nixon, *University of Iowa*
 Jonathan Russell, *U.S. Coast Guard Academy*
 Robert Hinks, *Arizona State University*
 Cap. Mark Orwat, *U.S. Military Academy, West Point*
 Cetin Cetinyaka, *Clarkson University*
 Jack Xin, *Kansas State University*
 Pierre Julien, *Colorado State University*
 Stephen Bechtel, *Ohio State University*
 W. A. Curtain, *Brown University*
 Robert Oakberg, *Montana State University*
 Richard Bennett, *University of Tennessee*

Agradezco en particular a los profesores Will Liddell, Jr. y Henry Kuhlman por su ayuda. Extiendo una nota especial de gracias a los revisores técnicos, Scott Hendricks de VPI y Karim Nohra de la University of South Florida, quienes diligentemente revisaron todo el texto y los problemas. Deseo reconocer también la ayuda de mi esposa, Conny (Cornelie), en la lectura de pruebas durante el tiempo que ha tomado preparar este manuscrito para su publicación.

Finalmente, doy las gracias a todos mis estudiantes y a los miembros de la profesión docente que han invertido parte de su tiempo en enviarme sus sugerencias y comentarios. Dado que la lista sería muy larga como para mencionarla con todo detalle, espero que ellos acepten este reconocimiento.

En cualquier momento, apreciaré conocer los comentarios, sugerencias o problemas de los lectores relacionados con esta edición.

Russell Charles Hibbeler
hibbeler@bellsouth.net

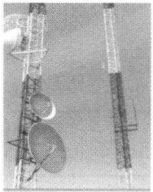
C O N T E N I D O



1

Principios generales 3

- Objetivos del capítulo 3
- 1.1 Mecánica 3
- 1.2 Conceptos fundamentales 4
- 1.3 Unidades de medición 6
- 1.4 El sistema internacional de unidades 8
- 1.5 Cálculos numéricos 10
- 1.6 Procedimiento general para el análisis 14



2

Vectores fuerza 17

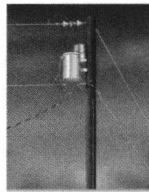
- Objetivos del capítulo 17
- 2.1 Escalares y vectores 17
- 2.2 Operaciones vectoriales 18
- 2.3 Suma vectorial de fuerzas 20
- 2.4 Suma de un sistema de fuerzas coplanares 31
- 2.5 Vectores cartesianos 42
- 2.6 Suma y resta de vectores cartesianos 46
- 2.7 Vectores de posición 55
- 2.8 Vector fuerza dirigido a lo largo de una línea 58
- 2.9 Producto punto 68



3

Equilibrio de una partícula 81

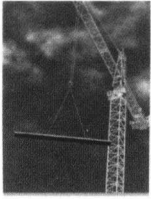
- Objetivos del capítulo 81
- 3.1 Condiciones para el equilibrio de una partícula 81
- 3.2 El diagrama de cuerpo libre 82
- 3.3 Sistemas de fuerzas coplanares 85
- 3.4 Sistemas tridimensionales de fuerzas 98



4

Resultantes de sistemas de fuerzas 113

- Objetivos del capítulo 113
- 4.1 Momento de una fuerza —formulación escalar 113
- 4.2 Producto cruz 118
- 4.3 Momento de una fuerza —formulación vectorial 121
- 4.4 Principio de momentos 126
- 4.5 Momento de una fuerza con respecto a un eje específico 138
- 4.6 Momento de un par 148
- 4.7 Sistema equivalente 160
- 4.8 Resultantes de un sistema de una fuerza y un par 162
- 4.9 Reducción adicional de un sistema de una fuerza y un par 166
- 4.10 Reducción de una carga simple distribuida 180



5

Equilibrio de un cuerpo rígido
193

- Objetivos del capítulo 193
- 5.1 Condiciones para el equilibrio de un cuerpo rígido 193
- Equilibrio en dos dimensiones 195
- 5.2 Diagramas de cuerpo libre 195
- 5.3 Ecuaciones de equilibrio 209
- 5.4 Miembros de dos y tres fuerzas 218
- Equilibrio en tres dimensiones 231
- 5.5 Diagramas de cuerpo libre 231
- 5.6 Ecuaciones de equilibrio 237
- 5.7 Restricciones para un cuerpo rígido 238



7

Fuerzas internas 325

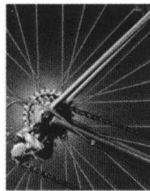
- Objetivos del capítulo 325
- 7.1 Fuerzas internas desarrolladas en miembros estructurales 325
- ★7.2 Ecuaciones y diagramas de fuerza cortante y de momento 342
- ★7.3 Relaciones entre carga distribuida, fuerza cortante y momento 350
- ★7.4 Cables 360



6

Análisis estructural 257

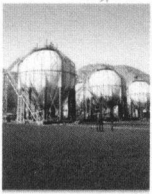
- Objetivos del capítulo 257
- 6.1 Armaduras simples 257
- 6.2 El método de los nudos 260
- 6.3 Miembros de fuerza cero 266
- 6.4 El método de las secciones 273
- ★6.5 Armaduras espaciales 283
- 6.6 Bastidores y máquinas 287



8

Fricción 379

- Objetivos del capítulo 379
- 8.1 Características de la fricción seca 379
- 8.2 Problemas que implican fricción seca 383
- 8.3 Cuñas 404
- ★8.4 Fuerzas de fricción en tornillos 406
- ★8.5 Fuerzas de fricción sobre bandas planas 414
- ★8.6 Fuerzas de fricción en chumaceras de collar, chumaceras de pivote y discos 421
- ★8.7 Fuerzas de fricción en chumaceras lisas 424
- ★8.8 Resistencia al rodamiento 426



9

Centro de gravedad y centroide 437

- Objetivos del capítulo 437
- 9.1 Centro de gravedad y centro de masa para un sistema de partículas 437
- 9.2 Centro de gravedad, centro de masa, y centroide para un cuerpo 439
- 9.3 Cuerpos compuestos 461
- ★9.4 Teoremas de Pappus y Guldinus 475
- ★9.5 Resultante de una carga general distribuida 483
- ★9.6 Presión de un fluido 484



11

Trabajo virtual 551

- Objetivos del capítulo 551
- 11.1 Definición de trabajo y trabajo virtual 551
- 11.2 Principio del trabajo virtual para una partícula y un cuerpo rígido 554
- 11.3 Principio del trabajo virtual para un sistema de cuerpos rígidos conectados 555
- ★11.4 Fuerzas conservadoras 568
- ★11.5 Energía potencial 569
- ★11.6 Criterio de la energía potencial para el equilibrio 570
- ★11.7 Estabilidad del equilibrio 572



10

Momentos de inercia 499

- Objetivos del capítulo 499
- 10.1 Definición de momentos de inercia para áreas 499
- 10.2 Teorema de los ejes paralelos para un área 501
- 10.3 Radio de giro de un área 501
- 10.4 Momentos de inercia para un área por integración 502
- 10.5 Momentos de inercia para áreas compuestas 510
- ★10.6 Producto de inercia para un área 518
- ★10.7 Momentos de inercia para un área con respecto a ejes inclinados 522
- ★10.8 Círculo de Mohr para momentos de inercia 525
- 10.9 Momentos de inercia de masa 535

Apéndices

- A. Expresiones matemáticas 584
- B. Análisis numérico y por computadora 586
- C. Repaso para un examen de los fundamentos de ingeniería 592

Respuestas a problemas seleccionados 611

Índice 627

Principios generales

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Proporcionar una introducción a las cantidades básicas e idealizaciones de la mecánica.
- Presentar las leyes del movimiento y de la gravitación de Newton.
- Repasar los principios para la aplicación del sistema SI de unidades.
- Examinar los procedimientos estándar para efectuar cálculos numéricos.
- Presentar una guía general para la resolución de problemas.

1.1 Mecánica

La *mecánica* puede ser definida como la rama de la física que trata acerca del estado de reposo o movimiento de cuerpos que están sometidos a la acción de fuerzas. En general, este tema se subdivide en tres ramas: *mecánica del cuerpo rígido*, *mecánica del cuerpo deformable* y *mecánica de fluidos*. Este libro trata sólo la mecánica del cuerpo rígido ya que ésta constituye una base adecuada para el diseño y análisis de muchos tipos de dispositivos estructurales, mecánicos o eléctricos, que se encuentran en la ingeniería. Además, la mecánica del cuerpo rígido proporciona parte de la base necesaria para el estudio de la mecánica de los cuerpos deformables y la mecánica de fluidos.

La mecánica del cuerpo rígido se divide en dos áreas: estática y dinámica. La *estática* trata con el equilibrio de los cuerpos, esto es, aquellos que están en reposo o se mueven con velocidad constante; mientras que la *dinámica* trata con el movimiento acelerado de los cuerpos. Aunque la estática puede ser considerada como un caso especial de la dinámica, en el sentido de que la aceleración es cero, merece un tratamiento especial en la enseñanza de la ingeniería ya que muchos objetos son diseñados con la intención de que permanezcan en equilibrio.

Desarrollo histórico. El tema de la estática se desarrolló muy temprano en la historia porque los principios que implica pudieron ser formulados simplemente a partir de mediciones de geometría y fuerza. Por ejemplo, los escritos de Arquímedes (287-212 a. de C.) tratan con el principio de la palanca. Estudios de la polea, el plano inclinado y la llave, también están registrados en escritos antiguos, en épocas en que los requisitos de la ingeniería se limitaban principalmente a la construcción de edificios.

Como los principios de la dinámica dependen de una medición precisa del tiempo, este tema se desarrolló mucho después. Galileo Galilei (1564-1642) fue uno de los primeros y principales contribuyentes a este campo. Su trabajo consistió en experimentos con péndulos y en analizar la caída de cuerpos. Sin embargo, la más importante contribución en dinámica fue hecha por Isaac Newton (1642-1727), quien es famoso por su formulación de las tres leyes fundamentales del movimiento y la ley de la atracción gravitatoria universal. Poco después de que esas leyes fueron postuladas, Euler, D'Alembert, Lagrange y otros, desarrollaron importantes técnicas para su aplicación.

1.2 Conceptos fundamentales

Antes de comenzar nuestro estudio de la mecánica, es importante entender el significado de ciertos conceptos y principios fundamentales.

Cantidades básicas. Las siguientes cuatro cantidades se usan en toda la mecánica.

Longitud. La *longitud* es necesaria para localizar la posición de un punto en el espacio y así describir el tamaño de un sistema físico. Una vez definida una unidad estándar de longitud, podemos establecer cuantitativamente distancias y propiedades geométricas de un cuerpo como múltiplos de la longitud unitaria.

Tiempo. El *tiempo* es concebido como una sucesión de eventos. Aunque los principios de la estática son independientes del tiempo, esta cantidad juega un papel importante en el estudio de la dinámica.

Masa. La *masa* es una propiedad de la materia por medio de la cual es posible comparar la acción de un cuerpo con la de otro. Esta propiedad se manifiesta como una atracción gravitatoria entre dos cuerpos y proporciona una medida cuantitativa de la resistencia de la materia a cambios de velocidad.

Fuerza. En general, la *fuerza* es considerada como un “empuje” o un “jalón” ejercido por un cuerpo sobre otro. Esta interacción puede ocurrir cuando existe contacto directo entre los cuerpos, como cuando una persona empuja una pared, o a través de una distancia cuando los cuerpos están físicamente separados. Ejemplos del último tipo incluyen las fuerzas gravitatorias, eléctricas y magnéticas. En todo caso, una fuerza se caracteriza completamente por medio de su magnitud, su dirección y su punto de aplicación.

Idealizaciones. Los modelos o idealizaciones, se usan en mecánica para simplificar la aplicación de la teoría. Definiremos ahora unas cuantas de las más importantes idealizaciones. Otras que son también importantes serán explicadas en donde sea necesario.

Partícula. Una *partícula* tiene masa, pero un tamaño que puede ser ignorado. Por ejemplo, el tamaño de la Tierra es insignificante comparado con el tamaño de su órbita, y por tanto, la Tierra puede ser modelada como una partícula al estudiar su movimiento orbital. Cuando un cuerpo es idealizado como una partícula, los principios de la mecánica se reducen a una forma un tanto simplificada ya que la geometría del cuerpo no estará implicada en el análisis del problema.

Cuerpo rígido. Un *cuerpo rígido* puede ser considerado como una combinación de un gran número de partículas en la que todas las partículas permanecen a una distancia fija unas de otras antes y después de aplicar una carga. Como resultado, las propiedades del material de cualquier cuerpo que se suponga rígido no tendrán que considerarse al analizar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. En la mayoría de los casos, las deformaciones reales que ocurren en máquinas, mecanismos y estructuras similares son relativamente pequeñas, y la hipótesis de cuerpo rígido es la adecuada para el análisis.

Fuerza concentrada. Una *fuerza concentrada* representa el efecto de una carga que se supone está actuando en un punto sobre un cuerpo. Podemos representar una carga por medio de una fuerza concentrada, siempre que el área sobre la cual la carga es aplicada, sea muy pequeña en comparación con el tamaño total del cuerpo. Un ejemplo sería la fuerza de contacto entre una rueda y el terreno.

Las tres leyes del movimiento de Newton. Todo el tema de la mecánica del cuerpo rígido está formulado con base en las tres leyes del movimiento de Newton, cuya validez se basa en la observación experimental. Estas leyes se aplican al movimiento de una partícula medido desde un marco de referencia no acelerado. Con relación a la figura 1-1, las leyes del movimiento de Newton pueden ser enunciadas brevemente como sigue.

Primera ley. Una partícula originalmente en reposo, o que se mueve en línea recta con velocidad constante, permanecerá en este estado siempre que *no* esté sometida a una fuerza que no está balanceada.

Segunda ley. Una partícula sobre la que actúa una *fuerza desbalanceada* F experimenta una aceleración a que tiene el mismo sentido que la fuerza y una magnitud que es directamente proporcional a la fuerza.* Si F es aplicada a una partícula de masa m , esta ley puede expresarse matemáticamente como

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1-1)$$

Tercera ley. Las fuerzas mutuas de acción y reacción entre dos partículas son iguales, opuestas y colineales.

*Dicho de otra manera, la fuerza desbalanceada que actúa sobre la partícula es proporcional a la razón de cambio con respecto al tiempo del momento lineal de la partícula.

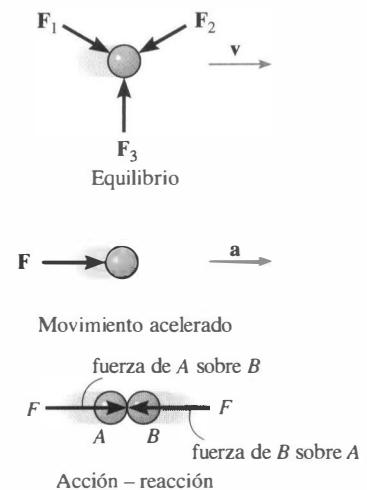


Fig. 1-1

Ley de la atracción gravitatoria de Newton. Poco después de formular sus tres leyes del movimiento, Newton postuló una ley que gobierna la atracción gravitatoria entre dos partículas cualesquiera. Enunciada matemáticamente resulta en,

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1-2)$$

donde F = fuerza de gravitación entre las dos partículas
 G = constante universal de gravitación; de acuerdo con la evidencia experimental, $G = 66.73(10^{-12}) \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
 m_1, m_2 = masa de cada partícula
 r = distancia entre las dos partículas

Peso. De acuerdo con la ecuación 1-2, dos partículas o cuerpos cualesquiera tienen una fuerza (gravitatoria) de atracción mutua que actúa entre ellas. Sin embargo, en el caso de una partícula localizada en o cerca de la superficie de la Tierra, la única fuerza gravitatoria de cierta magnitud es aquella que está entre la Tierra y la partícula. Por ello, esta fuerza, llamada *peso*, será la única fuerza gravitatoria que consideraremos en nuestro estudio de la mecánica.

A partir de la ecuación 1-2, podemos desarrollar una expresión aproximada para encontrar el peso W de una partícula con masa $m_1 = m$. Si suponemos que la Tierra es una esfera sin rotación de densidad constante y con una masa $m_2 = M_e$, entonces, si r es la distancia entre el centro de la Tierra y la partícula, tenemos

$$W = G \frac{m M_e}{r^2}$$

Haciendo $g = GM_e/r^2$ resulta

$$W = mg \quad (1-3)$$

Por comparación con $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, denominamos g a la aceleración debida a la gravedad. Como la aceleración depende de r , puede verse que el peso de un cuerpo *no* es una cantidad absoluta, sino que su magnitud se determina desde donde es hecha la medición. Sin embargo, para la mayoría de los cálculos de ingeniería, g se determina al nivel del mar y a una latitud de 45° , lo cual se considera la “ubicación estándar”.

1.3 Unidades de medición

Las cuatro cantidades básicas —fuerza, masa, longitud y tiempo— no son todas independientes una de otra; de hecho, están *relacionadas* por la segunda ley del movimiento de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Debido a esto, no *todas* las *unidades* usadas para medir esas cantidades pueden seleccionarse arbitrariamente. La igualdad $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ se mantiene sólo si tres de las cuatro unidades, llamadas *unidades básicas*, son *definidas arbitrariamente* y la cuarta unidad se *deriva* entonces a partir de la ecuación.

Unidades SI. El Sistema Internacional de unidades, abreviado SI a partir del término francés “Système International d’Unités”, es una versión moderna del sistema métrico que ha recibido reconocimiento mundial. Como se muestra en la tabla 1-1, el SI especifica la longitud en metros (m), el tiempo en segundos (s) y la masa en kilogramos (kg). La unidad de fuerza, llamada newton (N), se *deriva* de $F = ma$. Así, 1 newton es igual a una fuerza requerida para dar a 1 kilogramo de masa una aceleración de 1 m/s^2 ($N = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$).

Si el peso de un cuerpo situado en la “ubicación estándar” va a ser determinado en newtons, entonces debe aplicarse la ecuación 1-3. Aquí $g = 9.806 \text{ 65 m/s}^2$; sin embargo, para los cálculos se usará el valor $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Entonces,

$$W = mg \quad (g = 9.81 \text{ m/s}^2) \quad (1-4)$$

Por tanto, un cuerpo de masa de 1 kg tiene un peso de 9.81 N, un cuerpo de 2 kg pesa 19.62 N, y así sucesivamente, figura 1-2a.

Unidades comunes en Estados Unidos. En el sistema de unidades empleado comúnmente en Estados Unidos (FPS), la longitud se mide en pies (ft), la fuerza en libras (lb) y el tiempo en segundos (s), tabla 1-1. La unidad de masa, llamada *slug*, es *derivada* de $F = ma$. Por tanto, 1 slug es igual a la cantidad de materia que es acelerada a 1 pie/s^2 cuando actúa sobre ella una fuerza de 1 lb ($\text{slug} = \text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{pies}$).

Para determinar la masa de un cuerpo que tenga un peso medido en libras, debemos aplicar la ecuación 1-3. Si las mediciones son hechas en la “ubicación estándar”, entonces $g = 32.2 \text{ pies/s}^2$ será usada para los cálculos. Por tanto,

$$m \nabla \frac{W}{g} \quad (g \nabla 32.2 \text{ pies/s}^2) \quad (1-5)$$

Así, un cuerpo que pese 32.2 lb tiene una masa de 1 slug, un cuerpo de 64.4 lb tiene una masa de 2 slugs, y así sucesivamente, figura 1-2b.

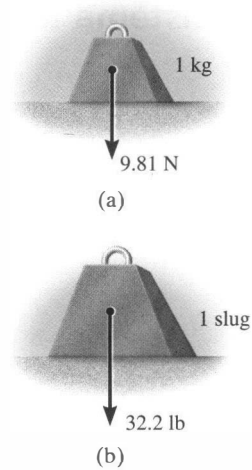


Fig. 1-2

TABLA 1-1 • Sistema de unidades

Nombre	Longitud	Tiempo	Masa	Fuerza
Sistema Internacional de unidades (SI)	metro (m)	segundo (s)	kilogramo (kg)	newton* (N) $\left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}\right)$
Sistema de unidades comunes en Estados Unidos (FPS)	pie (ft)	segundo (s)	slug* $\left(\frac{\text{lb} \cdot \text{s}^2}{\text{ft}}\right)$	libra (lb)

*Unidad derivada.

Conversión de unidades. La tabla 1–2 proporciona un conjunto de factores de conversión directa entre unidades FPS y SI para las cantidades básicas. Recuérdese, además, que en el sistema FPS 1 pie = 12 pulg (pulgadas), 5280 pies = 1 mi (milla), 1000 lb = 1 kip (kilo–pound), y 2000 lb = 1 ton (tonelada).

TABLA 1–2 • Factores de conversión

Cantidad	Unidad de medición (FPS)	Igual a	Unidad de medición (SI)
Fuerza	lb		4.448 2 N
Masa	slug		14.593 8 kg
Longitud	ft		0.304 8 m

1.4 El sistema internacional de unidades

El SI de unidades se usa ampliamente en este libro ya que se pretende que llegue a ser el estándar mundial de medidas. En consecuencia, las reglas para su uso y parte de la terminología que es importante en la mecánica se presentarán enseguida.

Prefijos. Cuando una cantidad numérica es muy grande o muy pequeña, las unidades usadas para definir su tamaño pueden ser modificadas mediante un prefijo. Algunos de los prefijos usados en el SI se muestran en la tabla 1–3. Cada uno representa un múltiplo o un submúltiplo de una unidad que, si es aplicada sucesivamente, mueve el punto decimal de una cantidad numérica a cada tercer lugar.* Por ejemplo, 4 000 000 N = 4 000 kN (kilo–newton) = 4 MN (mega–newton), o 0.005 m = 5 mm (milímetros). Advierta que el SI no incluye el múltiplo deca (10) o el submúltiplo centi (0.01), los cuales forman parte del sistema métrico. Excepto por algunas medidas de volumen y área, el uso de esos prefijos debe evitarse en ciencia e ingeniería.

TABLA 1–3 • Prefijos

	Forma exponencial	Prefijo	Símbolo SI
<i>Múltiplo</i>			
1 000 000 000	10^9	giga	G
1 000 000	10^6	mega	M
1 000	10^3	kilo	k
<i>Submúltiplo</i>			
0.001	10^{-3}	mili	m
0.	10^{-6}	micro	μ
0.	10^{-9}	nano	n

*El kilogramo es la única unidad básica que se define con un prefijo.

Reglas para su uso. Las siguientes reglas se proporcionan para fomentar el uso apropiado de los diversos símbolos del SI:

1. Un símbolo *nunca* se escribe con una “s” de plural, ya que puede ser confundido con la unidad de segundo (s).
2. Los símbolos se escriben siempre en letras minúsculas, con las siguientes excepciones: los símbolos para los dos prefijos más grandes mostrados en la tabla 1–3, giga y mega, se escriben como G y M, respectivamente; los símbolos denominados con un nombre propio se escriben también con mayúscula, por ejemplo, N (Newton).
3. Las cantidades definidas por varias unidades que son múltiplos de otra unidad deben ir separadas por un *punto* para evitar confusión con la notación de prefijo, tal como es indicado por $N = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. También, $\text{m} \cdot \text{s}$ (metro-segundo), pero ms (milise-gundo).
4. La potencia exponencial representada para una unidad con un prefijo se refiere tanto a la unidad *como a* su prefijo. Por ejemplo, $\mu\text{N}^2 = (\mu\text{N})^2 = \mu\text{N} \cdot \mu\text{N}$. De igual manera, mm^2 representa $(\text{mm})^2 = \text{mm} \cdot \text{mm}$.
5. Las constantes físicas o números que tengan varios dígitos en cualquier lado del punto decimal deben ser reportados con un *espacio* entre cada tres dígitos en vez de con una coma; por ejemplo, 73 569.213 427. En el caso de cuatro dígitos en cualquier lado del decimal, el espaciado es opcional; por ejemplo, 8357 u 8 537. Además, trate siempre de usar decimales y evitar fracciones; esto es, escriba 15.25 y *no* $15\frac{1}{4}$.
6. Al efectuar cálculos, represente los números en términos de sus *unidades básicas o derivadas* convirtiendo todos los prefijos a potencias de 10. El resultado final debe ser expresado entonces usando un *solo prefijo*. Además, después de los cálculos, es mejor mantener los valores numéricos entre 0.1 y 1000; de otra manera, debe escogerse un prefijo adecuado. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(50 \text{ kN})(60 \text{ nm}) &= [50(10^3) \text{ N}][60(10^{-9}) \text{ m}] \\ &= 3000(10^{-6}) \text{ N} \cdot \text{m} = 3(10^{-3}) \text{ N} \cdot \text{m} = 3 \text{ mN} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

7. Los prefijos compuestos no deben usarse; por ejemplo, $\text{k}\mu\text{s}$ (kilo-micro-segundo) debe expresarse como ms (mili-segundo) ya que $1 \text{ k}\mu\text{s} = 1(10^3)(10^{-6})\text{s} = 1(10^{-3})\text{s} = 1 \text{ ms}$.
8. Con la excepción de la unidad básica de kilogramo, evite en general el uso de un prefijo en el denominador de unidades compuestas. Por ejemplo, no escriba N/mm , sino kN/m ; también, m/mg debe escribirse como Mm/kg .
9. Aunque no se expresan en múltiplos de 10, el minuto, la hora, etc., para fines prácticos, se conservan como múltiplos del segundo. Además, para mediciones angulares planas se usan radianes (rad). Sin embargo, en este libro se usarán a menudo grados, donde $180^\circ = \pi \text{ rad}$.

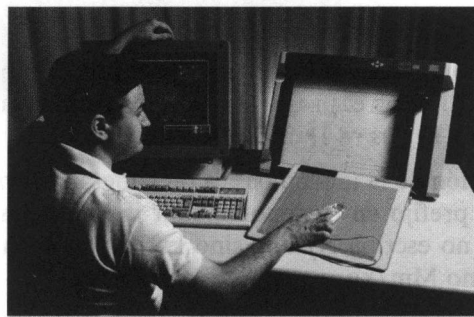
1.5 Cálculos numéricos

En la práctica de la ingeniería, con mucha frecuencia el trabajo numérico es efectuado usando calculadoras de mano y computadoras. Sin embargo, es importante que las respuestas a cualquier problema sean reportadas con precisión justificable y cifras significativas apropiadas. En esta sección analizaremos esos temas junto con otros aspectos importantes implicados en todo cálculo de ingeniería.

Homogeneidad dimensional. Los términos de cualquier ecuación usada para describir un proceso físico deben ser *dimensionalmente homogéneos*; esto es, cada término debe ser expresado en las mismas unidades. Si este es el caso, entonces todos los términos de una ecuación pueden combinarse si son sustituidos valores numéricos por las variables. Por ejemplo, considere la ecuación $s = vt + \frac{1}{2}at^2$, donde, en unidades SI, s es la posición en metros, m , t es el tiempo en segundos, s , v es la velocidad en m/s , y a es la aceleración en m/s^2 . Independientemente de cómo sea evaluada esta ecuación, mantiene su homogeneidad dimensional. En la forma dada, cada uno de los tres términos está expresado en metros [m , $(m/s)s$, $(m/s^2)s^2$], o despejando para a , $a = 2s/t^2 - 2v/t$, cada uno de los términos están expresados en unidades de m/s^2 [m/s^2 , m/s^2 , $(m/s)/s$].

Como en mecánica los problemas implican la solución de ecuaciones dimensionalmente homogéneas, el hecho de que todos los términos de una ecuación se representen mediante un conjunto consistente de unidades puede usarse como una verificación parcial de las manipulaciones algebraicas de una ecuación.

Cifras significativas. La precisión de un número queda especificada por la cantidad de cifras significativas que contenga. Una *cifra significativa* es cualquier dígito, incluido el cero, siempre que no se use para especificar la posición del punto decimal para el número. Por ejemplo, los números 5604 y 34.52 tienen cada uno cuatro cifras significativas. Sin



En ingeniería, las computadoras se usan con frecuencia para efectuar diseños y análisis avanzados.

embargo, cuando los números empiezan o terminan con ceros, es difícil decir cuántas cifras significativas contienen. Considere el número 400. ¿Tiene una (4), o tal vez dos (40), o tres (400) cifras significativas? Para aclarar esta situación, el número debe ser reportado usando potencias de 10. Usando la *notación de ingeniería*, el exponente es exhibido en múltiplos de tres para facilitar la conversión de unidades SI a unidades con un prefijo apropiado. Así, 400, expresado con una cifra significativa, sería $0.4(10^3)$. Igualmente, 2500 y 0.00546 expresados con tres cifras significativas serían $2.50(10^3)$ y $5.46(10^{-3})$.

Redondeo de números. Para cálculos numéricos, por lo general, la precisión obtenida en la solución de un problema nunca puede ser mejor que la precisión de los datos del problema. Esto es lo que cabe esperar, pero a menudo calculadoras portátiles o computadoras implican más cifras en la respuesta que el número de cifras significativas usadas para los datos. Por esta razón, un resultado calculado siempre debe “redondearse” a un número apropiado de cifras significativas.

Para expresar una precisión adecuada, aplique las siguientes reglas al redondear un número a n cifras significativas:

- Si el dígito $n + 1$ es *menor que 5*, el dígito $n + 1$ y los dígitos que le siguen se cancelan. Por ejemplo, 2.326 y 0.451, redondeados a $n = 2$ cifras significativas, serán 2.3 y 0.45.
- Si el dígito $n + 1$ es igual a 5 con ceros siguiéndolo, entonces redondee el n -ésimo dígito a un *número par*. Por ejemplo, $1.245(10^3)$ y 0.8655, redondeados a $n = 3$ cifras significativas, se convierten en $1.24(10^3)$ y 0.866.
- Si el dígito $n + 1$ es *mayor que 5* o igual a 5 sin dígitos ni ceros siguiéndolo, entonces incremente el n -ésimo dígito en 1 y cancele el $n + 1$ dígito y los dígitos siguientes. Por ejemplo, 0.723 87 y 565.500 3, redondeados a $n = 3$ cifras significativas, se convierten en 0.724 y 566.

Cálculos. Como regla general, para garantizar la exactitud de un resultado final al efectuar cálculos con una calculadora de bolsillo, conserve siempre un número mayor de dígitos que los contenidos en los datos del problema. Si es posible, trate de llevar a cabo los cálculos de manera que números que sean aproximadamente iguales no tengan que restarse ya que a menudo se pierde exactitud con este tipo de operaciones.

En ingeniería, generalmente redondeamos las respuestas finales a *tres* cifras significativas ya que los datos de geometría, cargas y otras cantidades a menudo son reportados con esta precisión.* Por ello, en este libro los cálculos intermedios para los ejemplos están elaborados con cuatro cifras significativas y las respuestas se presentan comúnmente con *tres* cifras significativas.

*Por supuesto, algunos números, como π , e , o números usados en fórmulas derivadas son exactos y, por tanto, precisos a un número infinito de cifras significativas.

EJEMPLO 1.1

Convierta 2 km/h a m/s. ¿Cuánto es esto en pies/s?

Solución

Como 1 km = 1000 m y 1 h = 3600 s, los factores de conversión se arreglan en el siguiente orden, de manera que una cancelación de las unidades pueda ser aplicada:

$$\begin{aligned} 2 \text{ km/h} &= \frac{2 \text{ km}}{\text{h}} \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) \\ &= \frac{2000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 0.556 \text{ m/s} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

A partir de la tabla 1-2, sabemos que 1 pie = 0.3048 m. Entonces

$$\begin{aligned} 0.556 \text{ m/s} &= \frac{0.556 \text{ m}}{\text{s}} \left(\frac{1 \text{ pie}}{0.3048 \text{ m}} \right) \\ &= 1.82 \text{ pies/s} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.2

Convierta las cantidades 300 lb · s y 52 slug/pies³ a las unidades SI apropiadas.

Solución

Usando la tabla 1-2, tenemos que 1 lb = 4.448 2 N.

$$\begin{aligned} 300 \text{ lb} \cdot \text{s} &= 300 \text{ lb} \cdot \text{s} \left(\frac{4.448 2 \text{ N}}{1 \text{ lb}} \right) \\ &= 1334.5 \text{ N} \cdot \text{s} = 1.33 \text{ kN} \cdot \text{s} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

También, 1 slug = 14.593 8 kg y 1 pie = 0.304 8 m.

$$\begin{aligned} 52 \text{ slug/pies}^3 &= \frac{52 \text{ slug}}{\text{pies}^3} \left(\frac{14.593 8 \text{ kg}}{1 \text{ slug}} \right) \left(\frac{1 \text{ pie}}{0.304 8 \text{ m}} \right)^3 \\ &= 26.8(10^3) \text{ kg/m}^3 \\ &= 26.8 \text{ Mg/m}^3 \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 13

Evalúe cada una de las siguientes cantidades y exprese las en unidades SI con un prefijo apropiado: (a) $(50 \text{ mN})(6 \text{ GN})$, (b) $(400 \text{ mm})(0.6 \text{ MN})^2$, (c) $45 \text{ MN}^3/900 \text{ Gg}$.

Solución

Primero convierta cada número a unidades básicas, efectúe las operaciones indicadas, y luego elija un prefijo apropiado (vea la regla 6 en la página 9).

Parte (a)

$$\begin{aligned}(50 \text{ mN})(6 \text{ GN}) &= [50(10^{-3} \text{ N})][6(10^9 \text{ N})] \\ &= 300(10^6) \text{ N}^2 \\ &= 300(10^6) \cancel{\text{N}}^2 \left(\frac{1 \text{ kN}}{10^3 \cancel{\text{N}}} \right) \left(\frac{1 \text{ kN}}{10^3 \cancel{\text{N}}} \right) \\ &= 300 \text{ kN}^2 \qquad \text{Resp.}\end{aligned}$$

Tenga en cuenta la convención $\text{kN}^2 = (\text{kN})^2 = 10^6 \text{ N}^2$ (regla 4 en la página 9).

Parte (b)

$$\begin{aligned}(400 \text{ mm})(0.6 \text{ MN})^2 &= [400(10^{-3} \text{ m})][0.6(10^6 \text{ N})]^2 \\ &= [400(10^{-3} \text{ m})][0.36(10^{12} \text{ N}^2)] \\ &= 144(10^9) \text{ m} \cdot \text{N}^2 \\ &= 144 \text{ Gm} \cdot \text{N}^2 \qquad \text{Resp.}\end{aligned}$$

Podemos escribir también

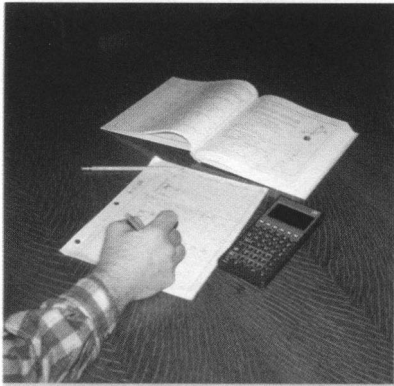
$$\begin{aligned}144(10^9) \text{ m} \cdot \text{N}^2 &= 144(10^9) \text{ m} \cdot \cancel{\text{N}}^2 \left(\frac{1 \text{ MN}}{10^6 \cancel{\text{N}}} \right) \left(\frac{1 \text{ MN}}{10^6 \cancel{\text{N}}} \right) \\ &= 0.144 \text{ m} \cdot \text{MN}^2\end{aligned}$$

Parte (c)

$$\begin{aligned}45 \text{ MN}^3/900 \text{ Gg} &= \frac{45(10^6 \text{ N})^3}{900(10^6 \text{ kg})} \\ &= 0.05(10^{12}) \text{ N}^3/\text{kg} \\ &= 0.05(10^{12}) \cancel{\text{N}}^3 \left(\frac{1 \text{ kN}}{10^3 \cancel{\text{N}}} \right)^3 \frac{1}{\text{kg}} \\ &= 0.05(10^3) \text{ kN}^3/\text{kg} \\ &= 50 \text{ kN}^3/\text{kg} \qquad \text{Resp.}\end{aligned}$$

Aquí hemos usado las reglas 4 y 8 de la página 9.

1.6 Procedimiento general para el análisis



Al resolver problemas trabaje tan limpia y ordenadamente como le sea posible. Esto estimula en general el pensamiento claro y ordenado, y viceversa.

La manera más efectiva de aprender los principios de la mecánica es *resolviendo problemas*. Para tener éxito en esto, es importante efectuar siempre el trabajo en una *manera lógica y ordenada*, tal como está sugerido por la siguiente secuencia de pasos:

1. Lea cuidadosamente el problema y trate de correlacionar la situación física real con la teoría estudiada.
2. Trace cualquier diagrama necesario y tabule los datos del problema.
3. Aplique los principios importantes, generalmente en forma matemática.
4. Resuelva algebraicamente las ecuaciones necesarias en tanto que esto sea práctico, y luego, estando seguro de que son dimensionalmente homogéneas, use un conjunto consistente de unidades y complete la solución numéricamente. Presente la respuesta con no más cifras significativas que las precisadas en los datos dados.
5. Estudie la respuesta con juicio técnico y sentido común para determinar si parece razonable.

PUNTOS IMPORTANTES

- La estática es el estudio de los cuerpos que están en reposo o se mueven con velocidad constante.
- Una partícula tiene masa, pero un tamaño que puede ser ignorado.
- Un cuerpo rígido no se deforma bajo carga.
- Se supone que las fuerzas concentradas actúan en un punto sobre un cuerpo.
- Las tres leyes del movimiento de Newton deben ser memorizadas.
- La masa es una propiedad de la materia que no cambia de una ubicación a otra.
- El peso se refiere a la atracción gravitatoria de la Tierra sobre un cuerpo o una cantidad de masa. Su magnitud depende de la elevación a la que se encuentre la masa.
- En el SI la unidad de fuerza, el newton, es una unidad derivada. El metro, el segundo y el kilogramo son unidades básicas.
- Los prefijos G, M, k, m, μ , n son usados para representar cantidades numéricas grandes y pequeñas. Su tamaño exponencial debe ser conocido, junto con las reglas para usar las unidades SI.
- Efectúe los cálculos numéricos con varias cifras significativas y luego reporte la respuesta final con tres cifras significativas.
- Las manipulaciones algebraicas de una ecuación pueden ser revisadas, en parte, verificando que la ecuación se conserva dimensionalmente homogénea.
- Aprenda las reglas para redondear números.

PROBLEMAS

1-1. Redondee los siguientes números a tres cifras significativas: (a) 4.65735 m, (b) 55.578 s, (c) 4555 N, (d) 2768 kg.

1-2. La madera tiene una densidad de 4.70 slug/pie³. ¿Cuál es su densidad expresada en unidades SI?

1-3. Represente cada una de las siguientes cantidades en la forma SI correcta usando un prefijo apropiado: (a) 0.000431 kg, (b) 35.3(10³) N, (c) 0.00532 km.

*1-4. Represente cada una de las siguientes combinaciones de unidades en la forma SI correcta usando un prefijo apropiado: (a) m/ms, (b) μ km, (c) ks/mg, y (d) km \cdot μ N.

1-5. Si un automóvil está viajando a 55 mi/h, determine su rapidez en kilómetros por hora y en metros por segundo.

1-6. Evalúe cada una de las siguientes cantidades y expréselas con un prefijo apropiado: (a) (430 kg)², (b) (0.002 mg)², y (c) (230 m)³.

1-7. Un cohete tiene una masa de 250(10³) slugs sobre la Tierra. Especifique (a) su masa en unidades SI, y (b) su peso en unidades SI. Si el cohete está en la Luna, donde la aceleración de la gravedad es $g_m = 5.30$ pies/s², determine con tres cifras significativas (c) su peso en unidades SI, y (d) su masa en unidades SI.

*1-8. Represente cada una de las siguientes combinaciones de unidades en la forma SI correcta: (a) kN/ μ s, (b) Mg/mN, y (c) MN/(kg \cdot ms).

1-9. El *pascal* (Pa) es una unidad de presión muy pequeña. Para mostrar esto, convierta 1 Pa = 1 N/m² a lb/pie². La presión atmosférica al nivel del mar es de 14.7 lb/pulg². ¿A cuántos pascales corresponde esto?

1-10. ¿Cuál es el peso en newtons de un objeto que tiene una masa de: (a) 10 kg, (b) 0.5 g, (c) 4.50 Mg? Exprese el resultado con tres cifras significativas. Use un prefijo apropiado.

1-11. Evalúe cada una de las siguientes cantidades con tres cifras significativas y exprese cada respuesta en unidades SI usando un prefijo apropiado: (a) 354 mg(45 km) / (0.035 6 kN), (b) (.004 53 Mg)(201 ms), (c) 435 MN/23.2 mm.

*1-12. Convierta cada una de las siguientes cantidades y exprese la respuesta usando un prefijo apropiado: (a) 175 lb/pie³ a kN/m³, (b) 6 pies/h a mm/s, y (c) 835 lb \cdot pie a kN \cdot m.

1-13. Convierta cada una de las siguientes cantidades a cantidades con tres cifras significativas. (a) 20 lb \cdot pie a N \cdot m, (b) 450 lb/pie³ a kN/m³, y (c) 15 pies/h a mm/s.

1-14. Si un objeto tiene una masa de 40 slugs, determine su masa en kilogramos.

1-15. El agua tiene densidad de 1.94 slug/pie³. ¿Cuál es su densidad expresada en unidades SI? Exprese la respuesta con tres cifras significativas.

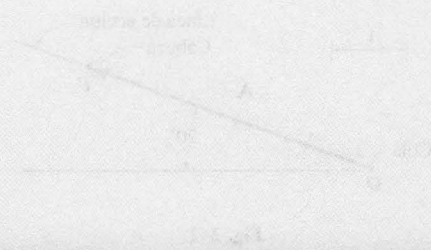
*1-16. Dos partículas tienen masa de 8 y 12 kg, respectivamente. Si están separadas 800 mm, determine la fuerza gravitatoria que actúa entre ellas. Compare este resultado con el peso de cada partícula.

1-17. Determine la masa de un objeto que tiene un peso de (a) 20 mN, (b) 150 kN, (c) 60 MN. Exprese la respuesta con tres cifras significativas.

1-18. Si un hombre pesa 155 lb sobre la Tierra, especifique (a) su masa en slugs, (b) su masa en kilogramos, y (c) su peso en newtons. Si el hombre está en la Luna, donde la aceleración de la gravedad es $g_m = 5.30$ pies/s², determine (d) su peso en libras, y (e) su masa en kilogramos.

1-19. Usando las unidades básicas del SI, muestre que la ecuación 1–2 es dimensionalmente homogénea y da F en newtons. Determine con tres cifras significativas la fuerza gravitatoria que actúa entre dos esferas que se tocan una a otra. La masa de cada esfera es de 200 kg y el radio de 300 mm.

*1-20. Evalúe cada una de las siguientes cantidades con tres cifras significativas y exprese cada respuesta en unidades SI usando un prefijo apropiado: (a) (0.631 Mm) / (8.60 kg)², (b) (35 mm)² (48 kg)³.



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Mostrar cómo sumar fuerzas y resolverlas en componentes usando la ley del paralelogramo.
- Expresar la fuerza y la posición en forma vectorial cartesiana y explicar cómo determinar la magnitud y el sentido del vector.
- Presentar el producto punto para determinar el ángulo entre dos vectores o la proyección de un vector en otro.

2.1 Escalares y vectores

La mayor parte de las cantidades físicas en mecánica pueden ser expresadas matemáticamente por medio de escalares y vectores.

Escalar. Una cantidad caracterizada por un número positivo o negativo se denomina un *escalar*. Por ejemplo, masa, volumen y longitud son cantidades escalares empleadas a menudo en estática. En este libro, los escalares están indicados por letras en cursivas, tal como el escalar A .

Vector. Un *vector* es una cantidad que tiene tanto magnitud como dirección. En estática, las cantidades vectoriales encontradas con frecuencia son posición, fuerza y momento. En trabajos realizados a mano, un vector es representado generalmente por una letra con una línea sobre ella, tal como \vec{A} . La magnitud se designa mediante $|\vec{A}|$ o simplemente con A . En este libro los vectores se simbolizarán mediante tipos en negrita; por ejemplo, \mathbf{A} se usa para designar el vector "A". Su magnitud, que es siempre una cantidad positiva, se representa mediante cursivas, tal como $|A|$, o simplemente A cuando se sobreentienda que A es un escalar positivo.

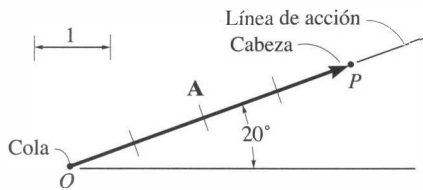
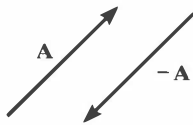


Fig. 2-1

Un vector se representa gráficamente por medio de una flecha, la cual se usa para definir su magnitud, dirección y sentido. La *magnitud* del vector es la longitud de la flecha, la *dirección* es definida por el ángulo entre un eje de referencia y la línea de acción de la flecha, y el *sentido* queda indicado por la cabeza de la flecha. Por ejemplo, el vector **A** mostrado en la figura 2-1 tiene una magnitud de 4 unidades, una dirección de 20° medida en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje horizontal, y un sentido que es hacia arriba y hacia la derecha. El punto *O* se llama la *cola* del vector y el punto *P* la *punta* o *cabeza* del vector.

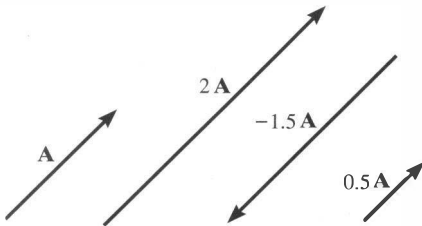
2.2 Operaciones vectoriales



Vector **A** y su contraparte negativa

Fig. 2-2

Multiplicación y división de un vector por un escalar. El producto de un vector **A** y un escalar *a*, que da $a\mathbf{A}$, se define como un vector con magnitud $|a\mathbf{A}|$. El *sentido* de $a\mathbf{A}$ es el *mismo* que **A** siempre que *a* sea *positivo*, y es *opuesto* a **A** si *a* es *negativo*. En particular, el negativo de un vector se forma multiplicando el vector por el escalar (-1), figura 2-2. La división de un vector entre un escalar se puede definir usando las leyes de multiplicación, ya que $\mathbf{A}/a = (1/a)\mathbf{A}$, $a \neq 0$. Ejemplos gráficos de estas operaciones se muestran en la figura 2-3.

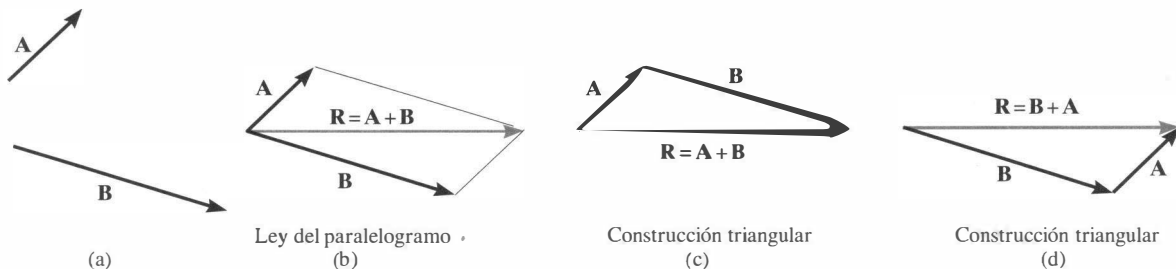


Multiplicación y división escalar

Fig. 2-3

Suma de vectores. Dos vectores **A** y **B**, tal como los de fuerza o posición, figura 2-4a, pueden sumarse para formar un vector “resultante” $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ usando la *ley del paralelogramo*. Para hacer esto, **A** y **B** se unen en sus colas, figura 2-4b. Se trazan líneas paralelas desde la cabeza de cada vector cortándose en un punto común, formando así los lados adyacentes de un paralelogramo. Como se muestra, la resultante **R** es la diagonal del paralelogramo, la cual se extiende desde las colas de **A** y **B** hasta la intersección de las líneas.

También podemos sumar **B** a **A** usando una *construcción triangular*, un caso especial de la ley del paralelogramo, en donde el vector **B** se suma al vector **A** en forma de “cabeza a cola”, esto es, conectando la cabeza de **A** a la cola de **B**, figura 2-4c. La resultante **R** se extiende desde la cola de **A** hasta la cabeza de **B**. De manera similar, **R** también puede ser obtenida sumando **A** a **B**, figura 2-4d. Por comparación, se ve que la suma vectorial es conmutativa; en otras palabras, los vectores pueden sumarse en cualquier orden, es decir, $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.



(a)

Ley del paralelogramo (b)

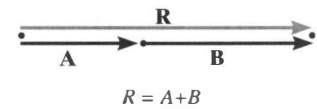
Construcción triangular (c)

Construcción triangular (d)

Suma vectorial

Fig. 2-4

Como un caso especial, si los dos vectores **A** y **B** son *colineales*, es decir, si ambos tienen la misma línea de acción, la ley del paralelogramo se reduce a una *suma algebraica* o *suma escalar* $R = A + B$, como se muestra en la figura 2-5.



Suma de vectores colineales

Fig. 2-5

Resta de vectores. La *diferencia* resultante entre dos vectores **A** y **B** del mismo tipo puede ser expresada como

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Esta suma vectorial se muestra gráficamente en la figura 2-6. Dado que la resta se define como un caso especial de la suma, las reglas de la suma vectorial también se aplican a la resta vectorial.

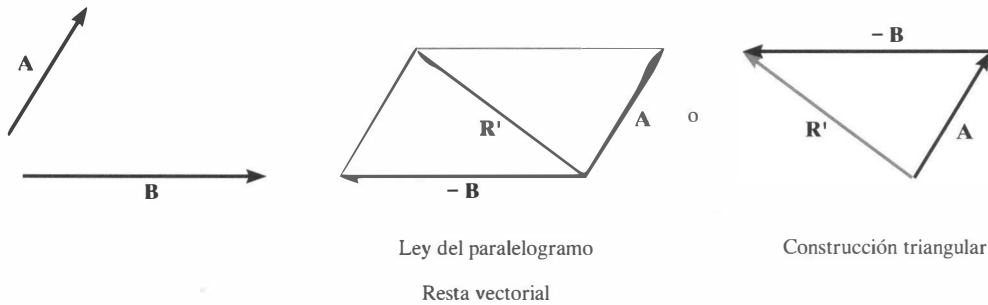
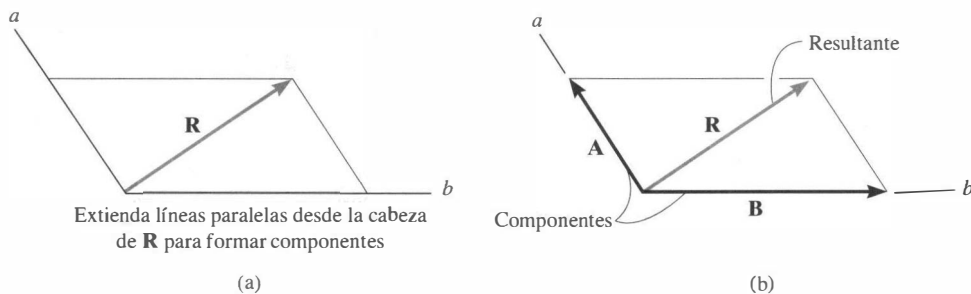


Fig. 2-6

Resolución de un vector. Un vector puede ser resuelto en dos “componentes” con líneas de acción conocidas usando la ley del paralelogramo. Por ejemplo, si en la figura 2-7a, **R** debe ser resuelto en componentes que actúen a lo largo de las líneas *a* y *b*, comenzamos en la *cabeza* de **R** y extendemos una línea *paralela* a *a* hasta que corte a *b*. Igualmente, se traza una línea paralela a *b* desde la *cabeza* de **R** hasta el punto de intersección con *a*, figura 2-7a. Las dos componentes **A** y **B** se trazan luego en forma tal que se extiendan desde la *cola* de **R** hasta los puntos de intersección, como se muestra en la figura 2-7b.



Resolución de un vector

Fig. 2-7

2.3 Suma vectorial de fuerzas

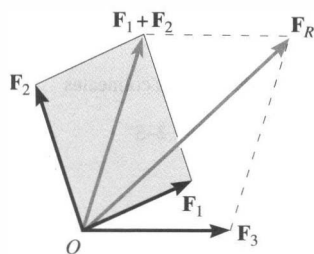
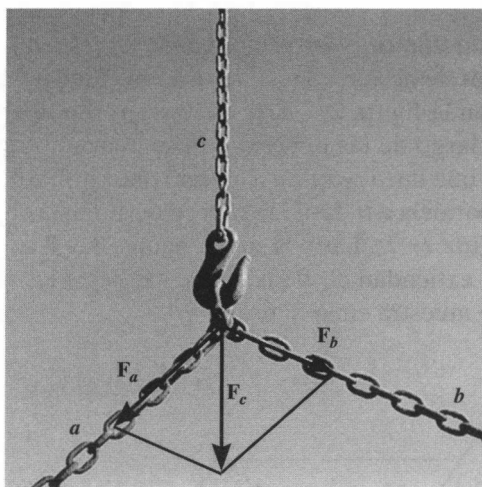


Fig. 2-8

La evidencia experimental ha mostrado que una fuerza es una cantidad vectorial ya que tiene una magnitud específica, dirección y sentido, y que se suma de acuerdo con la ley del paralelogramo. Dos problemas comunes en estática implican encontrar la fuerza resultante, conocidas sus componentes, o resolver una fuerza conocida en dos componentes. Como se vio en la sección 2.2, ambos problemas requieren de la aplicación de la ley del paralelogramo.

Si más de dos fuerzas deben ser sumadas, pueden llevarse a cabo aplicaciones sucesivas de la ley del paralelogramo para obtener la fuerza resultante. Por ejemplo, si tres fuerzas F_1 , F_2 , F_3 actúan en un punto O , figura 2-8, se calcula la resultante de dos cualesquiera de las fuerzas, digamos $F_1 + F_2$, y luego esta resultante se suma a la tercera fuerza, dando la resultante de las tres fuerzas; es decir, $F_R = (F_1 + F_2) + F_3$. Aplicar la ley del paralelogramo para sumar más de dos fuerzas, como vemos aquí, a menudo requiere de extensos cálculos geométricos y trigonométricos para determinar los valores numéricos de la magnitud y la dirección de la resultante. En vez de ello, los problemas de este tipo fácilmente son resueltos usando el “método de las componentes rectangulares”, el cual veremos en la sección 2.4.



Si conocemos las fuerzas F_a y F_b que las dos cadenas a y b ejercen sobre el gancho, podemos encontrar su fuerza resultante F_c aplicando la ley del paralelogramo. Esto requiere trazar líneas paralelas a a y b desde las cabezas de F_a y F_b tal como se muestra, formando así un paralelogramo.

De manera similar, si se conoce la fuerza F_c a lo largo de la cadena c , entonces sus dos componentes F_a y F_b que actúan a lo largo de a y b , pueden ser determinadas aplicando la ley del paralelogramo. Aquí debemos comenzar en la cabeza de F_c y construir líneas paralelas a a y b , formando así el paralelogramo.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

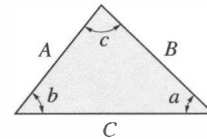
Los problemas que implican la suma de dos fuerzas pueden resolverse como sigue:

Ley del paralelogramo.

- Trace un croquis mostrando la adición vectorial usando la ley del paralelogramo.
- Dos fuerzas “componentes” se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo, produciendo una fuerza *resultante* que forma la diagonal del paralelogramo.
- Si una fuerza debe resolverse en *componentes* a lo largo de dos ejes dirigidos desde la cola de la fuerza, entonces comience en la cabeza de la fuerza y construya líneas paralelas a los ejes, formando así el paralelogramo. Los lados del paralelogramo representan las componentes.
- Marque todas las magnitudes de fuerzas conocidas y desconocidas y los ángulos sobre el croquis e identifique las dos incógnitas.

Trigonometría.

- Trace de nuevo media porción del paralelogramo para ilustrar la adición triangular cabeza a cola de las componentes.
- La magnitud de la fuerza resultante puede ser determinada con la ley de los cosenos, y su dirección mediante la ley de los senos, figura 2-9.
- La magnitud de dos componentes de fuerza está determinada a partir de la ley de los senos, figura 2-9.



Ley de los senos:

$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

Ley de los cosenos:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos c}$$

Fig. 2-9

PUNTOS IMPORTANTES

- Un escalar es un número positivo o negativo.
- Un vector es una cantidad que tiene magnitud, dirección y sentido.
- La multiplicación o la división de un vector por, o entre, un escalar cambiará la magnitud del vector. El sentido del vector cambiará si el escalar es negativo.
- Como un caso especial, si los vectores son colineales, la resultante se obtiene con una suma algebraica o escalar.

EJEMPLO 2.1

La armella roscada que se ve en la figura 2-10a está sometida a dos fuerzas, \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 . Determine la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.

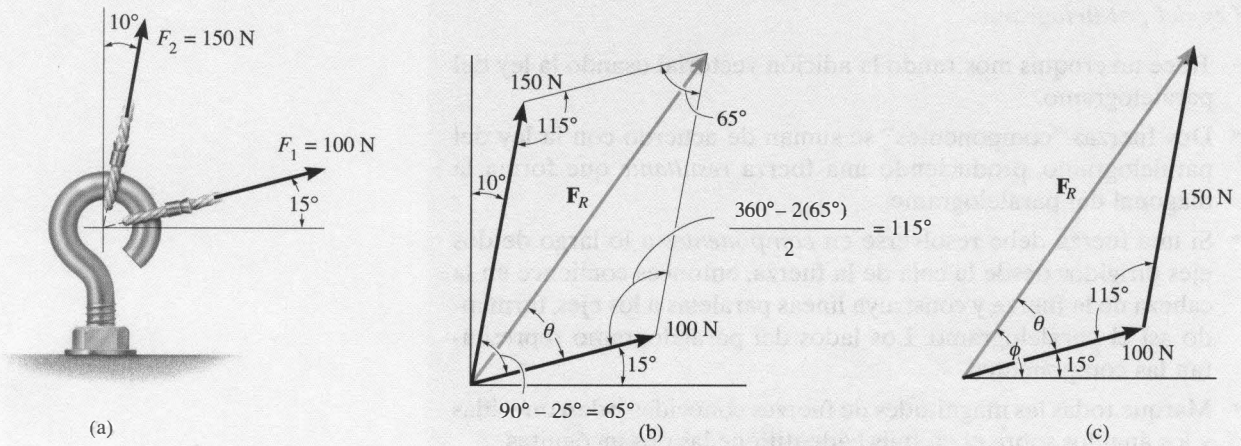


Fig. 2-10

Solución

Ley del paralelogramo. La ley de adición del paralelogramo se muestra en la figura 2-10b. Las dos incógnitas son la magnitud de \mathbf{F}_R y el ángulo θ (teta).

Trigonometría. A partir de la figura 2-10b, se construye el triángulo vectorial, figura 2-10c. F_R se determina usando la ley de los cosenos:

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{(100 \text{ N})^2 + (150 \text{ N})^2 - 2(100 \text{ N})(150 \text{ N}) \cos 115^\circ} \\ &= \sqrt{10\,000 + 22\,500 - 30\,000(-0.4226)} = 212.6 \text{ N} \\ &= 213 \text{ N} \end{aligned}$$

Resp.

El ángulo θ se determina aplicando la ley de los senos, usando el valor calculado de F_R .

$$\begin{aligned} \frac{150 \text{ N}}{\sin \theta} &= \frac{212.6 \text{ N}}{\sin 115^\circ} \\ \sin \theta &= \frac{150 \text{ N}}{212.6 \text{ N}} (0.9063) \\ \theta &= 39.8^\circ \end{aligned}$$

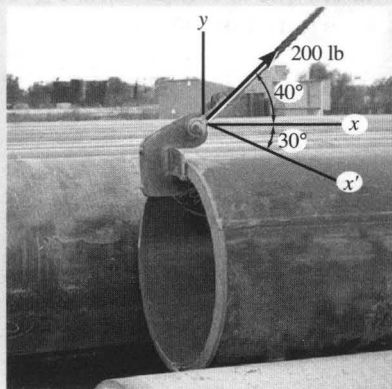
Así, la dirección ϕ (fi) de \mathbf{F}_R , medida desde la horizontal, es

$$\phi = 39.8^\circ + 15.0^\circ = 54.8^\circ \nearrow \phi$$

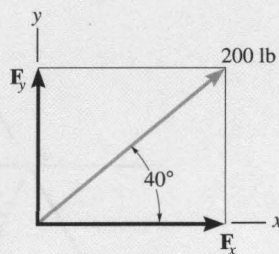
Resp.

EJEMPLO 2.2

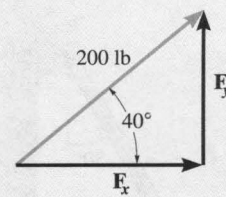
Resuelva la fuerza de 200 lb que actúa sobre el tubo, figura 2-11a, en componentes en las direcciones (a) x y y , y en las direcciones (b) x' y y .



(a)



(b)



(c)

Fig. 2-11

Solución

En cada caso se usa la ley del paralelogramo para resolver \mathbf{F} en sus dos componentes, y luego se construye el triángulo vectorial para determinar los resultados numéricos por trigonometría.

Parte (a). La suma vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$ se muestra en la figura 2-11b. En particular, advierta que la longitud de las componentes se ha trazado a escala a lo largo de los ejes x y y construyendo primero líneas desde la punta de \mathbf{F} paralelas a los ejes de acuerdo con la ley del paralelogramo. A partir del triángulo vectorial, figura 2-11c,

$$F_x = 200 \text{ lb} \cos 40^\circ = 153 \text{ lb}$$

Resp.

$$F_y = 200 \text{ lb} \sin 40^\circ = 129 \text{ lb}$$

Resp.

Parte (b). La suma vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{x'} + \mathbf{F}_y$ se muestra en la figura 2-11d. Observe cuidadosamente cómo se construye el paralelogramo. Aplicando la ley de los senos y usando los datos del triángulo vectorial, figura 2-11e, se obtiene

$$\frac{F_{x'}}{\sin 50^\circ} = \frac{200 \text{ lb}}{\sin 60^\circ}$$

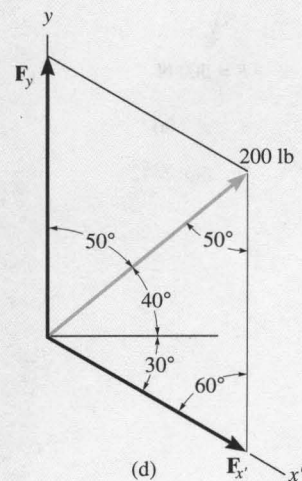
$$F_{x'} = 200 \text{ lb} \left(\frac{\sin 50^\circ}{\sin 60^\circ} \right) = 177 \text{ lb}$$

Resp.

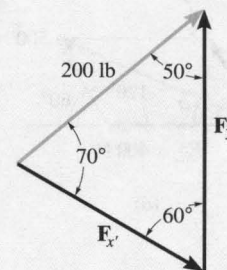
$$\frac{F_y}{\sin 70^\circ} = \frac{200 \text{ lb}}{\sin 60^\circ}$$

$$F_y = 200 \text{ lb} \left(\frac{\sin 70^\circ}{\sin 60^\circ} \right) = 217 \text{ lb}$$

Resp.



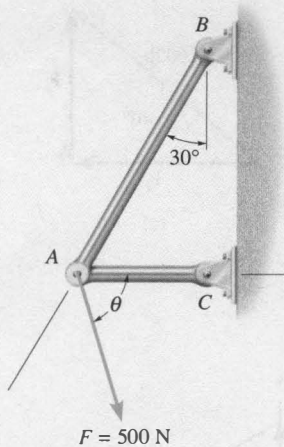
(d)



(e)

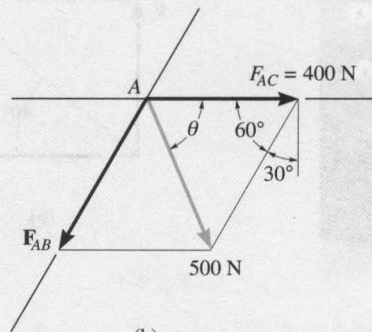
EJEMPLO 2.3

La fuerza \mathbf{F} que actúa sobre la estructura mostrada en la figura 2–12a tiene una magnitud de 500 N y debe resolverse en dos componentes actuando a lo largo de las barras AB y AC . Determine el ángulo θ , medido *bajo* la horizontal, de manera que la componente \mathbf{F}_{AC} esté dirigida de A hacia C y tenga una magnitud de 400 N.

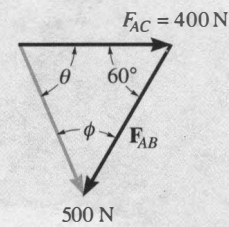


(a)

Fig. 2-12



(b)



(c)

Solución

Usando la ley del paralelogramo, la suma vectorial de las dos componentes da la resultante mostrada en la figura 2–12b. Observe cuidadosamente cómo la fuerza resultante es resuelta en las dos componentes \mathbf{F}_{AB} y \mathbf{F}_{AC} , las cuales tienen líneas de acción especificadas. El correspondiente triángulo vectorial se muestra en la figura 2–12c.

El ángulo ϕ puede ser determinado usando la ley de los senos:

$$\frac{400 \text{ N}}{\sin \phi} = \frac{500 \text{ N}}{\sin 60^\circ}$$

$$\sin \phi = \left(\frac{400 \text{ N}}{500 \text{ N}} \right) \sin 60^\circ = 0.6928$$

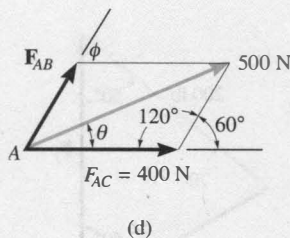
$$\phi = 43.9^\circ$$

Por consiguiente,

$$\theta = 180^\circ - 60^\circ - 43.9^\circ = 76.1^\circ \quad \text{Resp.}$$

Usando este valor para θ , aplique la ley de los cosenos o la de los senos y muestre que \mathbf{F}_{AB} tiene una magnitud de 561 N.

Advierta que \mathbf{F} también puede estar dirigida a un ángulo θ por arriba de la horizontal, como se muestra en la figura 2–12d, y aún producir la componente requerida \mathbf{F}_{AC} . Demuestre que en este caso $\theta = 16.1^\circ$ y $F_{AB} = 161 \text{ N}$.



(d)

EJEMPLO 2.4

El anillo mostrado en la figura 2-13a está sometido a dos fuerzas, F_1 y F_2 . Si se requiere que la fuerza resultante tenga magnitud de 1 kN y esté dirigida verticalmente hacia abajo, determine (a) las magnitudes de F_1 y F_2 si $\theta = 30^\circ$, y (b) las magnitudes de F_1 y F_2 si F_2 debe ser mínima.

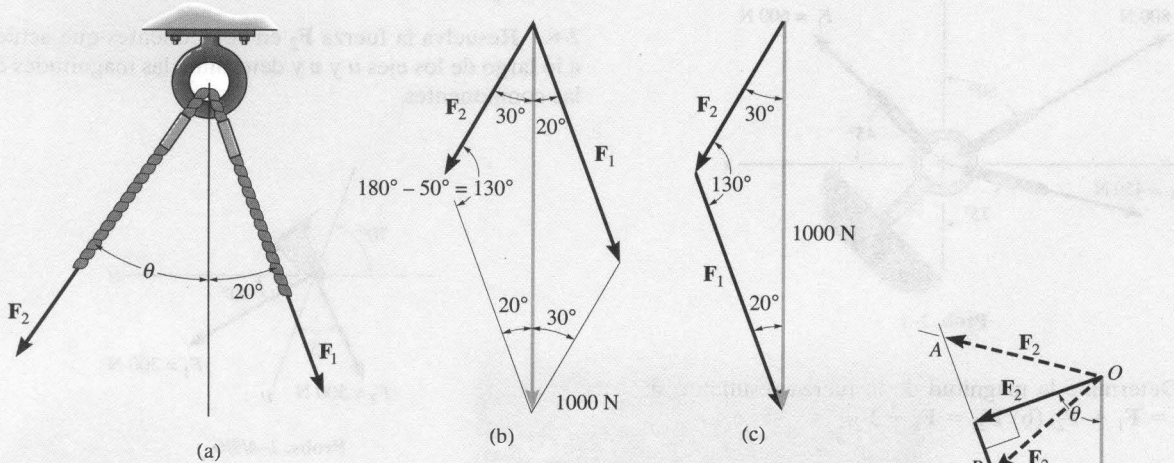


Fig. 2-13

Solución

Parte (a). En la figura 2-13b se muestra un croquis de la suma vectorial según la ley del paralelogramo. A partir del triángulo vectorial construido en la figura 2-13c, las magnitudes desconocidas F_1 y F_2 se determinan usando la ley de los senos:

$$\frac{F_1}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{1000 \text{ N}}{\text{sen } 130^\circ}$$

$$F_1 = 653 \text{ N}$$

Resp.

$$\frac{F_2}{\text{sen } 20^\circ} = \frac{1000 \text{ N}}{\text{sen } 130^\circ}$$

$$F_2 = 446 \text{ N}$$

Resp.

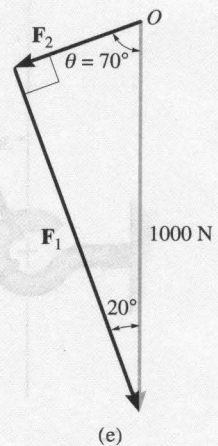
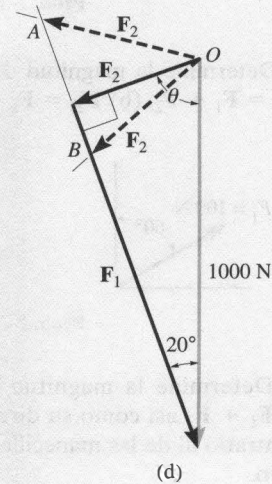
Parte (b) Si θ no está especificado, entonces, por el triángulo vectorial, figura 2-13d, F_2 puede ser sumada a F_1 de varias maneras para obtener la fuerza resultante de 1000 N. En particular, la longitud *mínima* o la magnitud de F_2 ocurrirá cuando su línea de acción sea *perpendicular* a F_1 . Cualquier otra dirección, como OA u OB , dará un valor mayor para F_2 . Por consiguiente, cuando $\theta = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$, F_2 es mínima. A partir del triángulo mostrado en la figura 2-13e, se ve que

$$F_1 = 1000 \text{ sen } 70^\circ \text{ N} = 940 \text{ N}$$

Resp.

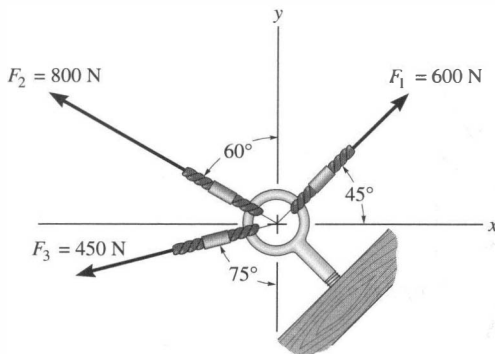
$$F_2 = 1000 \text{ cos } 70^\circ \text{ N} = 342 \text{ N}$$

Resp.



PROBLEMAS

2-1. Determine la magnitud de la fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ y su dirección, medida en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje x positivo.



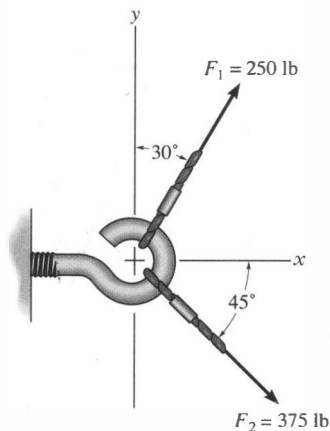
Prob. 2-1

2-2. Determine la magnitud de la fuerza resultante si: (a) $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$; (b) $\mathbf{F}'_R = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2$.



Prob. 2-2

2-3. Determine la magnitud de la fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ así como su dirección, medida en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje x positivo.

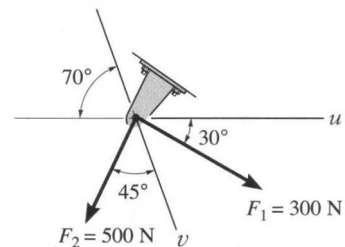


Prob. 2-3

*2-4. Determine la magnitud de la fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ y su dirección, medida en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje u positivo.

2-5. Resuelva la fuerza \mathbf{F}_1 en componentes que actúen a lo largo de los ejes u y v y determine las magnitudes de las componentes.

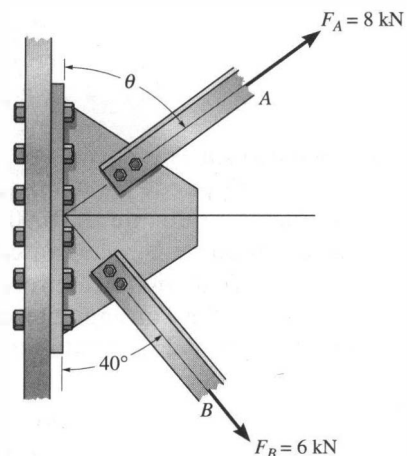
2-6. Resuelva la fuerza \mathbf{F}_2 en componentes que actúen a lo largo de los ejes u y v y determine las magnitudes de las componentes.



Probs. 2-4/5/6

2-7. La placa está sometida a las dos fuerzas en A y B , como se muestra. Si $\theta = 60^\circ$, determine la magnitud de la resultante de esas dos fuerzas y su dirección medida desde la horizontal.

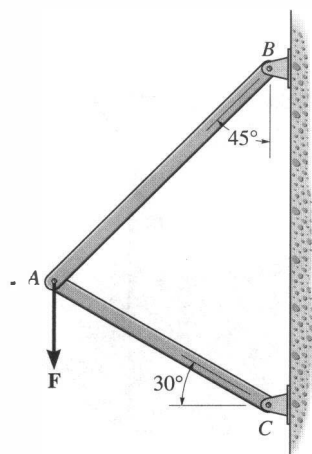
*2-8. Determine el ángulo θ para conectar la barra A a la placa de manera que la fuerza resultante de F_A y F_B esté dirigida horizontalmente hacia la derecha. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza resultante?



Probs. 2-7/8

2-9. La fuerza vertical F actúa hacia abajo en A sobre la estructura de dos barras. Determine las magnitudes de las dos componentes de F dirigidas a lo largo de los ejes de AB y AC . Considere $F = 500$ N.

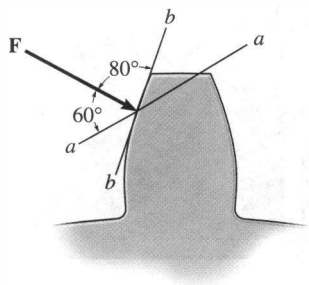
2-10. Resuelva el problema 2-9 con $F = 350$ lb.



Probs. 2-9/10

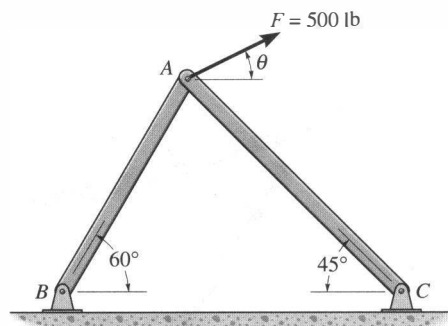
2-11. La fuerza que actúa sobre el diente del engrane es $F = 20$ lb. Resuelva esta fuerza en dos componentes actuando a lo largo de las líneas aa y bb .

*2-12. Se requiere que la componente de la fuerza F que actúa a lo largo de la línea aa sea de 30 lb. Determine la magnitud de F y su componente a lo largo de la línea bb .



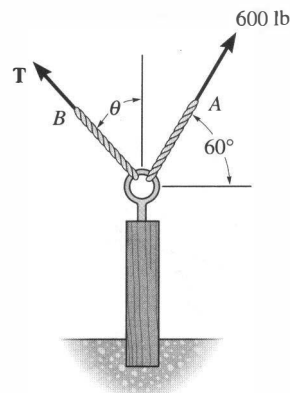
Probs. 2-11/12

2-13. La fuerza de 500 lb que actúa sobre la estructura debe resolverse en dos componentes actuando a lo largo de los ejes de las barras AB y AC . Si la componente de fuerza a lo largo de AC debe ser de 300 lb, dirigida de A a C , determine la magnitud de la fuerza que debe actuar a lo largo de AB y el ángulo θ de la fuerza de 500 lb.



Prob. 2-13

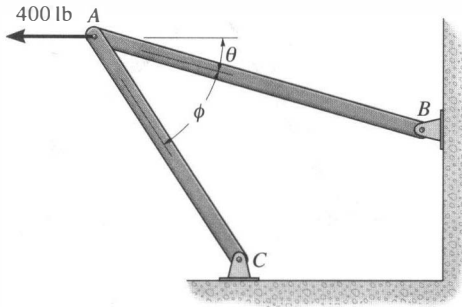
2-14. El poste va a ser extraído del terreno usando dos cuerdas A y B . La cuerda A estará sometida a una fuerza de 600 lb y será dirigida a 60° desde la horizontal. Si la fuerza resultante que actuará sobre el poste va a ser de 1200 lb, vertical hacia arriba, determine la fuerza T en la cuerda B y el correspondiente ángulo θ .



Prob. 2-14

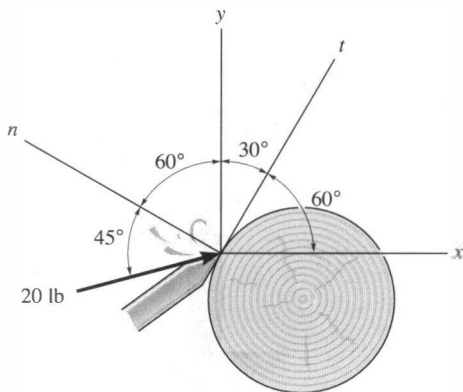
2-15. Determine el ángulo de diseño θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) para la barra AB de manera que la fuerza horizontal de 400 lb tenga una componente de 500 lb dirigida de A hacia C . ¿Cuál es la componente de fuerza que actúa a lo largo de la barra AB ? Considere $\theta = 40^\circ$.

*2-16. Determine el ángulo de diseño ϕ ($0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$) entre las barras AB y AC de manera que la fuerza horizontal de 400 lb tenga una componente de 600 lb actuando hacia arriba y hacia la izquierda, en la misma dirección que de B hacia A . Considere $\theta = 30^\circ$.



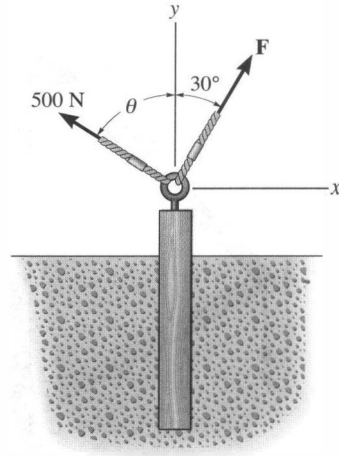
Probs. 2-15/16

2-17. El cincel ejerce una fuerza de 20 lb sobre la barra de madera que gira en un torno. Resuelva esta fuerza en componentes que actúen (a) a lo largo de los ejes n y t , y (b) a lo largo de los ejes x y y .



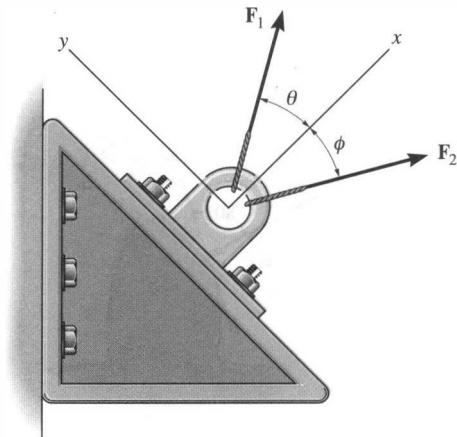
Prob. 2-17

2-18. Dos fuerzas son aplicadas en el extremo de una armella roscada para extraer el poste. Determine el ángulo θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) y la magnitud de la fuerza F para que la fuerza resultante sobre el poste esté dirigida verticalmente hacia arriba y tenga una magnitud de 750 N.



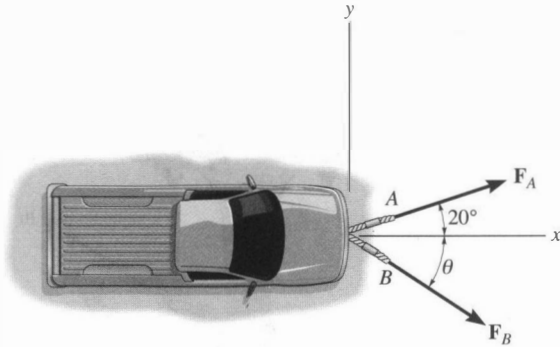
Prob. 2-18

2-19. Si $F_1 = F_2 = 30$ lb, determine los ángulos θ y ϕ de manera que la fuerza resultante esté dirigida a lo largo del eje x positivo y tenga una magnitud $F_R = 20$ lb.



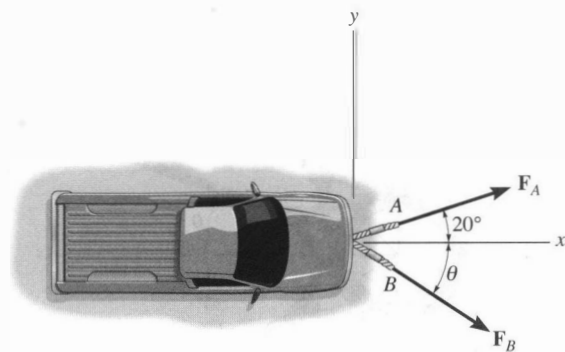
Prob. 2-19

*2-20. El camión es jalado usando dos cuerdas. Determine la magnitud de las fuerzas F_A y F_B que deben actuar en las cuerdas para desarrollar una fuerza resultante de 950 N dirigida a lo largo del eje x positivo. Considere $\theta = 50^\circ$.



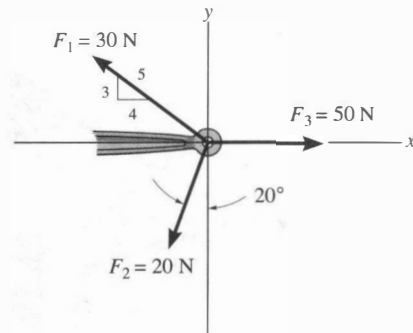
Prob. 2-20

2-21. El camión va a ser jalado usando dos cuerdas. Si la fuerza resultante va a ser de 950 N, dirigida a lo largo del eje x positivo, determine las magnitudes de las fuerzas F_A y F_B que actúan en cada cuerda y el ángulo θ de F_B de manera que la magnitud de F_B sea un *mínimo*. F_A actúa a 20° desde el eje x , como se muestra.



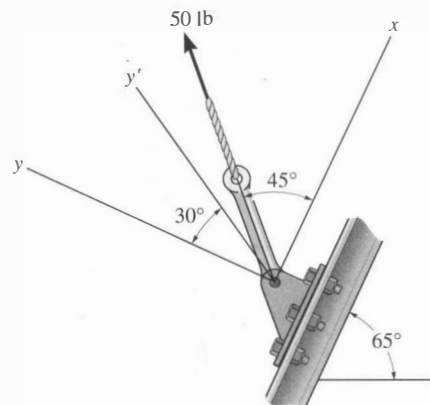
Prob. 2-21

2-22. Determine la magnitud y la dirección de la resultante $F_R = F_1 + F_2 + F_3$ de las tres fuerzas encontrando primero la resultante $F' = F_1 + F_2$, y formando luego $F_R = F' + F_3$.



Probs. 2-22/23

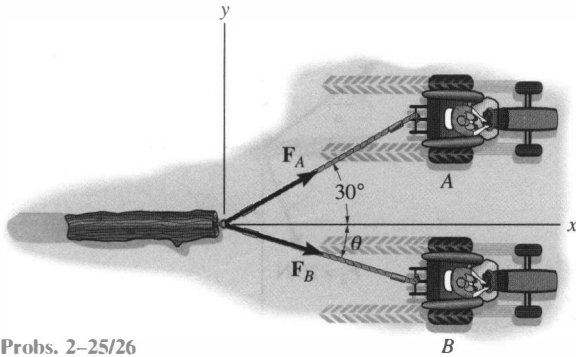
*2-24. Resuelva la fuerza de 50 lb en componentes que actúen a lo largo (a) de los ejes x y y , y (b) a lo largo de los ejes x' y y' .



Prob. 2-24

2-25. El tronco de un árbol es remolcado por dos tractores A y B . Determine la magnitud de las dos fuerzas de remolque F_A y F_B si se requiere que la fuerza resultante tenga una magnitud $F_R = 10$ kN y esté dirigida a lo largo del eje x . Considere $\theta = 15^\circ$.

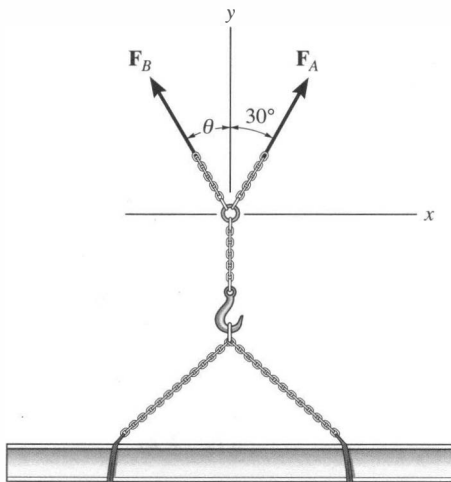
2-26. Si la resultante F_R de las dos fuerzas que actúan sobre el tronco debe estar dirigida a lo largo del eje x positivo y tener una magnitud de 10 kN, determine el ángulo θ del cable unido a B , hágalo en forma tal que la fuerza F_B en este cable sea mínima. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza en cada cable para esta situación?



Probs. 2-25/26

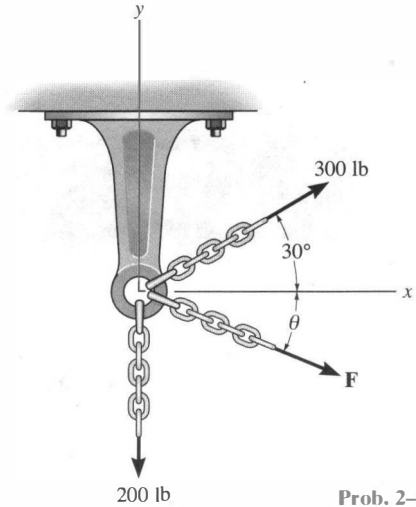
2-27. La viga va a ser levantada usando dos cadenas. Determine las magnitudes de las fuerzas F_A y F_B sobre cada cadena para que desarrollen una fuerza resultante de 600 N dirigida a lo largo del eje y positivo. Considere $\theta = 45^\circ$.

*2-28. La viga va a ser levantada usando dos cadenas. Si la fuerza resultante debe ser de 600 N dirigida a lo largo del eje y positivo, determine las magnitudes de las fuerzas F_A y F_B sobre cada cadena y la orientación θ de F_B de manera que la magnitud de F_B sea mínima. F_A actúa a 30° desde el eje y como se muestra.



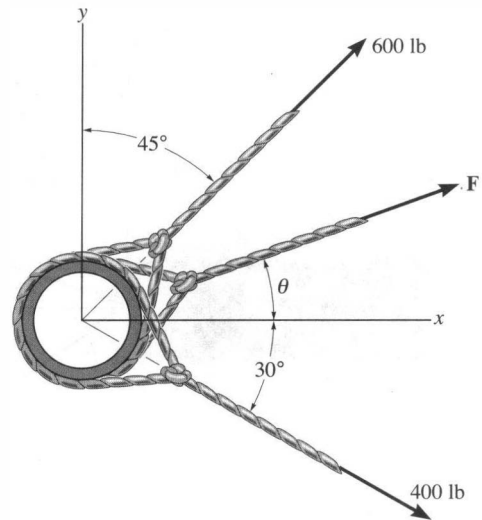
Probs. 2-27/28

2-29. Tres cadenas actúan sobre la ménsula en forma tal que generan una fuerza resultante con magnitud de 500 lb. Si dos de las cadenas están sometidas a fuerzas conocidas, como se muestra, determine la orientación θ de la tercera cadena, medida en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje x positivo, de manera que la magnitud de la fuerza F en esta cadena sea mínima. Todas las fuerzas se encuentran en el plano $x-y$. ¿Cuál es la magnitud de F ? *Sugerencia:* Encuentre primero la resultante de las dos fuerzas conocidas. La fuerza F actúa en esta dirección.



Prob. 2-29

2-30. Tres cables jalan el tubo generando una fuerza resultante con magnitud de 900 lb. Si dos de los cables están sometidos a fuerzas conocidas, como se muestra en la figura, determine la dirección θ del tercer cable de manera que la magnitud de la fuerza F en este cable sea mínima. Todas las fuerzas se encuentran en el plano $x-y$. ¿Cuál es la magnitud de F ? *Sugerencia:* Encuentre primero la resultante de las dos fuerzas conocidas.



Prob. 2-30

2.4 Suma de un sistema de fuerzas coplanares

Cuando tiene que obtenerse la resultante de más de dos fuerzas, es más fácil encontrar las componentes de cada fuerza a lo largo de ejes especificados, sumar esas componentes algebraicamente, y luego formar la resultante, en vez de formar la resultante de las fuerzas por aplicación sucesiva de la ley del paralelogramo como se vio en la sección 2.3.

En esta sección resolveremos cada fuerza en sus componentes rectangulares \mathbf{F}_x y \mathbf{F}_y , las cuales se encuentran a lo largo de los ejes x y y , respectivamente, como se ve en la figura 2-14a. Aunque los ejes son horizontal y vertical, por lo general pueden estar dirigidos con cualquier inclinación, siempre que permanezcan perpendiculares entre sí, como en la figura 2-14b. En todo caso, por la ley del paralelogramo, requerimos que

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$$

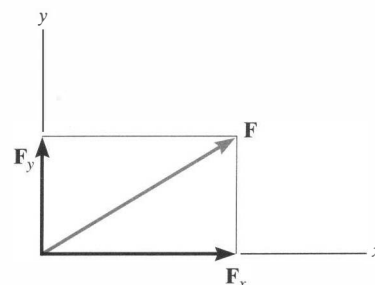
y

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}'_x + \mathbf{F}'_y$$

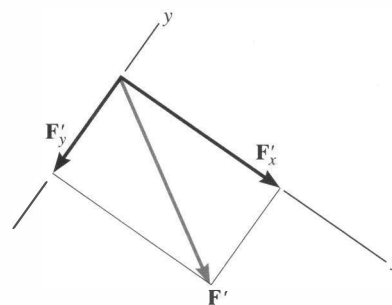
Como se muestra en la figura 2-14, el sentido de cada componente de fuerza está representado *gráficamente* por la *cabeza de la flecha*. Sin embargo, en un trabajo *analítico* debemos establecer cierta notación para representar el sentido de las componentes rectangulares. Esto puede hacerse de dos maneras.

Notación escalar. Como los ejes x y y tienen asignadas direcciones positiva y negativa, la magnitud y el sentido direccional de las componentes rectangulares de una fuerza pueden expresarse en términos de *escalares algebraicos*. Por ejemplo, las componentes de \mathbf{F} en la figura 2-14a pueden ser representadas por escalares positivos F_x y F_y , ya que sus sentidos de dirección son a lo largo de los ejes x y y *positivos*, respectivamente. De manera similar, las componentes de \mathbf{F}' en la figura 2-14b son F'_x y $-F'_y$. Aquí la componente y es negativa, ya que \mathbf{F}'_y está dirigida a lo largo del eje y negativo.

Es importante tener en mente que esta notación escalar se usa sólo para fines de cálculo, no para representaciones gráficas en las figuras. A lo largo de este libro, la *cabeza de un vector flecha* en cualquier figura indica el sentido del vector *gráficamente*; los signos algebraicos no se usan para este fin. Así, los vectores en las figuras 2-14a y 2-14b están designados usando notación en negritas.* Siempre que se escriben símbolos en tipos cursivos cerca de flechas de vector en figuras, indican la *magnitud* del vector, la cual *siempre* es una cantidad *positiva*.



(a)



(b)

Fig. 2-14

*Los signos negativos se usan sólo en figuras con notación en negritas cuando muestran parejas de vectores iguales pero opuestos, como en la figura 2-2.

Notación vectorial cartesiana. También es posible representar las componentes de una fuerza en términos de vectores unitarios cartesianos. Cuando hacemos esto, los métodos del álgebra vectorial son más fáciles de aplicar, y veremos que esto resulta particularmente conveniente en la resolución de problemas tridimensionales.

En dos dimensiones, los *vectores unitarios cartesianos* \mathbf{i} y \mathbf{j} se usan para designar las *direcciones* de los ejes x y y , respectivamente, figura 2-15a.* Esos vectores tienen una magnitud adimensional de la unidad y sus sentidos (o cabeza de flecha) serán descritos analíticamente por un signo más o uno menos, dependiendo de si señalan a lo largo de los ejes x o y positivos o negativos.

Como se muestra en la figura 2-15a, la *magnitud* de cada componente de \mathbf{F} es *siempre una cantidad positiva*, la cual está representada por los escalares (positivos) F_x y F_y . Por tanto, una vez establecida una notación para representar la magnitud y la dirección de cada componente vectorial, podemos expresar \mathbf{F} en la figura 2-15a como el *vector cartesiano*,

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}$$

De la misma manera, \mathbf{F}' en la figura 2-15b puede ser expresado como

$$\mathbf{F}' = F'_x \mathbf{i} + F'_y (-\mathbf{j})$$

o simplemente

$$\mathbf{F}' = F'_x \mathbf{i} - F'_y \mathbf{j}$$

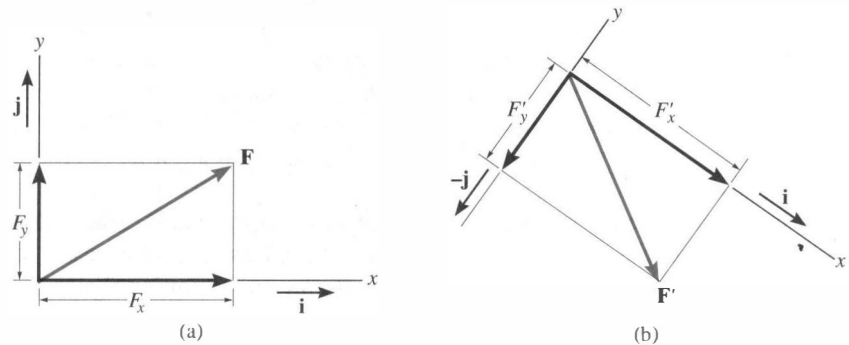


Fig. 2-15

*En trabajos a mano, generalmente los vectores se indican utilizando un acento circunflejo, por ejemplo: \hat{i} y \hat{j} .

Resultantes de fuerzas coplanares. Cualquiera de los dos métodos descritos puede ser usado para determinar la resultante de varias *fuerzas coplanares*. Para hacer esto, cada fuerza es resuelta primero en sus componentes x y y , y luego las componentes respectivas son sumadas usando *álgebra escalar* ya que son colineales. La fuerza resultante se forma entonces sumando las resultantes de las componentes x y y mediante la ley del paralelogramo. Por ejemplo, considere las tres fuerzas concurrentes en la figura 2-16a, que tienen componentes x y y como se muestra en la figura 2-16b. Para resolver este problema usando *notación vectorial cartesiana*, cada fuerza se representa primero como un vector cartesiano, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j} \\ \mathbf{F}_2 &= -F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} \\ \mathbf{F}_3 &= F_{3x}\mathbf{i} - F_{3y}\mathbf{j} \end{aligned}$$

El vector resultante es, por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \\ &= F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j} - F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} + F_{3x}\mathbf{i} - F_{3y}\mathbf{j} \\ &= (F_{1x} - F_{2x} + F_{3x})\mathbf{i} + (F_{1y} + F_{2y} - F_{3y})\mathbf{j} \\ &= (F_{Rx})\mathbf{i} + (F_{Ry})\mathbf{j} \end{aligned}$$

Si se usa *notación escalar*, entonces, a partir de la figura 2-16b, como x es positiva a la derecha y y es positiva hacia arriba, tenemos

$$\begin{aligned} (\rightarrow) \quad & F_{Rx} = F_{1x} - F_{2x} + F_{3x} \\ (+\uparrow) \quad & F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y} \end{aligned}$$

Esos resultados son los *mismos* que las componentes \mathbf{i} y \mathbf{j} de \mathbf{F}_R determinadas antes.

En el caso general, las componentes x y y de la resultante de cualquier número de fuerzas coplanares pueden ser representadas simbólicamente por medio de la suma algebraica de las componentes x y y de todas las fuerzas, es decir,

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= \sum F_x \\ F_{Ry} &= \sum F_y \end{aligned} \quad (2-1)$$

Al aplicar estas ecuaciones, es importante usar la *convención de signos* establecida para las componentes; esto es, las componentes que tienen un sentido a lo largo de los ejes coordenados positivos son consideradas como escalares positivos, mientras que aquellas que tienen un sentido a lo largo de los ejes coordenados negativos son consideradas escalares negativos. Si se sigue esta convención, entonces los signos de las componentes resultantes especificarán el sentido de esas componentes. Por ejemplo, un resultado positivo indica que la componente tiene un sentido direccional en la dirección coordenada positiva.

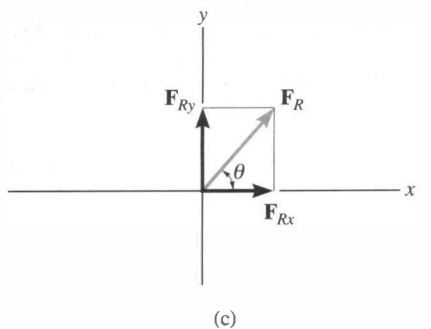
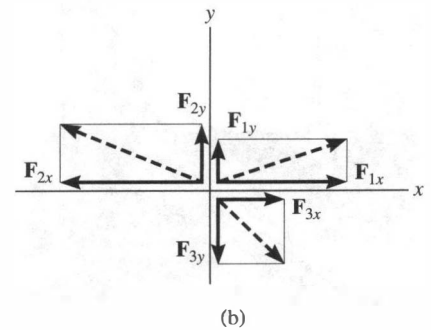
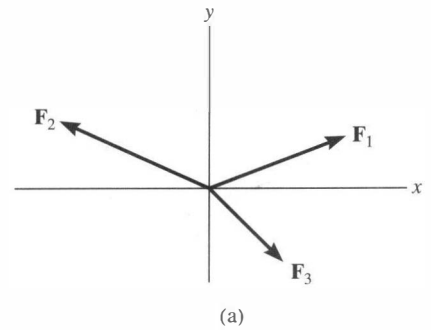


Fig. 2-16

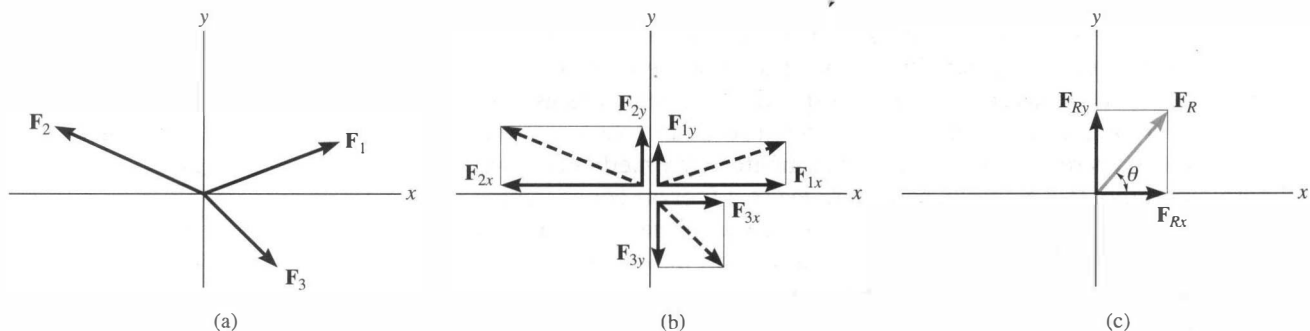
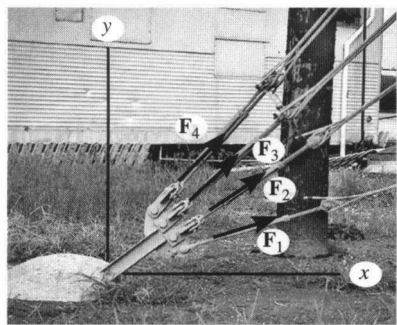


Fig. 2-16



La fuerza resultante de las cuatro fuerzas en los cables que actúan sobre el muerto de soporte pueden ser determinadas sumando algebraicamente por separado las componentes x y y de cada fuerza de cable. Esta resultante \mathbf{F}_R produce el *mismo efecto de extracción* sobre el muerto que los cuatro cables.

Una vez que se determinen las componentes de la resultante, pueden trazarse en un croquis a lo largo de los ejes x y y en sus propias direcciones, y la fuerza resultante puede ser determinada con la suma vectorial, como se muestra en la figura 2-16c. A partir de este croquis, la magnitud de \mathbf{F}_R se encuentra entonces con el teorema de Pitágoras; esto es,

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

También, el ángulo θ de dirección, que especifica la orientación de la fuerza, se determina por trigonometría:

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right|$$

Los conceptos anteriores están ilustrados numéricamente en los ejemplos que siguen.

PUNTOS IMPORTANTES

- La resultante de varias fuerzas coplanares puede ser determinada fácilmente si se establece un sistema coordenado x , y y las fuerzas se resuelven a lo largo de los ejes.
- La dirección de cada fuerza está especificada por el ángulo que forma su línea de acción con uno de los ejes, o por medio de un triángulo de pendiente.
- La orientación de los ejes x y y es arbitraria, y sus direcciones positivas pueden ser especificadas mediante los vectores unitarios cartesianos \mathbf{i} y \mathbf{j} .
- Las componentes x y y de la *fuerza resultante* son simplemente la suma algebraica de las componentes de todas las fuerzas coplanares.
- La magnitud de la fuerza resultante se determina mediante el teorema de Pitágoras, y cuando las componentes son trazadas sobre los ejes x y y , la dirección puede ser determinada por trigonometría.

EJEMPLO 2.5

Determine las componentes x y y de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 que actúan sobre la barra mostrada en la figura 2-17a. Exprese cada fuerza como un vector cartesiano.

Solución

Notación escalar. Por la ley del paralelogramo, \mathbf{F}_1 se resuelve en sus componentes x y y , figura 2-17b. La magnitud de cada componente se determina por trigonometría. Como \mathbf{F}_{1x} actúa en la dirección $-x$, y \mathbf{F}_{1y} actúa en la dirección $+y$, tenemos

$$F_{1x} = -200 \operatorname{sen} 30^\circ \text{ N} = -100 \text{ N} = 100 \text{ N} \leftarrow \quad \text{Resp.}$$

$$F_{1y} = 200 \cos 30^\circ \text{ N} = 173 \text{ N} = 173 \text{ N} \uparrow \quad \text{Resp.}$$

La fuerza \mathbf{F}_2 se resuelve en sus componentes x y y como se muestra en la figura 2-17c. Aquí se indica la *pendiente* de la línea de acción de la fuerza. A partir de este “triángulo de pendiente” podríamos obtener el ángulo θ , por ejemplo, $\theta = \tan^{-1}(\frac{5}{12})$, y luego proceder a determinar las magnitudes de las componentes de la misma manera que para \mathbf{F}_1 . Sin embargo, un método más fácil consiste en usar partes proporcionales de triángulos semejantes, por ejemplo,

$$\frac{F_{2x}}{260 \text{ N}} = \frac{12}{13} \quad F_{2x} = 260 \text{ N} \left(\frac{12}{13} \right) = 240 \text{ N}$$

De manera similar,

$$F_{2y} = 260 \text{ N} \left(\frac{5}{13} \right) = 100 \text{ N}$$

Advierta que la magnitud de la *componente horizontal*, F_{2x} , se obtuvo multiplicando la magnitud de la fuerza por la razón del *cateto horizontal* del triángulo de pendiente dividido entre la hipotenusa, mientras que la magnitud de la *componente vertical*, F_{2y} , se obtuvo multiplicando la magnitud de la fuerza por la razón del *cateto vertical* dividido entre la hipotenusa. Por tanto, usando notación escalar,

$$F_{2x} = 240 \text{ N} = 240 \text{ N} \rightarrow \quad \text{Resp.}$$

$$F_{2y} = -100 \text{ N} = 100 \text{ N} \downarrow \quad \text{Resp.}$$

Notación vectorial cartesiana. Una vez determinadas las magnitudes y direcciones de las componentes de cada fuerza, podemos expresar cada fuerza como un vector cartesiano.

$$\mathbf{F}_1 = \{-100\mathbf{i} + 173\mathbf{j}\} \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$\mathbf{F}_2 = \{240\mathbf{i} - 100\mathbf{j}\} \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

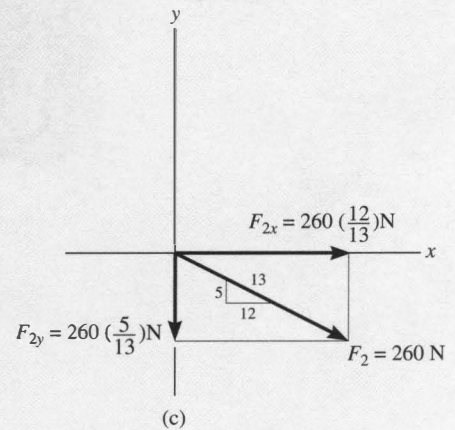
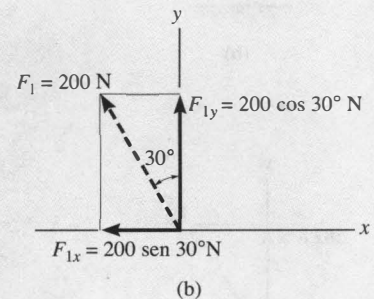
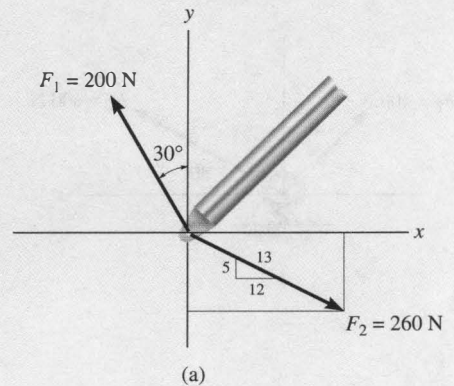


Fig. 2-17

EJEMPLO 2.6

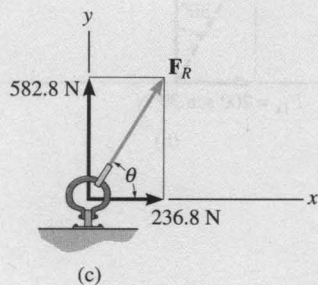
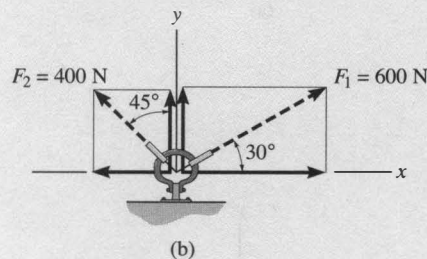
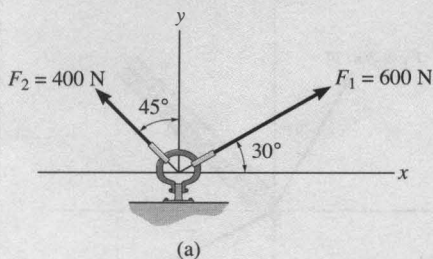


Fig. 2-18

La armella que se muestra en la figura 2-18a está sometida a las dos fuerzas F_1 y F_2 . Determine la magnitud y la orientación de la fuerza resultante.

Solución I

Notación escalar. Este problema puede ser resuelto usando la ley del paralelogramo; sin embargo, aquí resolveremos cada fuerza en sus componentes x y y , figura 2-18b, y sumaremos esas componentes algebraicamente. Indicando el sentido “positivo” de las componentes x y y a un lado de cada ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} \rightarrow F_{Rx} &= \Sigma F_x; & F_{Rx} &= 600 \cos 30^\circ \text{ N} - 400 \sin 45^\circ \text{ N} \\ & & &= 236.8 \text{ N} \rightarrow \\ +\uparrow F_{Ry} &= \Sigma F_y; & F_{Ry} &= 600 \sin 30^\circ \text{ N} + 400 \cos 45^\circ \text{ N} \\ & & &= 582.8 \text{ N} \uparrow \end{aligned}$$

La fuerza resultante, mostrada en la figura 2-18c, tiene una *magnitud* de

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{(236.8 \text{ N})^2 + (582.8 \text{ N})^2} \\ &= 629 \text{ N} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

A partir de la suma vectorial, figura 2-18c, el ángulo director θ es

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{582.8 \text{ N}}{236.8 \text{ N}}\right) = 67.9^\circ \quad \text{Resp.}$$

Solución II

Notación vectorial cartesiana. A partir de la figura 2-18b, cada fuerza es expresada como un vector cartesiano

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \{600 \cos 30^\circ \mathbf{i} + 600 \sin 30^\circ \mathbf{j}\} \text{ N} \\ \mathbf{F}_2 &= \{-400 \sin 45^\circ \mathbf{i} + 400 \cos 45^\circ \mathbf{j}\} \text{ N} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (600 \cos 30^\circ \text{ N} - 400 \sin 45^\circ \text{ N})\mathbf{i} \\ &\quad + (600 \sin 30^\circ \text{ N} + 400 \cos 45^\circ \text{ N})\mathbf{j} \\ &= \{236.8\mathbf{i} + 582.8\mathbf{j}\} \text{ N} \end{aligned}$$

La magnitud y la dirección de \mathbf{F}_R se determinan de la misma manera que antes.

Comparando los dos métodos de solución, advierta que el uso de la notación escalar es más eficiente ya que las componentes pueden encontrarse *directamente*, sin tener que expresar primero cada fuerza como un vector cartesiano antes de sumar las componentes. Luego mostraremos que el análisis con vectores cartesianos es muy conveniente para la resolución de problemas tridimensionales.

EJEMPLO 2.7

El extremo O de la barra mostrada en la figura 2–19a está sometido a tres fuerzas coplanares concurrentes. Determine la magnitud y la orientación de la fuerza resultante.

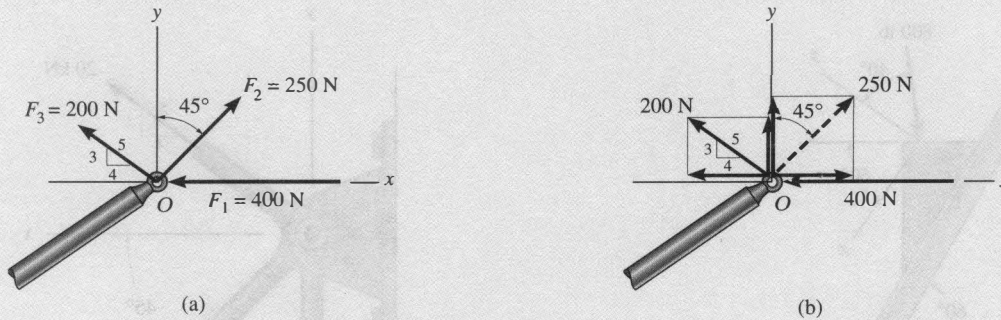


Fig. 2–19

Solución

Cada fuerza es resuelta en sus componentes x y y , como se muestra en la figura 2–19b. Al sumar las componentes x , tenemos

$$\begin{aligned} \rightarrow F_{Rx} &= \Sigma F_x; & F_{Rx} &= -400 \text{ N} + 250 \text{ sen } 45^\circ \text{ N} - 200\left(\frac{4}{5}\right) \text{ N} \\ & & &= -383.2 \text{ N} = 383.2 \text{ N} \leftarrow \end{aligned}$$

El signo negativo indica que F_{Rx} actúa hacia la izquierda, es decir, en la dirección x negativa como lo indica la flecha. Al sumar las componentes y resulta

$$\begin{aligned} +\uparrow F_{Ry} &= \Sigma F_y; & F_{Ry} &= 250 \text{ cos } 45^\circ \text{ N} + 200\left(\frac{3}{5}\right) \text{ N} \\ & & &= 296.8 \text{ N} \uparrow \end{aligned}$$

La fuerza resultante, mostrada en la figura 2–19c, tiene una *magnitud* de

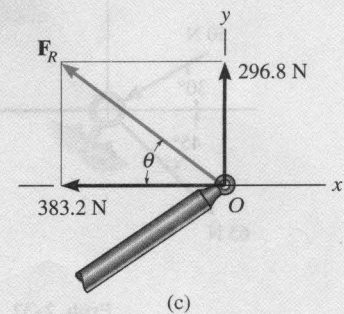
$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{(-383.2 \text{ N})^2 + (296.8 \text{ N})^2} \\ &= 485 \text{ N} \end{aligned}$$

Resp.

A partir de la suma vectorial mostrada en la figura 2–19c, el ángulo director θ es

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{296.8}{383.2}\right) = 37.8^\circ$$

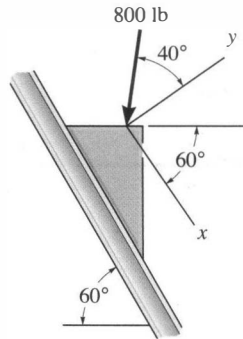
Resp.



Advierta qué conveniente es usar este método, en comparación con dos aplicaciones de la ley del paralelogramo.

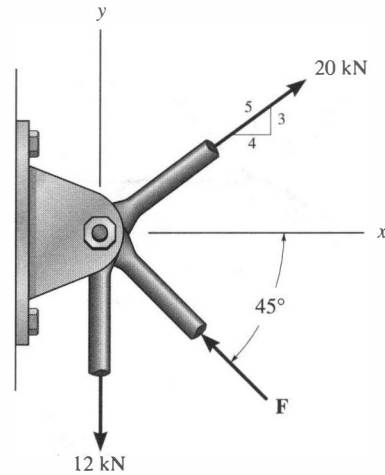
PROBLEMAS

2-31. Determine las componentes x y y de la fuerza de 800 lb.



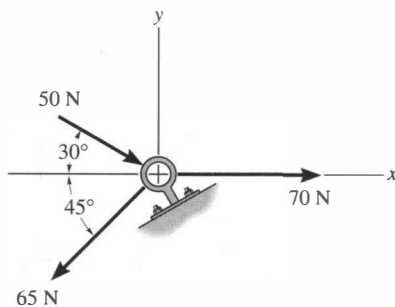
Prob. 2-31

2-33. Determine la magnitud de la fuerza \mathbf{F} de manera que la resultante \mathbf{F}_R de las tres fuerzas sea tan pequeña como sea posible.



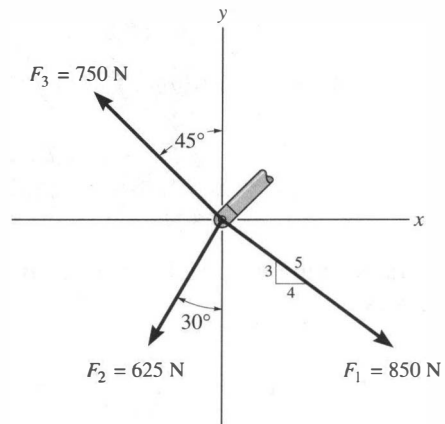
Prob. 2-33

*2-32. Determine la magnitud de la fuerza resultante así como su dirección, medida ésta en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje x positivo.



Prob. 2-32

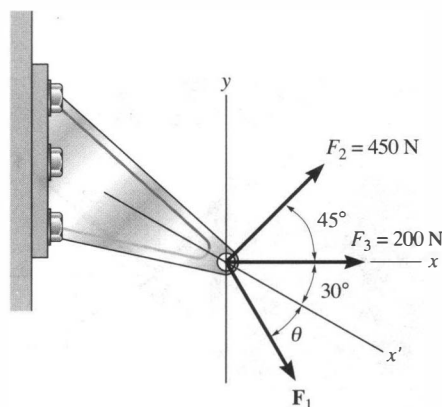
2-34. Determine la magnitud de la fuerza resultante así como su dirección, medida ésta en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje x positivo.



Prob. 2-34

2-35. Tres fuerzas actúan sobre la ménsula. Determine la magnitud y la dirección θ de \mathbf{F}_1 de manera que la fuerza resultante esté dirigida a lo largo del eje x' positivo y tenga una magnitud de 1 kN.

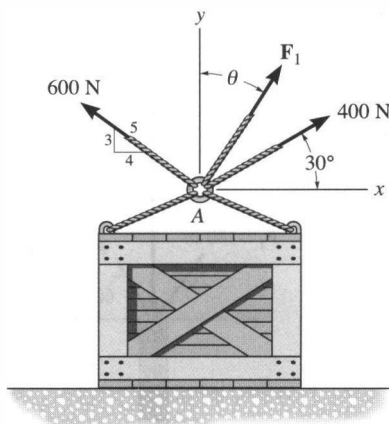
*2-36. Si $F_1 = 300$ N y $\theta = 20^\circ$, determine la magnitud y la dirección, medida ésta en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje x' , de la fuerza resultante de las tres fuerzas que actúan sobre la ménsula.



Probs. 2-35/36

2-37. Determine la magnitud y la dirección θ de \mathbf{F}_1 de manera que la fuerza resultante esté dirigida verticalmente hacia arriba y tenga una magnitud de 800 N.

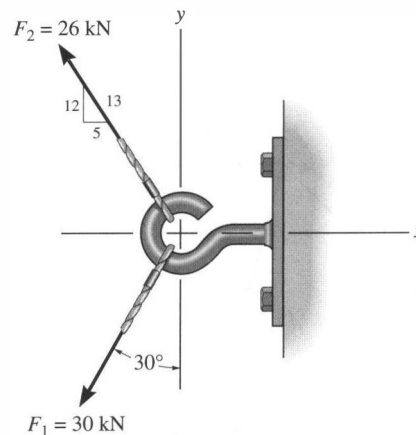
2-38. Determine la magnitud y la dirección, medida ésta en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje x positivo, de la fuerza resultante de las tres fuerzas que actúan sobre el anillo A . Considere $F_1 = 500$ N y $\theta = 20^\circ$.



Probs. 2-37/38

2-39. Expresé \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 como vectores cartesianos.

*2-40. Determine la magnitud de la fuerza resultante así como su dirección medida en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje x positivo.



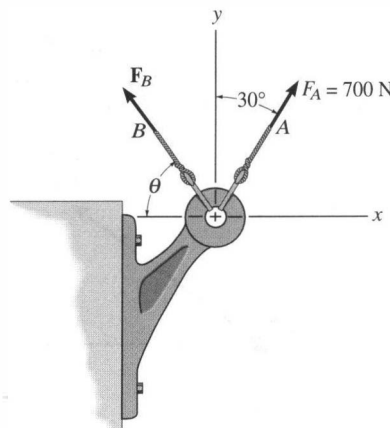
Probs. 2-39/40

2-41. Resuelva el problema 2-1 sumando los componentes rectangulares o x, y de las fuerzas para obtener la fuerza resultante.

2-42. Resuelva el problema 2-22 sumando los componentes rectangulares o x, y de las fuerzas para obtener la fuerza resultante.

2-43. Determine la magnitud y la orientación θ de \mathbf{F}_B de manera que la fuerza resultante esté dirigida a lo largo del eje y positivo y tenga una magnitud de 1500 N.

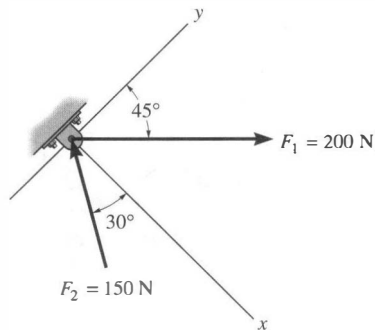
*2-44. Determine la magnitud y la orientación, medida ésta en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje y positivo, de la fuerza resultante que actúa sobre la ménsula, si $F_B = 600$ N y $\theta = 20^\circ$.



Probs. 2-43/44

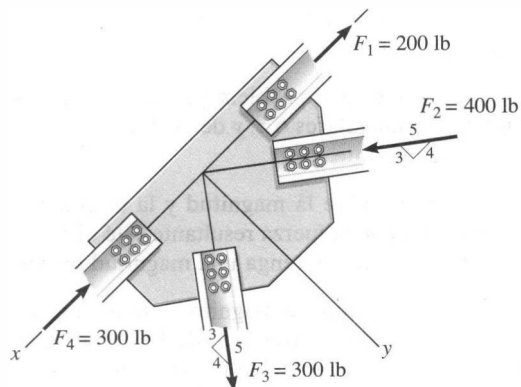
2-45. Determine las componentes x y y de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 .

2-46. Determine la magnitud de la fuerza resultante así como su dirección, medida ésta en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje x positivo.



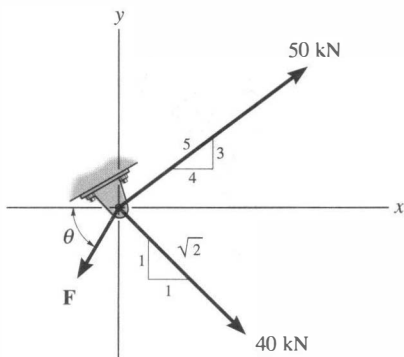
Probs. 2-45/46

2-47. Determine las componentes x y y de cada fuerza que actúa sobre la *placa de nudo* de la armadura de puente. Muestre que la fuerza resultante es cero.



Prob. 2-47

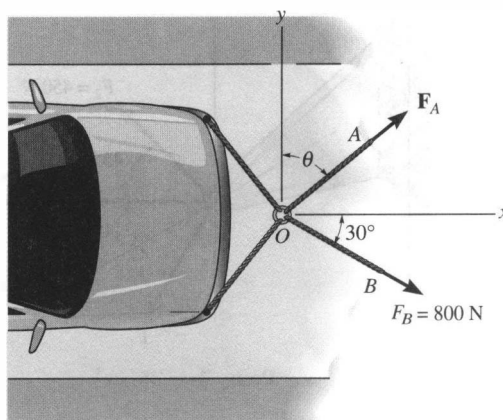
*2-48. Si $\theta = 60^\circ$ y $F = 20$ kN, determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección medida en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje x positivo.



Prob. 2-48

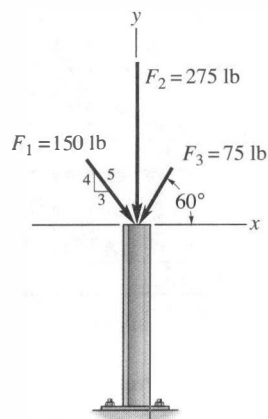
2-49. Determine la magnitud y la dirección θ de \mathbf{F}_A de manera que la fuerza resultante esté dirigida a lo largo del eje x positivo y tenga una magnitud de 1250 N.

2-50. Determine la magnitud y la dirección, medida ésta en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje x positivo, de la fuerza resultante que actúa sobre el anillo en O , si $F_A = 750$ N y $\theta = 45^\circ$.



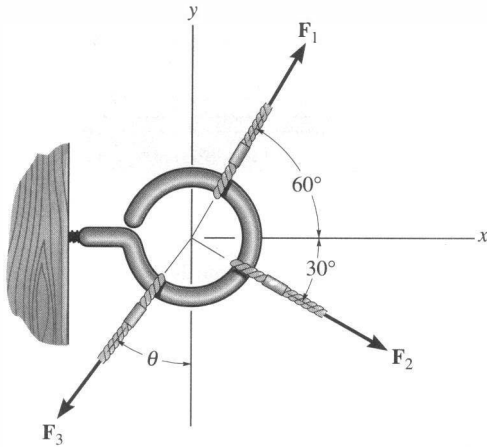
Probs. 2-49/50

2-51. Expresar cada una de las tres fuerzas que actúan sobre la columna en forma vectorial cartesiana y calcular la magnitud de la fuerza resultante.



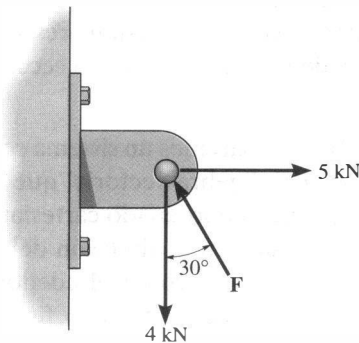
Prob. 2-51

*2-52. Las tres fuerzas concurrentes que actúan sobre la armella roscada producen una fuerza resultante $\mathbf{F}_R = 0$. Si $F_2 = \frac{2}{3}F_1$ y \mathbf{F}_1 debe estar a 90° de \mathbf{F}_2 como se muestra, determine la magnitud requerida de F_3 expresada en términos de F_1 y del ángulo θ .



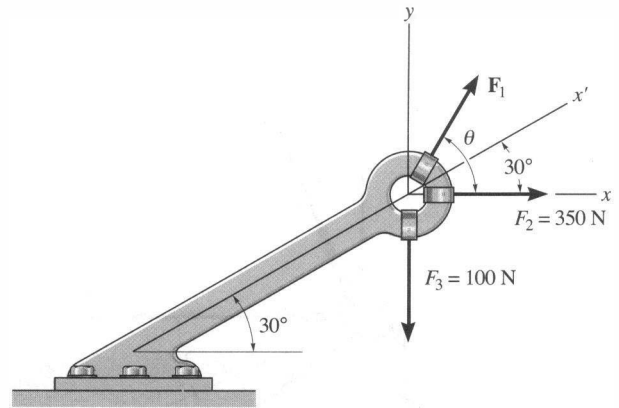
Prob. 2-52

2-53. Determine la magnitud de la fuerza \mathbf{F} de manera que la resultante \mathbf{F}_R de las tres fuerzas sea tan pequeña como sea posible. ¿Cuál es la magnitud mínima de \mathbf{F}_R ?



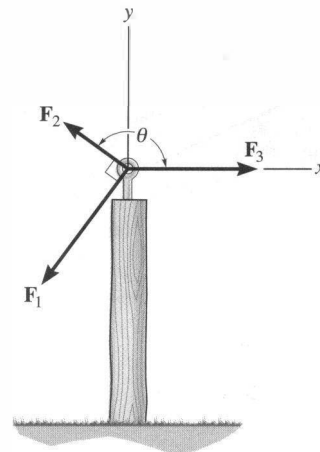
Prob. 2-53

2-54. Exprese cada una de las tres fuerzas que actúan sobre el soporte en forma vectorial cartesiana con respecto a los ejes x y y . Determine la magnitud y la dirección θ de \mathbf{F}_1 de manera que la fuerza resultante esté dirigida a lo largo del eje x' positivo y tenga una magnitud de $F_R = 600\text{ N}$.



Prob. 2-54

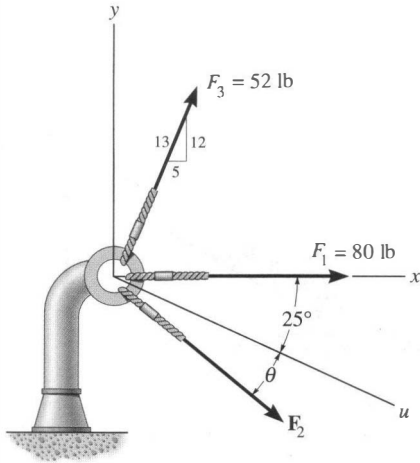
2-55. Las tres fuerzas concurrentes que actúan sobre el poste producen una fuerza resultante $\mathbf{F}_R = 0$. Si $F_2 = \frac{1}{2}F_1$, y \mathbf{F}_1 está a 90° de \mathbf{F}_2 como se muestra, determine la magnitud F_3 requerida expresada en términos de F_1 y del ángulo θ .



Prob. 2-55

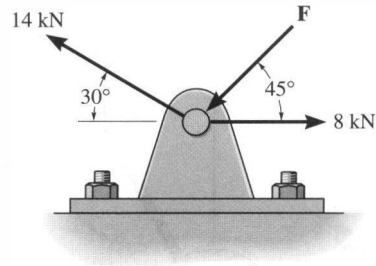
*2-56. Tres fuerzas actúan sobre el poste. Determine la magnitud y la orientación θ de F_2 para que la fuerza resultante esté dirigida a lo largo del eje u positivo y tenga una magnitud de 50 lb.

2-57. Si $F_2 = 150$ lb y $\theta = 55^\circ$, determine la magnitud y la orientación, medida ésta en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje x positivo, de la fuerza resultante de las tres fuerzas que actúan sobre el poste.



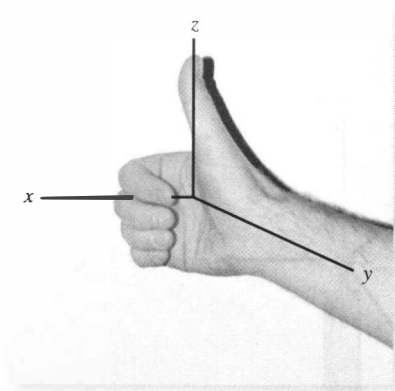
Probs. 2-56/57

2-58. Determine la magnitud de la fuerza F de manera que la fuerza resultante de las tres fuerzas sea tan pequeña como sea posible. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza resultante?



Prob. 2-58

2.5 Vectores cartesianos



Sistema coordenado derecho.

Fig. 2-20

Las operaciones del álgebra vectorial, al aplicarse a la resolución de problemas en *tres dimensiones*, se simplifican considerablemente cuando los vectores se representan primero en forma vectorial cartesiana. En esta sección presentaremos un método general para hacer esto; luego, en la siguiente sección, aplicaremos este método a la resolución de problemas que impliquen la suma de fuerzas. Aplicaciones similares serán ilustradas para los vectores de posición y de momento dados en secciones posteriores del libro.

Sistema coordenado derecho. Usaremos un sistema coordenado derecho para desarrollar la teoría del álgebra vectorial que sigue. Se dice que un sistema rectangular, o sistema coordenado cartesiano, es *derecho* si el pulgar de la mano derecha señala en la dirección del eje z positivo cuando los dedos de la mano derecha se enrollan alrededor de este eje y están dirigidos del eje x positivo hacia el eje y positivo, figura 2-20. Además, de acuerdo con esta regla, el eje z para un problema bidimensional como el de la figura 2-19 estará dirigido hacia fuera, perpendicularmente a la página.

Componentes rectangulares de un vector. Un vector \mathbf{A} puede tener una, dos o tres componentes rectangulares a lo largo de los ejes coordenados x, y, z , dependiendo de cómo esté orientado con respecto a los ejes. En general, cuando \mathbf{A} está dirigido dentro de un octante del marco x, y, z , figura 2-21, entonces, mediante dos aplicaciones sucesivas de la ley del paralelogramo, podemos resolver el vector en componentes como $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}_z$ y luego $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$. Combinando estas ecuaciones, \mathbf{A} es representado por la suma vectorial de sus *tres* componentes rectangulares,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z \quad (2-2)$$

Vector unitario. La dirección de \mathbf{A} puede ser especificada usando un vector unitario. Este vector se llama así porque tiene una magnitud de 1. Si \mathbf{A} es un vector con una magnitud $A \neq 0$, entonces el vector unitario que tenga la *misma dirección* que \mathbf{A} se representa mediante

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} \quad (2-3)$$

De manera que

$$\mathbf{A} = A\mathbf{u}_A \quad (2-4)$$

Como \mathbf{A} es de un cierto tipo, por ejemplo, un vector fuerza, se acostumbra usar el conjunto apropiado de unidades para su descripción. La magnitud A también tiene este mismo conjunto de unidades; por tanto, a partir de la ecuación 2-3, el *vector unitario no tendrá dimensiones* ya que las unidades se cancelarán. La ecuación 2-4 indica, por tanto, que el vector \mathbf{A} puede ser expresado en términos de su magnitud y su dirección *separadamente*; esto es, A (un escalar positivo) define la *magnitud* de \mathbf{A} , y \mathbf{u}_A (un vector sin dimensiones) define la *dirección* y el sentido de \mathbf{A} , figura 2-22.

Vectores unitarios cartesianos. En tres dimensiones, el conjunto de vectores unitarios cartesianos, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, se usa para designar las direcciones de los ejes x, y, z , respectivamente. Como se indicó en la sección 2.4, el *sentido* (o cabeza de la flecha) de esos vectores será descrito analíticamente por un signo más o menos, dependiendo de si los vectores señalan a lo largo de los ejes x, y o z positivos o negativos. En la figura 2-23 se muestran los vectores unitarios cartesianos positivos.

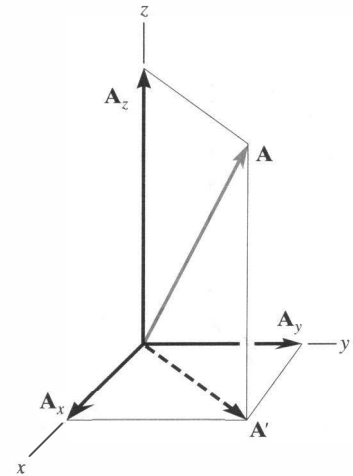


Fig. 2-21

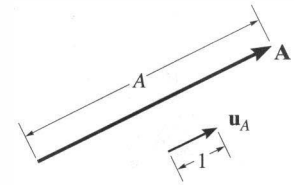


Fig. 2-22

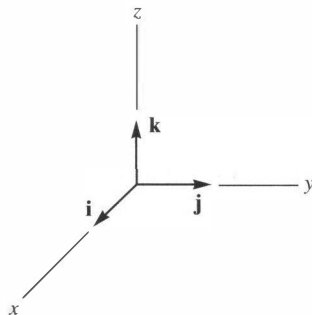


Fig. 2-23

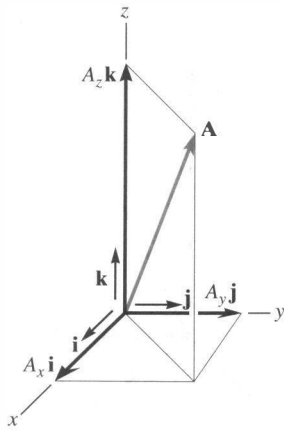


Fig. 2-24

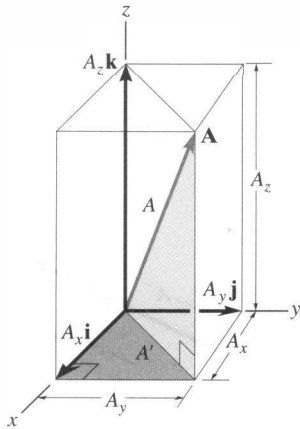


Fig. 2-25

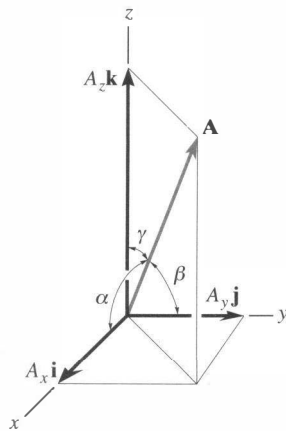


Fig. 2-26

Representación de un vector cartesiano. Como las tres componentes de \mathbf{A} en la ecuación 2-2 actúan en las direcciones positivas \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , figura 2-24, podemos escribir \mathbf{A} en forma vectorial cartesiana como

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad (2-5)$$

Existe una clara ventaja en escribir los vectores de esta manera. Advierta que la *magnitud* y la *dirección* de cada *componente vectorial* están *separadas*, y como resultado esto simplificará las operaciones del álgebra vectorial, particularmente en tres dimensiones.

Magnitud de un vector cartesiano. Siempre es posible obtener la magnitud de \mathbf{A} si está expresado en forma vectorial cartesiana. Como se muestra en la figura 2-25, a partir del triángulo recto coloreado, $A = \sqrt{A'^2 + A_z^2}$, y del triángulo recto sombreado, $A' = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$. Combinando estas ecuaciones resulta

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (2-6)$$

Por consiguiente, la magnitud de \mathbf{A} es igual a la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de sus componentes.

Dirección de un vector cartesiano. La *orientación* de \mathbf{A} es definida por los *ángulos coordenados de dirección* α , β y γ , medidos entre la *cola* de \mathbf{A} y los ejes x , y , z *positivos* localizados en la cola de \mathbf{A} , figura 2-26. Advierta que independientemente de hacia dónde esté dirigido \mathbf{A} , cada uno de esos ángulos estará entre 0° y 180° .

Para determinar α , β y γ , considere la proyección de \mathbf{A} sobre los ejes x , y , z , figura 2-27. Con referencia a los triángulos rectos coloreados en azul, mostrados en cada figura, tenemos

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A} \quad \cos \beta = \frac{A_y}{A} \quad \cos \gamma = \frac{A_z}{A} \quad (2-7)$$

Estos números se conocen como *cosenos directores* de \mathbf{A} . Una vez obtenidos, los ángulos directores coordenados α , β y γ , pueden ser determinados entonces mediante los cosenos inversos.

Una manera fácil de obtener los cosenos directores de \mathbf{A} es formar un vector unitario en la dirección de \mathbf{A} , ecuación 2-3. Si \mathbf{A} está expresado en forma vectorial cartesiana, $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ (Ecuación 2-5), entonces

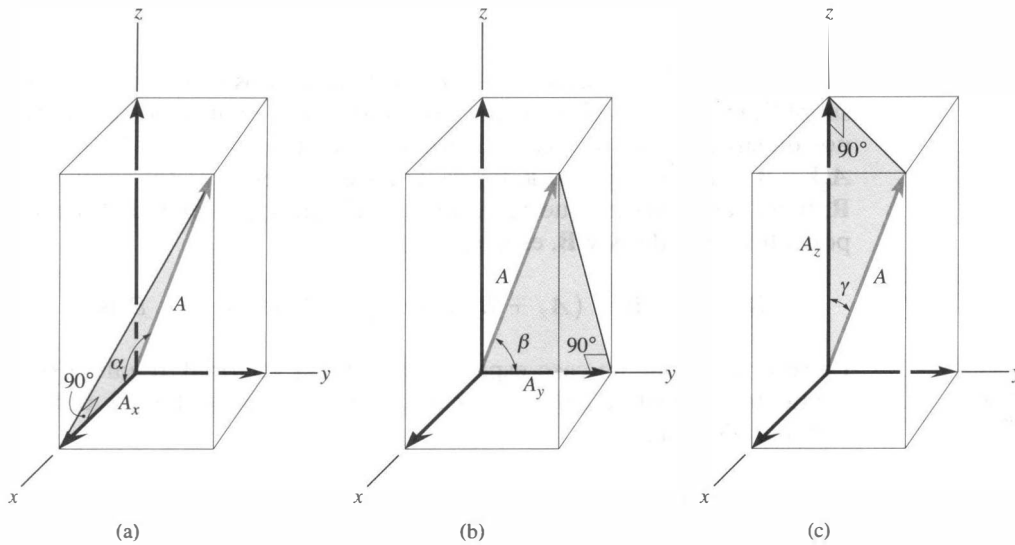


Fig. 2-27

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{A_x}{A} \mathbf{i} + \frac{A_y}{A} \mathbf{j} + \frac{A_z}{A} \mathbf{k} \quad (2-8)$$

donde $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ (Ecuación 2-6). Por comparación con las ecuaciones 2-7, se ve que las componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} de \mathbf{u}_A representan los cosenos directores de \mathbf{A} , esto es,

$$\mathbf{u}_A = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k} \quad (2-9)$$

Como la magnitud de un vector es igual a la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de las magnitudes de sus componentes, y \mathbf{u}_A tiene una magnitud de 1, a partir de la ecuación 2-9 puede formularse entonces una importante relación entre los cosenos directores como

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (2-10)$$

Si el vector \mathbf{A} se encuentra en un octante conocido, esta ecuación puede usarse para determinar uno de los ángulos coordenados de dirección si los otros dos son conocidos.

Finalmente, si la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de \mathbf{A} son dados, \mathbf{A} puede ser expresado en la forma vectorial cartesiana como

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A \mathbf{u}_A \\ &= A \cos \alpha \mathbf{i} + A \cos \beta \mathbf{j} + A \cos \gamma \mathbf{k} \\ &= A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2-11)$$

2.6 Suma y resta de vectores cartesianos

Las operaciones vectoriales de suma y resta de dos o más vectores se simplifican considerablemente si los vectores son expresados en términos de sus componentes cartesianas. Por ejemplo, si $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$, figura 2-28, entonces el vector resultante, \mathbf{R} , tiene componentes que representan las sumas escalares de las componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} de \mathbf{A} y \mathbf{B} , es decir,

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}$$

La resta vectorial, un caso especial de la suma vectorial, requiere simplemente una resta escalar de las respectivas componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} de \mathbf{A} o \mathbf{B} . Por ejemplo,

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x)\mathbf{i} + (A_y - B_y)\mathbf{j} + (A_z - B_z)\mathbf{k}$$

Sistemas de fuerzas concurrentes. Si el concepto anterior de suma vectorial es generalizado y aplicado a un sistema de varias fuerzas concurrentes, entonces la fuerza resultante es la suma vectorial de todas las fuerzas presentes en el sistema y puede escribirse como

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F} = \Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k} \quad (2-12)$$

Aquí, ΣF_x , ΣF_y , y ΣF_z representan las sumas algebraicas de las respectivas componentes x , y , z o \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} de cada fuerza presente en el sistema.

Los ejemplos que siguen ilustran numéricamente los métodos usados para aplicar la teoría anterior a la resolución de problemas que implican a la fuerza como una cantidad vectorial.

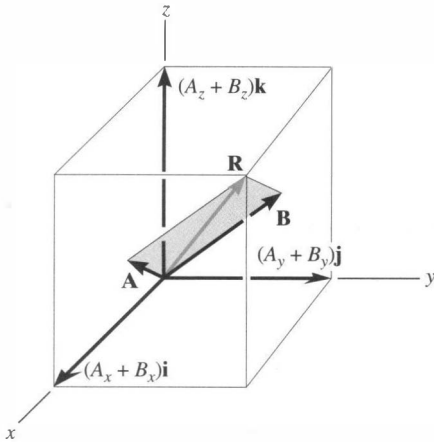


Fig. 2-28

La fuerza \mathbf{F} que la cuerda de amarre ejerce sobre el soporte O en el suelo, está dirigida a lo largo de la cuerda. Usando los ejes locales x , y , z , pueden medirse los ángulos coordenados de dirección α , β , γ . Los cosenos de sus valores forman las componentes de un vector unitario \mathbf{u} que actúa en la dirección de la cuerda. Si la fuerza tiene una magnitud F , entonces puede escribirse en forma vectorial cartesiana, como $\mathbf{F} = F\mathbf{u} = F \cos \alpha \mathbf{i} + F \cos \beta \mathbf{j} + F \cos \gamma \mathbf{k}$.



PUNTOS IMPORTANTES

- El análisis vectorial cartesiano se usa a menudo para resolver problemas en tres dimensiones.
- La dirección positiva de los ejes x, y, z se define mediante los vectores unitarios cartesianos $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, respectivamente.
- La *magnitud* de un vector cartesiano es $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.
- La *dirección* de un vector cartesiano se especifica usando ángulos coordenados de dirección que la cola del vector forma con los ejes x, y, z positivos, respectivamente. Las componentes del vector unitario $\mathbf{u} = \mathbf{A}/A$ representan los cosenos directores de α, β, γ . Sólo dos de los ángulos α, β, γ tienen que ser especificados. El tercer ángulo se determina a partir de la relación $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.
- Para encontrar la *resultante* de un sistema concurrente de fuerzas, exprese cada fuerza como un vector cartesiano y sume las componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ de todas las fuerzas del sistema.

EJEMPLO 2.8

Expresé la fuerza \mathbf{F} mostrada en la figura 2–29 como un vector cartesiano.

Solución

Como sólo se especifican dos ángulos coordenados de dirección, el tercer ángulo α debe ser determinado con la ecuación 2–10; es decir,

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1 \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ &= 1 \\ \cos \alpha &= \sqrt{1 - (0.5)^2 - (0.707)^2} = \pm 0.5\end{aligned}$$

Por consiguiente, existen dos posibilidades,

$$\alpha = \cos^{-1}(0.5) = 60^\circ \quad \text{o} \quad \alpha = \cos^{-1}(-0.5) = 120^\circ$$

Por inspección de la figura 2–29, es necesario que $\alpha = 60^\circ$, ya que \mathbf{F}_x tiene la dirección $+x$.

Usando la ecuación 2–11, con $F = 200$ N, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= F \cos \alpha \mathbf{i} + F \cos \beta \mathbf{j} + F \cos \gamma \mathbf{k} \\ &= (200 \cos 60^\circ \text{ N})\mathbf{i} + (200 \cos 60^\circ \text{ N})\mathbf{j} + (200 \cos 45^\circ \text{ N})\mathbf{k} \\ &= \{100.0\mathbf{i} + 100.0\mathbf{j} + 141.4\mathbf{k}\} \text{ N} \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

Aplicando la ecuación 2–6, advertimos que efectivamente la magnitud de $F = 200$ N.

$$\begin{aligned}F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ &= \sqrt{(100.0)^2 + (100.0)^2 + (141.4)^2} = 200 \text{ N}\end{aligned}$$

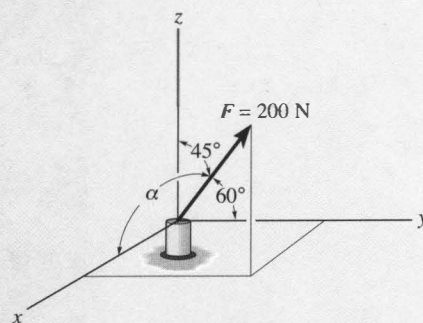
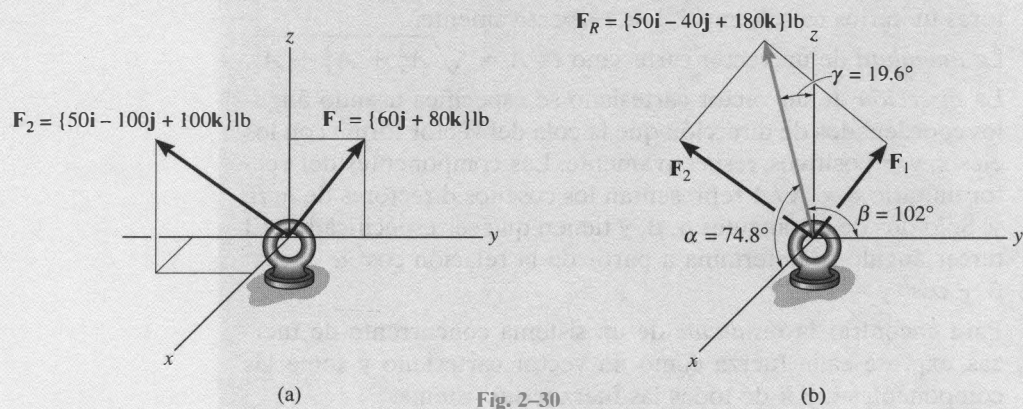


Fig. 2–29

EJEMPLO 2.9

Determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de la fuerza resultante que actúa sobre el anillo en la figura 2-30a.

**Solución**

Como cada fuerza está representada en forma vectorial cartesiana, la fuerza resultante, mostrada en la figura 2-30b, es

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_R &= \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \{60\mathbf{j} + 80\mathbf{k}\} \text{ lb} + \{50\mathbf{i} - 100\mathbf{j} + 100\mathbf{k}\} \text{ lb} \\ &= \{50\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 180\mathbf{k}\} \text{ lb}\end{aligned}$$

La magnitud de \mathbf{F}_R se encuentra con la ecuación 2-6, y obtenemos

$$\begin{aligned}F_R &= \sqrt{(50)^2 + (-40)^2 + (180)^2} = 191.0 \\ &= 191 \text{ lb}\end{aligned}$$

Resp.

Los ángulos coordenados de dirección α , β , γ se determinan a partir de las componentes del vector unitario actuando en la dirección de \mathbf{F}_R .

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{F_R} &= \frac{\mathbf{F}_R}{F_R} = \frac{50}{191.0} \mathbf{i} - \frac{40}{191.0} \mathbf{j} + \frac{180}{191.0} \mathbf{k} \\ &= 0.2617\mathbf{i} - 0.2094\mathbf{j} + 0.9422\mathbf{k}\end{aligned}$$

de manera que

$$\cos \alpha = 0.2617 \quad \alpha = 74.8^\circ \quad \text{Resp.}$$

$$\cos \beta = -0.2094 \quad \beta = 102^\circ \quad \text{Resp.}$$

$$\cos \gamma = 0.9422 \quad \gamma = 19.6^\circ \quad \text{Resp.}$$

Estos ángulos se muestran en la figura 2-30b. En particular, advierta que $\beta > 90^\circ$ ya que la componente \mathbf{j} de \mathbf{u}_{F_R} es negativa.

EJEMPLO 2.10

Expresar la fuerza \mathbf{F}_1 , mostrada en la figura 2-31a, como un vector cartesiano.

Solución

Los ángulos de 60° y 45° que definen la dirección de \mathbf{F}_1 *no* son ángulos coordenados de dirección. Las dos aplicaciones sucesivas de la ley del paralelogramo que son necesarias para resolver \mathbf{F}_1 en sus componentes x, y, z se muestran en la figura 2-31b. Por trigonometría, las magnitudes de las componentes son

$$F_{1z} = 100 \sin 60^\circ \text{ lb} = 86.6 \text{ lb}$$

$$F' = 100 \cos 60^\circ \text{ lb} = 50 \text{ lb}$$

$$F_{1x} = 50 \cos 45^\circ \text{ lb} = 35.4 \text{ lb}$$

$$F_{1y} = 50 \sin 45^\circ \text{ lb} = 35.4 \text{ lb}$$

Observando que \mathbf{F}_{1y} tiene una dirección definida por $-\mathbf{j}$, tenemos

$$\mathbf{F}_1 = \{35.4\mathbf{i} - 35.4\mathbf{j} + 86.6\mathbf{k}\} \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

Para mostrar que la magnitud de este vector es efectivamente de 100 lb, aplicamos la ecuación 2-6,

$$\begin{aligned} F_1 &= \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2 + F_{1z}^2} \\ &= \sqrt{(35.4)^2 + (-35.4)^2 + (86.6)^2} = 100 \text{ lb} \end{aligned}$$

Si se requieren, los ángulos coordenados de dirección de \mathbf{F}_1 pueden ser determinados a partir de las componentes del vector unitario que actúa en la dirección de \mathbf{F}_1 . Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{F}_1}{F_1} = \frac{F_{1x}}{F_1} \mathbf{i} + \frac{F_{1y}}{F_1} \mathbf{j} + \frac{F_{1z}}{F_1} \mathbf{k} \\ &= \frac{35.4}{100} \mathbf{i} - \frac{35.4}{100} \mathbf{j} + \frac{86.6}{100} \mathbf{k} \\ &= 0.354\mathbf{i} - 0.354\mathbf{j} + 0.866\mathbf{k} \end{aligned}$$

de modo que

$$\alpha_1 = \cos^{-1}(0.354) = 69.3^\circ$$

$$\beta_1 = \cos^{-1}(-0.354) = 111^\circ$$

$$\gamma_1 = \cos^{-1}(0.866) = 30.0^\circ$$

Estos resultados se muestran en la figura 2-31c.

Usando este mismo método, muestre que \mathbf{F}_2 en la figura 2-31a puede escribirse en forma vectorial cartesiana como

$$\mathbf{F}_2 = \{106\mathbf{i} + 184\mathbf{j} - 212\mathbf{k}\} \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

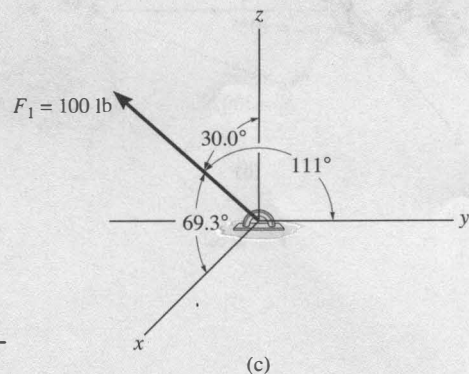
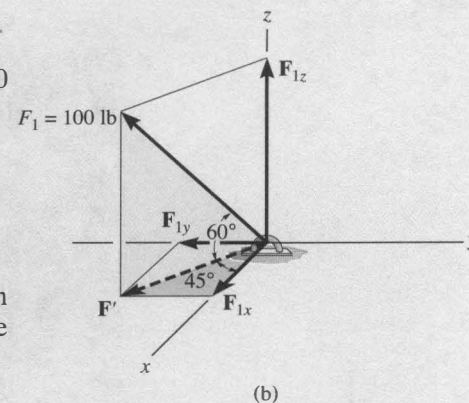
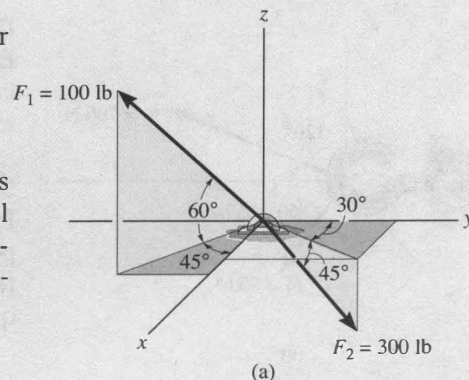
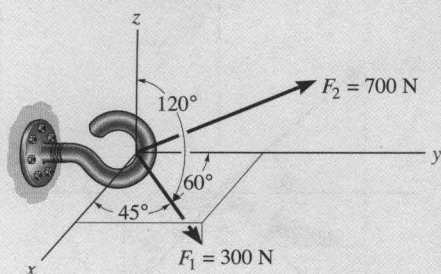


Fig. 2-31

EJEMPLO 2.11



(a)

Dos fuerzas actúan sobre el gancho mostrado en la figura 2–32a. Especifique los ángulos coordenados de dirección de \mathbf{F}_2 de modo que la fuerza resultante \mathbf{F}_R actúe a lo largo del eje y positivo y tenga una magnitud de 800 N.

Solución

Para resolver este problema, la fuerza resultante \mathbf{F}_R y sus dos componentes, \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 , serán expresadas cada una en forma vectorial cartesiana. Entonces, como se muestra en la figura 2–32b, es necesario que $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$.

Aplicando la ecuación 2–11,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= F_1 \cos \alpha_1 \mathbf{i} + F_1 \cos \beta_1 \mathbf{j} + F_1 \cos \gamma_1 \mathbf{k} \\ &= 300 \cos 45^\circ \mathbf{N} \mathbf{i} + 300 \cos 60^\circ \mathbf{N} \mathbf{j} + 300 \cos 120^\circ \mathbf{k} \\ &= \{212.1 \mathbf{i} + 150 \mathbf{j} - 150 \mathbf{k}\} \text{ N}\end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_2 = F_{2x} \mathbf{i} + F_{2y} \mathbf{j} + F_{2z} \mathbf{k}$$

Como la fuerza resultante \mathbf{F}_R tiene una magnitud de 800 N y actúa en la dirección $+\mathbf{j}$,

$$\mathbf{F}_R = (800 \text{ N})(+\mathbf{j}) = \{800 \mathbf{j}\} \text{ N}$$

Requerimos que

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$800 \mathbf{j} = 212.1 \mathbf{i} + 150 \mathbf{j} - 150 \mathbf{k} + F_{2x} \mathbf{i} + F_{2y} \mathbf{j} + F_{2z} \mathbf{k}$$

$$800 \mathbf{j} = (212.1 + F_{2x}) \mathbf{i} + (150 + F_{2y}) \mathbf{j} + (-150 + F_{2z}) \mathbf{k}$$

Para satisfacer esta ecuación, las correspondientes componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} en los lados izquierdo y derecho deben ser iguales. Esto es equivalente a establecer que las componentes x , y , z de \mathbf{F}_R deben ser iguales a las correspondientes componentes x , y , z de $(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$. Por consiguiente,

$$0 = 212.1 + F_{2x} \quad F_{2x} = -212.1 \text{ N}$$

$$800 = 150 + F_{2y} \quad F_{2y} = 650 \text{ N}$$

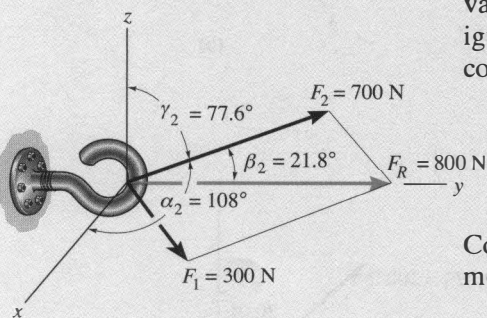
$$0 = -150 + F_{2z} \quad F_{2z} = 150 \text{ N}$$

Como las magnitudes de \mathbf{F}_2 y sus componentes son conocidas, podemos usar la ecuación 2–11 para determinar α_2 , β_2 , γ_2 .

$$-212.1 = 700 \cos \alpha_2; \quad \alpha_2 = \cos^{-1}\left(\frac{-212.1}{700}\right) = 108^\circ \quad \text{Resp.}$$

$$650 = 700 \cos \beta_2; \quad \beta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{650}{700}\right) = 21.8^\circ \quad \text{Resp.}$$

$$150 = 700 \cos \gamma_2; \quad \gamma_2 = \cos^{-1}\left(\frac{150}{700}\right) = 77.6^\circ \quad \text{Resp.}$$



(b)

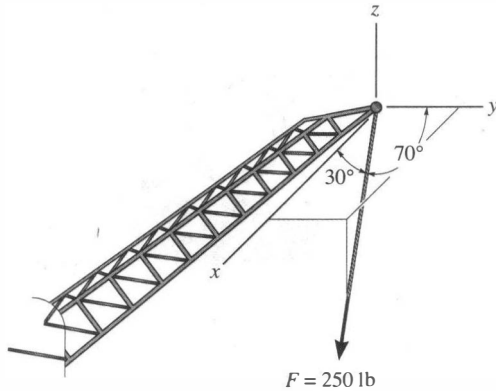
Fig. 2–32

Estos resultados se muestran en la figura 2–32b.

PROBLEMAS

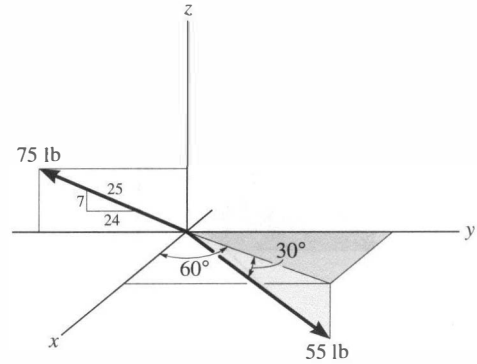
2-59. Determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de $\mathbf{F}_1 = \{60\mathbf{i} - 50\mathbf{j} + 40\mathbf{k}\}$ N y $\mathbf{F}_2 = \{-40\mathbf{i} - 85\mathbf{j} + 30\mathbf{k}\}$ N. Trace cada fuerza sobre una referencia x, y, z .

*2-60. El cable en el extremo del pescante de la grúa ejerce una fuerza de 250 lb sobre el pescante, como se muestra. Expresé \mathbf{F} como un vector cartesiano.



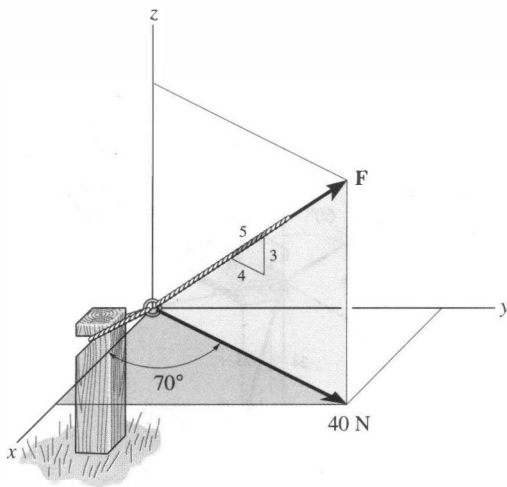
Prob. 2-60

2-62. Determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de la fuerza resultante.



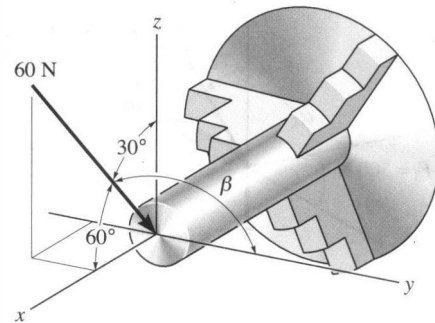
Prob. 2-62

2-61. Determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de la fuerza \mathbf{F} que actúa sobre la estaca.



Prob. 2-61

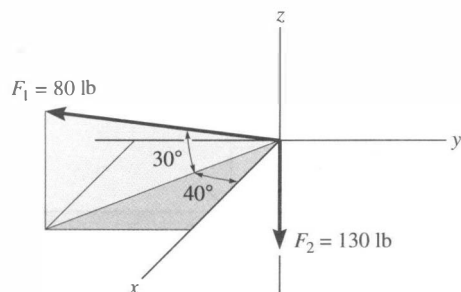
2-63. La pieza montada sobre el torno está sometida a una fuerza de 60 N. Determine el ángulo coordenado de dirección β y exprese la fuerza como un vector cartesiano.



Prob. 2-63

*2-64. Determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de la fuerza resultante y trace este vector sobre el sistema coordenado.

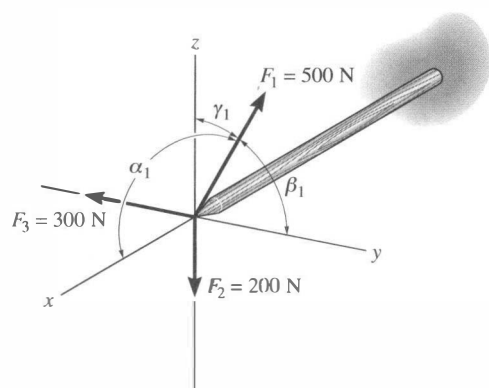
2-65. Especifique los ángulos coordenados de dirección de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 y exprese cada fuerza como un vector cartesiano.



Probs. 2-64/65

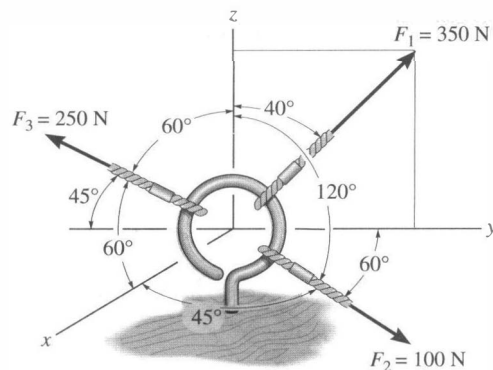
2-66. El mástil está sometido a las tres fuerzas mostradas. Determine los ángulos coordenados de dirección α_1 , β_1 , γ_1 de \mathbf{F}_1 de manera que la fuerza resultante que actúa sobre el mástil sea $\mathbf{F}_R = \{350\mathbf{i}\}$ N.

2-67. El mástil está sometido a las tres fuerzas mostradas. Determine los ángulos coordenados de dirección α_1 , β_1 , γ_1 de \mathbf{F}_1 de manera que la fuerza resultante que actúa sobre el mástil sea cero.



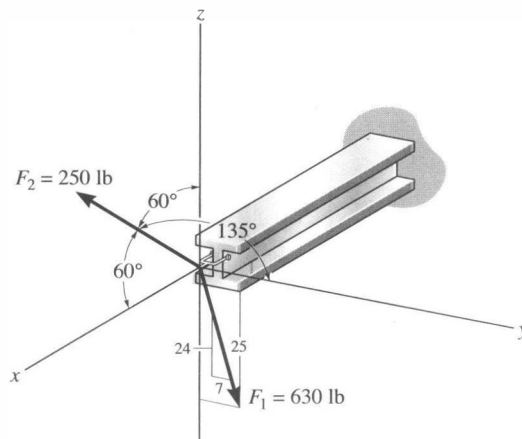
Probs. 2-66/67

*2-68. Los cables unidos a la armella están sometidos a las tres fuerzas mostradas. Exprese cada fuerza en forma vectorial cartesiana, y determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de la fuerza resultante.



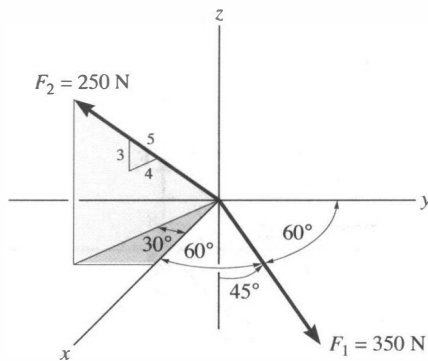
Prob. 2-68

2-69. La viga está sometida a las dos fuerzas mostradas. Exprese cada fuerza en forma vectorial cartesiana, y determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de la fuerza resultante.



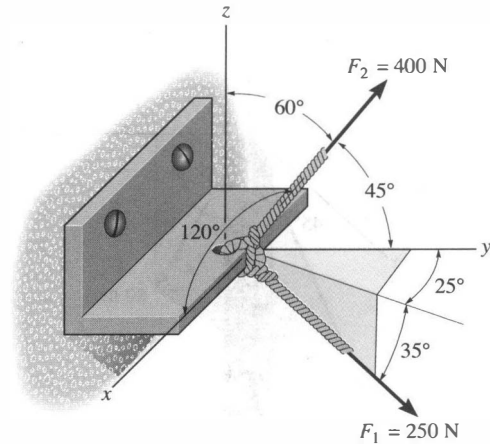
Prob. 2-69

2-70. Determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de la fuerza resultante, y trace este vector en el sistema coordenado.



Prob. 2-70

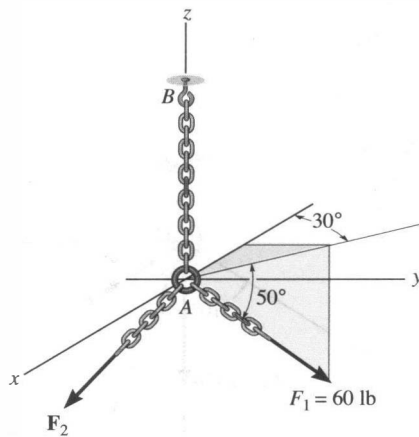
2-73. La ménsula está sometida a las dos fuerzas mostradas. Expresar cada fuerza en forma vectorial cartesiana y luego determine la fuerza resultante F_R . Encuentre la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de la fuerza resultante.



Prob. 2-73

2-71. Las dos fuerzas F_1 y F_2 que actúan en A tienen una fuerza resultante $F_R = \{-100\mathbf{k}\}$ lb. Determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de F_2 .

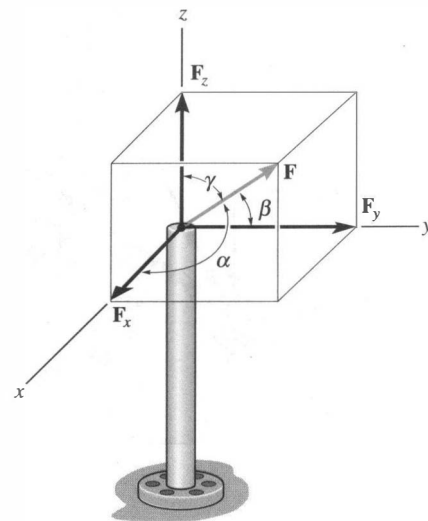
*2-72. Determine los ángulos coordenados de dirección de la fuerza F_1 e indíquelos sobre la figura.



Probs. 2-71/72

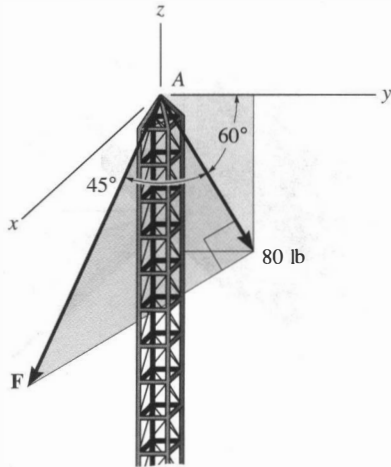
2-74. El poste está sometido a la fuerza F , la cual tiene componentes que actúan a lo largo de los ejes x , y , z como se muestra. Si la magnitud de F es de 3 kN, $\beta = 30^\circ$ y $\gamma = 75^\circ$, determine las magnitudes de sus tres componentes.

2-75. El poste está sometido a la fuerza F que tiene componentes $F_x = 1.5$ kN y $F_z = 1.25$ kN. Si $\beta = 75^\circ$, determine las magnitudes de F y F_y .



Probs. 2-74/75

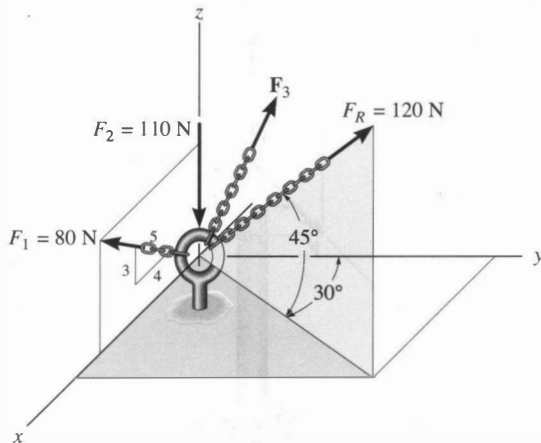
*2-76. Una fuerza \mathbf{F} es aplicada en la parte superior A de la torre. Si la fuerza actúa en la dirección mostrada de manera que una de sus componentes localizada en el plano y - z sombreado tiene una magnitud de 80 lb, determine su magnitud F y sus ángulos coordenados de dirección α , β , γ .



Prob. 2-76

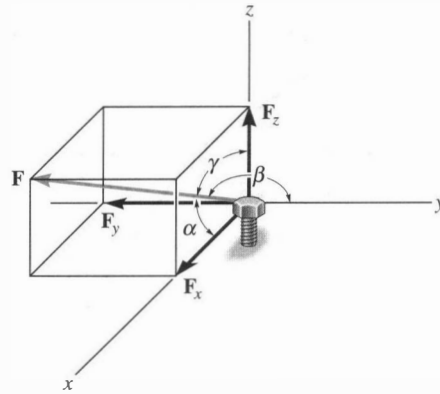
2-77. Tres fuerzas actúan sobre el gancho. Si la fuerza resultante \mathbf{F}_R tiene la magnitud y la dirección mostradas, determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de la fuerza \mathbf{F}_3 .

2-78. Determine los ángulos coordenados de dirección de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_R .



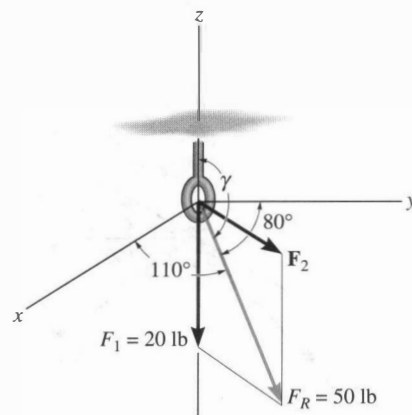
Probs. 2-77/78

2-79. El perno está sometido a la fuerza \mathbf{F} cuyas componentes actúan a lo largo de los ejes x , y , z como se muestra. Si la magnitud de \mathbf{F} es de 80 N, $\alpha = 60^\circ$ y $\gamma = 45^\circ$, determine las magnitudes de sus componentes.



Prob. 2-79

*2-80. Dos fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 actúan sobre el perno. Si la fuerza resultante \mathbf{F}_R tiene una magnitud de 50 lb y los ángulos coordenados de dirección $\alpha = 110^\circ$ y $\beta = 80^\circ$, como se muestra, determine la magnitud de \mathbf{F}_2 y sus ángulos coordenados de dirección.



Prob. 2-80

2.7 Vectores de posición

En esta sección presentaremos el concepto de vector de posición. Se verá que este vector es importante al formular un vector de fuerza cartesiano dirigido entre dos puntos cualesquiera en el espacio. Después, en el capítulo 4, lo usaremos para hallar el momento de una fuerza.

Coordenadas x, y, z . A lo largo de este libro usaremos un sistema coordenado *derecho* para referir la localización de puntos en el espacio. Además, usaremos la convención seguida en muchos libros técnicos, la cual requiere que el eje z positivo esté dirigido *hacia arriba* (dirección cenital) de manera que mida la altura de un objeto o la altura de un punto. Los ejes x, y se encuentran entonces en el plano horizontal, figura 2–33. Los puntos en el espacio se localizan con relación al origen de coordenadas, O , empleando mediciones sucesivas a lo largo de los ejes x, y, z . Por ejemplo, en la figura 2–33, las coordenadas del punto A se obtienen comenzando en O y midiendo $x_A = +4$ m a lo largo del eje x , $y_A = +2$ m a lo largo del eje y , y $z_A = -6$ m a lo largo del eje z . Entonces, $A(4, 2, -6)$. De manera similar, mediciones a lo largo de los ejes x, y, z de O a B dan las coordenadas de B , esto es, $B(0, 2, 0)$. También advierta que $C(6, -1, 4)$.

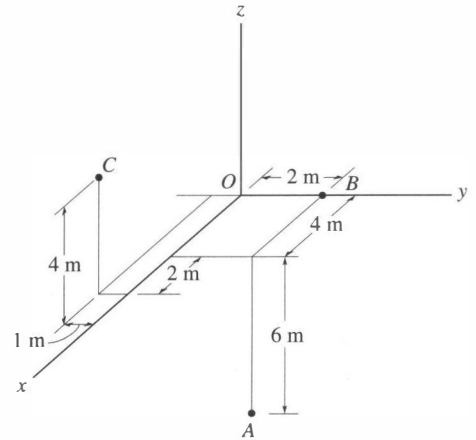


Fig. 2–33

Vector posición. El *vector posición* \mathbf{r} se define como un vector fijo que localiza un punto en el espacio con relación a otro punto. Por ejemplo, si \mathbf{r} se extiende desde el origen de coordenadas, O , hasta el punto $P(x, y, z)$, figura 2–34a, entonces \mathbf{r} puede ser expresado en forma de vector cartesiano como

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Advierta cómo la suma vectorial de cabeza a cola de las tres componentes resulta en el vector \mathbf{r} , figura 2–34b. Comenzando en el origen O , recorreremos x en la dirección $+\mathbf{i}$, luego y en la dirección $+\mathbf{j}$, y finalmente z en la dirección $+\mathbf{k}$ para llegar al punto $P(x, y, z)$.

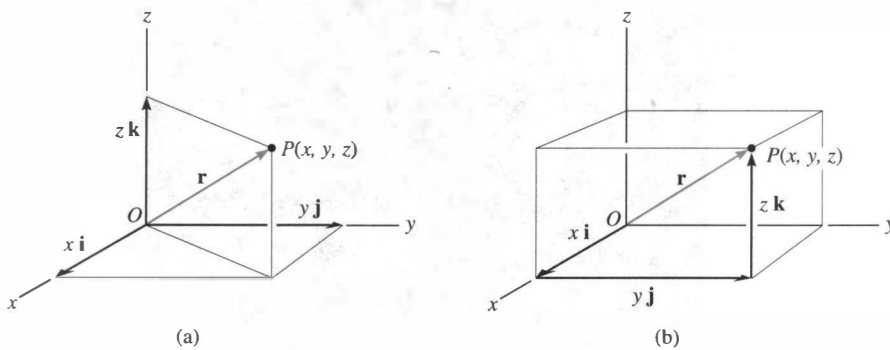
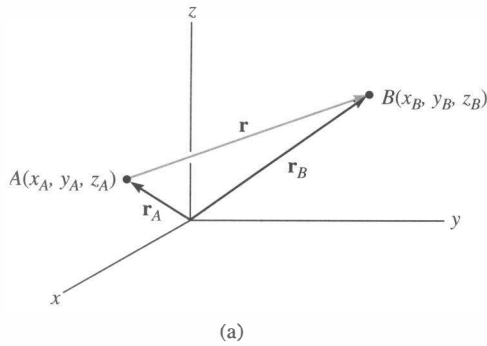
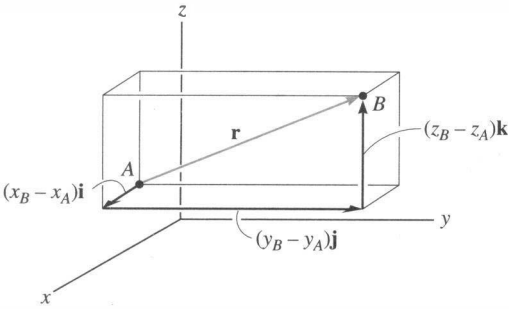


Fig. 2–34



(a)



(b)

Fig. 2-35

En el caso más general, el vector posición puede estar dirigido desde el punto A hasta el punto B en el espacio, figura 2-35a. Como se ve, este vector también está designado por el símbolo \mathbf{r} . Sin embargo, por convención, algunas veces nos referiremos a este vector con *dos subíndices* para indicar desde dónde y hasta qué punto está dirigido. Así, \mathbf{r} también puede designarse como \mathbf{r}_{AB} . También advierta que \mathbf{r}_A y \mathbf{r}_B en la figura 2-35a están referenciados con sólo un subíndice ya que se extienden desde el origen de coordenadas.

A partir de la figura 2-35a, por la suma vectorial de cabeza a cola, requerimos que

$$\mathbf{r}_A + \mathbf{r} = \mathbf{r}_B$$

Despejando \mathbf{r} y expresando \mathbf{r}_A y \mathbf{r}_B en forma vectorial cartesiana resulta

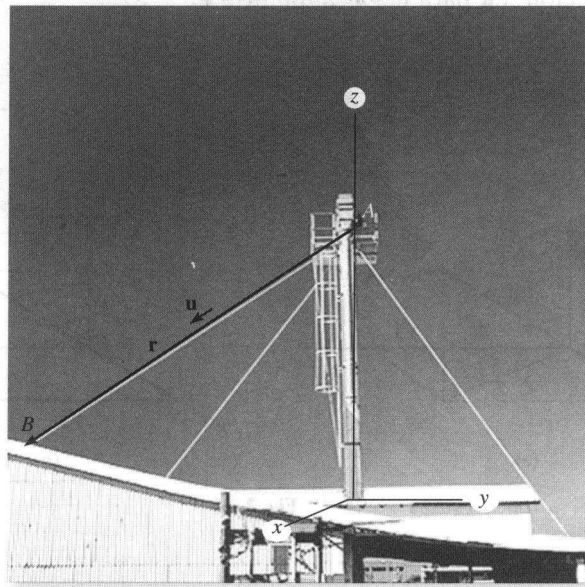
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j} + z_B\mathbf{k}) - (x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j} + z_A\mathbf{k})$$

o bien

$$\mathbf{r} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k} \quad (2-13)$$

Así, las componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} del vector posición \mathbf{r} pueden formarse tomando las coordenadas de la cola del vector, $A(x_A, y_A, z_A)$ y restándolas de las coordenadas correspondientes de la cabeza, $B(x_B, y_B, z_B)$. Advierta de nuevo cómo la suma de cabeza a cola de esas tres componentes da \mathbf{r} , esto es, yendo de A a B , figura 2-35b, primero se recorre $(x_B - x_A)$ en la dirección $+\mathbf{i}$, luego $(y_B - y_A)$ en la dirección $+\mathbf{j}$, y finalmente $(z_B - z_A)$ en la dirección $+\mathbf{k}$.

La longitud y la dirección del cable AB usado para darle soporte a la chimenea pueden ser determinadas midiendo las coordenadas de los puntos A y B usando los ejes x , y , z . El vector posición \mathbf{r} a lo largo del cable puede ser entonces establecido. La magnitud r representa la longitud del cable, y la dirección del cable se define mediante α , β , γ , los cuales se determinan a partir de las componentes del vector unitario encontrado del vector posición $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$.



EJEMPLO 2.12

Una banda elástica de hule está unida a los puntos A y B como se muestra en la figura 2-36a. Determine su longitud y su dirección medida ésta de A hacia B .

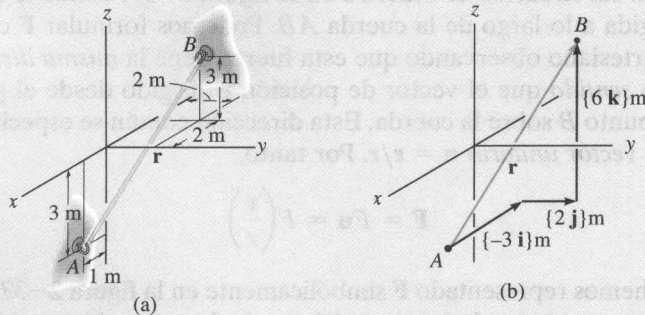


Fig. 2-36

Solución

Establezcamos primero un vector de posición de A a B , figura 2-36b. De acuerdo con la ecuación 2-13, las coordenadas de la cola $A(1\text{ m}, 0, -3\text{ m})$ son restadas de las coordenadas de la cabeza $B(-2\text{ m}, 2\text{ m}, 3\text{ m})$, lo que da

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= [-2\text{ m} - 1\text{ m}]\mathbf{i} + [2\text{ m} - 0]\mathbf{j} + [3\text{ m} - (-3\text{ m})]\mathbf{k} \\ &= \{-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\}\text{ m} \end{aligned}$$

Esas componentes de \mathbf{r} también pueden ser determinadas *directamente* observando en la figura 2-36a que representan la dirección y la distancia que se debe recorrer a lo largo de cada eje para pasar de A a B , es decir, a lo largo del eje x $\{-3\mathbf{i}\}\text{ m}$, a lo largo del eje y $\{2\mathbf{j}\}\text{ m}$, y finalmente a lo largo del eje z $\{6\mathbf{k}\}\text{ m}$.

La magnitud de \mathbf{r} representa la longitud de la banda de hule.

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (6)^2} = 7\text{ m} \quad \text{Resp.}$$

Formulando un vector unitario en la dirección de \mathbf{r} , obtenemos

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{-3}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

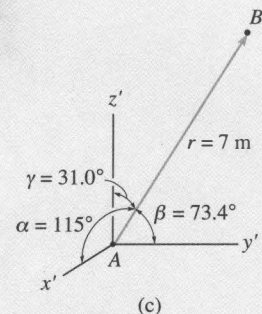
Las componentes de este vector unitario dan los ángulos coordenados de dirección

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{7}\right) = 115^\circ \quad \text{Resp.}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 73.4^\circ \quad \text{Resp.}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{6}{7}\right) = 31.0^\circ \quad \text{Resp.}$$

Estos ángulos están medidos desde los *ejes positivos* de un sistema coordenado con el origen localizado en la cola de \mathbf{r} , punto A , como se muestra en la figura 2-36c.



2.8 Vector fuerza dirigido a lo largo de una línea

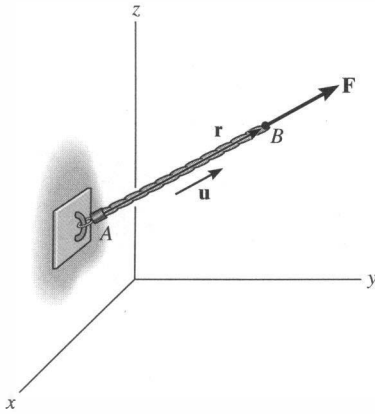


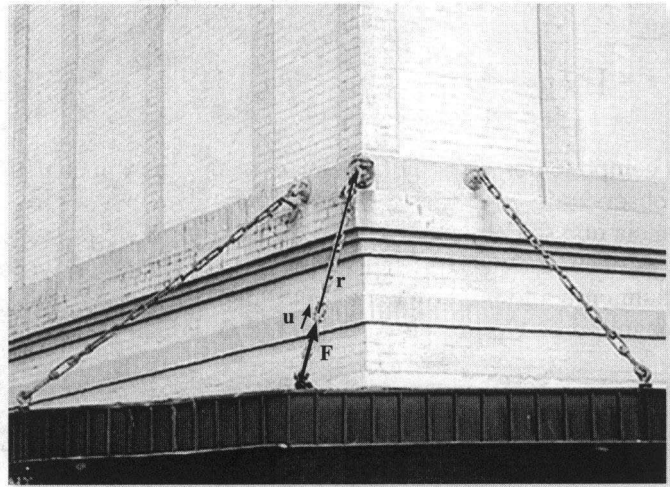
Fig. 2-37

Muy a menudo, en problemas tridimensionales de estática, la dirección de una fuerza se especifica mediante dos puntos por los que pasa su línea de acción. Tal situación se muestra en la figura 2-37, donde la fuerza \mathbf{F} está dirigida a lo largo de la cuerda AB . Podemos formular \mathbf{F} como un vector cartesiano observando que esta fuerza tiene la *misma dirección* y el mismo *sentido* que el vector de posición \mathbf{r} dirigido desde el punto A hasta el punto B sobre la cuerda. Esta dirección común se especifica mediante el *vector unitario* $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$. Por tanto,

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u} = F\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

Aunque hemos representado \mathbf{F} simbólicamente en la figura 2-37, advierta que tiene *unidades de fuerza*, a diferencia de \mathbf{r} , que tiene unidades de longitud.

La fuerza \mathbf{F} que actúa a lo largo de la cadena puede ser representada como un vector cartesiano estableciendo primero ejes x , y , z y formando un vector de posición \mathbf{r} a lo largo de la longitud de la cadena, y encontrando luego el vector unitario correspondiente $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$ que define la dirección tanto de la cadena como de la fuerza. Finalmente, la magnitud de la fuerza se combina con su dirección, $\mathbf{F} = F\mathbf{u}$.



PUNTOS IMPORTANTES

- Un vector de posición localiza un punto en el espacio con respecto a otro punto.
- La manera más fácil de formular las componentes de un vector de posición es determinando la distancia y la dirección que debe recorrerse a lo largo de las direcciones x , y , z , al pasar de la cola a la cabeza del vector.
- Una fuerza \mathbf{F} que actúa en la dirección de un vector de posición \mathbf{r} puede ser representada en forma cartesiana si se determina el vector unitario \mathbf{u} del vector de posición y éste es multiplicado por la magnitud de la fuerza, es decir, $\mathbf{F} = F\mathbf{u} = F(\mathbf{r}/r)$.

EJEMPLO 2.13

El sujeto que aparece en la figura 2–38a jala la cuerda con una fuerza de 70 lb. Represente esta fuerza actuando sobre el soporte A , como un vector cartesiano y determine su dirección.

Solución

La fuerza \mathbf{F} se muestra en la figura 2–38b. La *dirección* de este vector, \mathbf{u} , es determinada a partir del vector de posición \mathbf{r} , el cual se extiende de A a B , figura 2–38b. Las coordenadas de los puntos extremos de la cuerda son $A(0, 0, 30 \text{ pies})$ y $B(12 \text{ pies}, -8 \text{ pies}, 6 \text{ pies})$. Formando el vector de posición al sustraer las correspondientes coordenadas x, y, z de A a partir de las de B , tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (12 \text{ ft} - 0)\mathbf{i} + (-8 \text{ ft} - 0)\mathbf{j} + (6 \text{ ft} - 30 \text{ ft})\mathbf{k} \\ &= \{12\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}\} \text{ ft}\end{aligned}$$

Este resultado también puede obtenerse *directamente* al observar en la figura 2–38a que se debe partir de A y recorrer $\{-24\mathbf{k}\}$ pies, luego $\{-8\mathbf{j}\}$ pies, y finalmente $\{12\mathbf{i}\}$ pies para llegar a B .

La magnitud de \mathbf{r} , que representa la *longitud* de la cuerda AB , es

$$r = \sqrt{(12 \text{ pies})^2 + (-8 \text{ pies})^2 + (-24 \text{ pies})^2} = 28 \text{ pies}$$

Formando el vector unitario que define la dirección y el sentido de \mathbf{r} y \mathbf{F} obtenemos

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{12}{28}\mathbf{i} - \frac{8}{28}\mathbf{j} - \frac{24}{28}\mathbf{k}$$

Como \mathbf{F} tiene una *magnitud* de 70 lb y una *dirección* especificada por \mathbf{u} , entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= F\mathbf{u} = 70 \text{ lb} \left(\frac{12}{28}\mathbf{i} - \frac{8}{28}\mathbf{j} - \frac{24}{28}\mathbf{k} \right) \\ &= \{30\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 60\mathbf{k}\} \text{ lb}\end{aligned}$$

Resp.

Los ángulos coordenados de dirección están medidos entre \mathbf{r} (o \mathbf{F}) y los *ejes positivos* de un sistema coordenado con origen en A , figura 2–38b. A partir de las componentes del vector unitario:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{12}{28}\right) = 64.6^\circ \quad \text{Resp.}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-8}{28}\right) = 107^\circ \quad \text{Resp.}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-24}{28}\right) = 149^\circ \quad \text{Resp.}$$

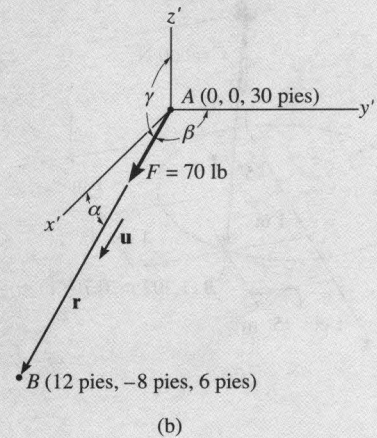
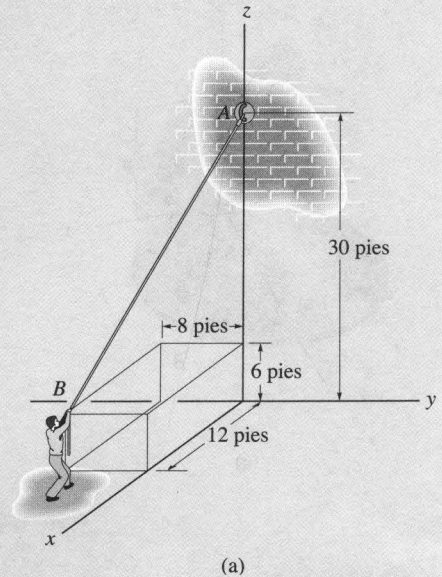
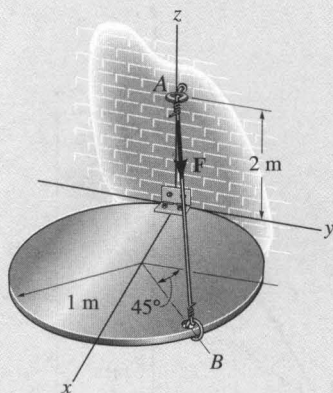
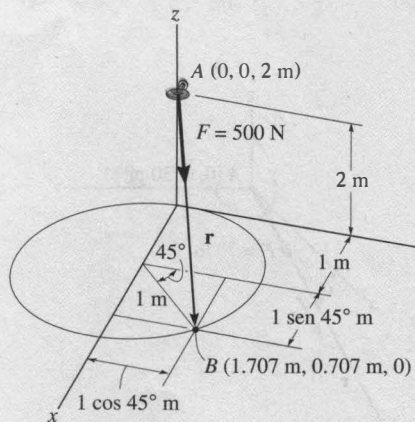


Fig. 2–38

EJEMPLO 2.14



(a)



(b)

Fig. 2-39

La placa circular mostrada en la figura 2-39a está parcialmente soportada por el cable AB . Si la fuerza del cable sobre el gancho en A es $F = 500$ N, exprese \mathbf{F} como un vector cartesiano.

Solución

Como se muestra en la figura 2-39b, \mathbf{F} tiene la misma dirección y el mismo sentido que el vector de posición \mathbf{r} , el cual se extiende de A a B . Las coordenadas de los puntos extremos del cable son $A(0, 0, 2)$ m y $B(1.707)$ m, 0.707 m, 0), como se indica en la figura. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (1.707 \text{ m} - 0)\mathbf{i} + (0.707 \text{ m} - 0)\mathbf{j} + (0 - 2 \text{ m})\mathbf{k} \\ &= \{1.707\mathbf{i} + 0.707\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\} \text{ m}\end{aligned}$$

Advierta cómo se pueden calcular esas componentes *directamente* partiendo de A , recorriendo $\{-2\mathbf{k}\}$ m a lo largo del eje z , luego $\{1.707\mathbf{i}\}$ m a lo largo del eje x , y finalmente $\{0.707\mathbf{j}\}$ m a lo largo del eje y para llegar a B .

La magnitud de \mathbf{r} es

$$r = \sqrt{(1.707)^2 + (0.707)^2 + (-2)^2} = 2.723 \text{ m}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1.707}{2.723}\mathbf{i} + \frac{0.707}{2.723}\mathbf{j} - \frac{2}{2.723}\mathbf{k} \\ &= 0.6269\mathbf{i} + 0.2597\mathbf{j} - 0.7345\mathbf{k}\end{aligned}$$

Como $F = 500$ N y \mathbf{F} tiene la dirección de \mathbf{u} , tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= F\mathbf{u} = 500 \text{ N}(0.6269\mathbf{i} + 0.2597\mathbf{j} - 0.7345\mathbf{k}) \\ &= \{313\mathbf{i} + 130\mathbf{j} - 367\mathbf{k}\} \text{ N}\end{aligned}$$

Resp.

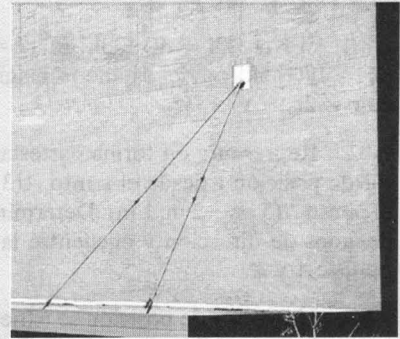
Usando esas componentes, observe que efectivamente la magnitud de \mathbf{F} es de 500 N; es decir,

$$F = \sqrt{(313)^2 + (130)^2 + (-367)^2} = 500 \text{ N}$$

Muestre que el ángulo coordenado de dirección $\gamma = 137^\circ$, e indique este ángulo en la figura.

EJEMPLO 2.15

El techo está soportado por cables como se muestra en la fotografía. Si los cables ejercen fuerzas $F_{AB} = 100 \text{ N}$ y $F_{AC} = 120 \text{ N}$ sobre el gancho en la pared en A como se muestra en la figura 2-40a, determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa en A .



Solución

La fuerza resultante \mathbf{F}_R se muestra gráficamente en la figura 2-40b. Podemos expresar esta fuerza como un vector cartesiano formulando primero \mathbf{F}_{AB} y \mathbf{F}_{AC} como vectores cartesianos y sumando luego sus componentes. Las direcciones de \mathbf{F}_{AB} y \mathbf{F}_{AC} están especificadas formando vectores unitarios \mathbf{u}_{AB} y \mathbf{u}_{AC} a lo largo de los cables. Esos vectores unitarios se obtienen a partir de los vectores asociados de posición \mathbf{r}_{AB} y \mathbf{r}_{AC} . Con referencia a la figura 2-40b, para \mathbf{F}_{AB} tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{AB} &= (4 \text{ m} - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (0 - 4 \text{ m})\mathbf{k} \\ &= \{4\mathbf{i} - 4\mathbf{k}\} \text{ m}\end{aligned}$$

$$r_{AB} = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = 5.66 \text{ m}$$

$$\mathbf{F}_{AB} = 100 \text{ N} \left(\frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}} \right) = 100 \text{ N} \left(\frac{4}{5.66} \mathbf{i} - \frac{4}{5.66} \mathbf{k} \right)$$

$$\mathbf{F}_{AB} = \{70.7\mathbf{i} - 70.7\mathbf{k}\} \text{ N}$$

Para \mathbf{F}_{AC} tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{AC} &= (4 \text{ m} - 0)\mathbf{i} + (2 \text{ m} - 0)\mathbf{j} + (0 - 4 \text{ m})\mathbf{k} \\ &= \{4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\} \text{ m}\end{aligned}$$

$$r_{AC} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-4)^2} = 6 \text{ m}$$

$$\mathbf{F}_{AC} = 120 \text{ N} \left(\frac{\mathbf{r}_{AC}}{r_{AC}} \right) = 120 \text{ N} \left(\frac{4}{6} \mathbf{i} + \frac{2}{6} \mathbf{j} - \frac{4}{6} \mathbf{k} \right)$$

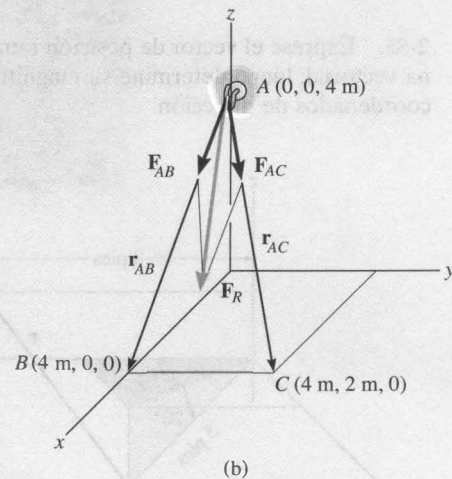
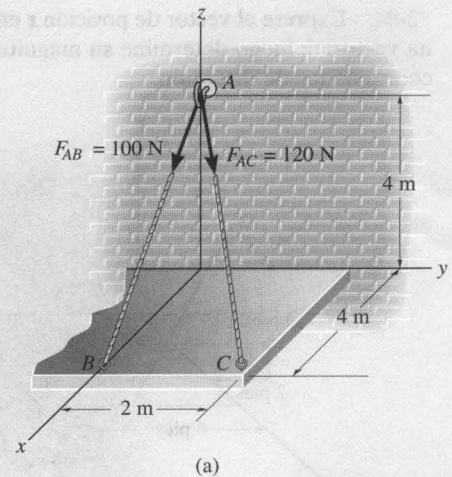
$$= \{80\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 80\mathbf{k}\} \text{ N}$$

La fuerza resultante es, por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC} = \{70.7\mathbf{i} - 70.7\mathbf{k}\} \text{ N} + \{80\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 80\mathbf{k}\} \text{ N} \\ &= \{150.7\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 150.7\mathbf{k}\} \text{ N}\end{aligned}$$

Entonces, la magnitud de \mathbf{F}_R es

$$\begin{aligned}F_R &= \sqrt{(150.7)^2 + (40)^2 + (-150.7)^2} \\ &= 217 \text{ N}\end{aligned}$$



Resp.

Fig. 2-40

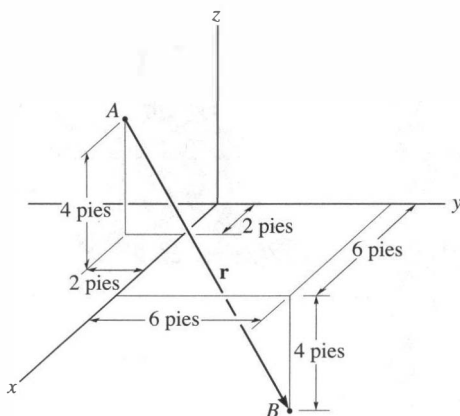
PROBLEMAS

2-81. Si $\mathbf{r}_1 = \{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}$ m, $\mathbf{r}_2 = \{4\mathbf{i} - 5\mathbf{k}\}$ m, $\mathbf{r}_3 = \{3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}\}$ m, determine la magnitud y la dirección de $\mathbf{r} = 2\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + 3\mathbf{r}_3$.

2-82. Represente en forma cartesiana vectorial el vector de posición \mathbf{r} desde el punto $A(3\text{ m}, 5\text{ m}, 6\text{ m})$ hasta el punto $B(5\text{ m}, -2\text{ m}, 1\text{ m})$. Determine sus ángulos coordenados de dirección y encuentre la distancia entre los puntos A y B .

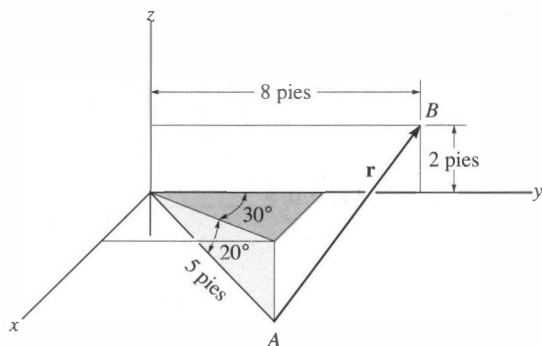
2-83. Un vector de posición se extiende desde el origen hasta el punto $A(2\text{ m}, 3\text{ m}, 6\text{ m})$. Determine los ángulos α, β, γ que la cola del vector forma con los ejes x, y, z , respectivamente.

***2-84.** Expresé el vector de posición \mathbf{r} en forma cartesiana vectorial; luego determine su magnitud y sus ángulos coordenados de dirección.



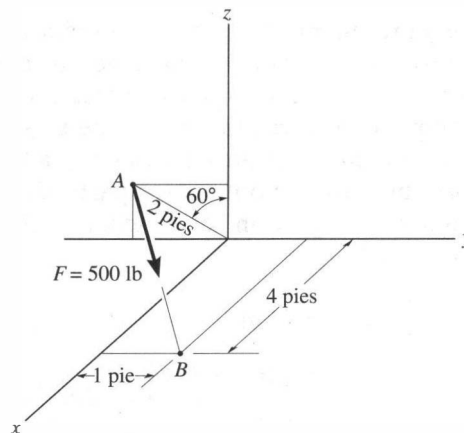
Prob. 2-84

2-85. Expresé el vector de posición \mathbf{r} en forma cartesiana vectorial; luego determine su magnitud y sus ángulos coordenados de dirección.



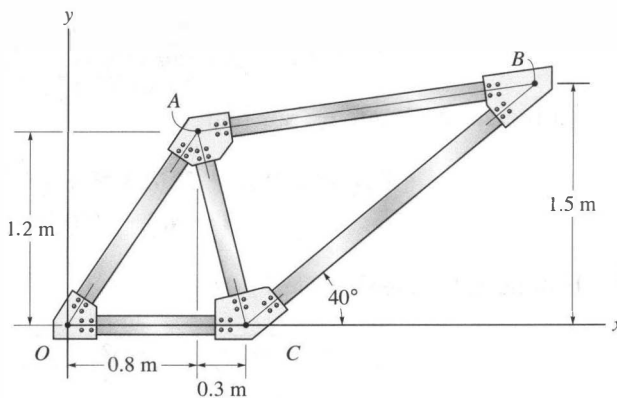
Prob. 2-85

2-86. Expresé la fuerza \mathbf{F} como un vector cartesiano; luego determine los ángulos coordenados de dirección.



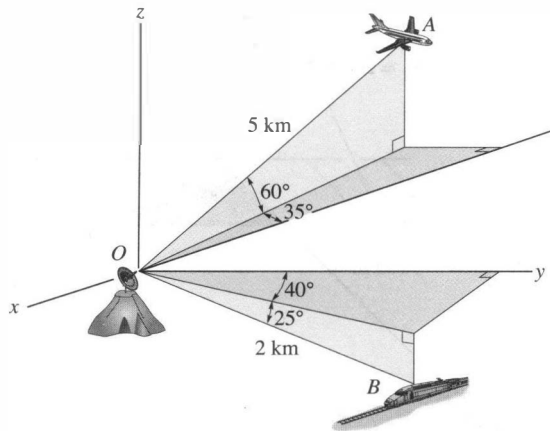
Prob. 2-86

2-87. Determine la longitud de la barra AB de la armadura estableciendo primero un vector cartesiano de posición de A a B y entonces calcule su magnitud.



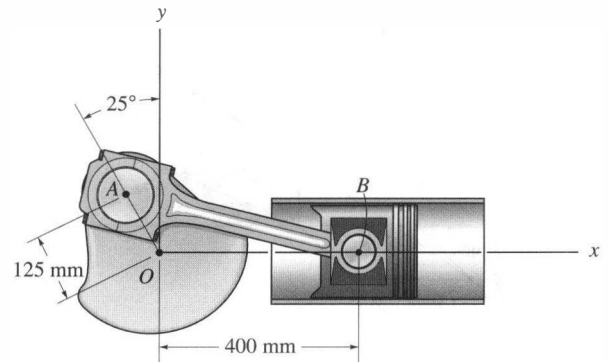
Prob. 2-87

***2-88.** En un instante dado, las posiciones de un aeroplano en A y de un tren en B se miden con respecto a una antena de radar en O . Determine la distancia d entre A y B en ese instante. Para resolver el problema, formule un vector de posición, dirigido de A a B , y luego determine su magnitud.



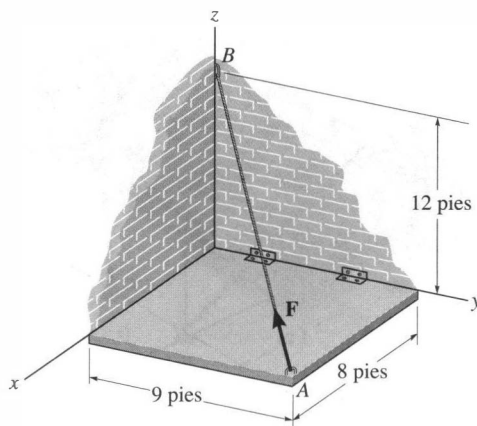
Prob. 2-88

2-90. Determine la longitud del cigüeñal AB formulando primero un vector cartesiano de posición desde A hasta B , y encontrando luego su magnitud.



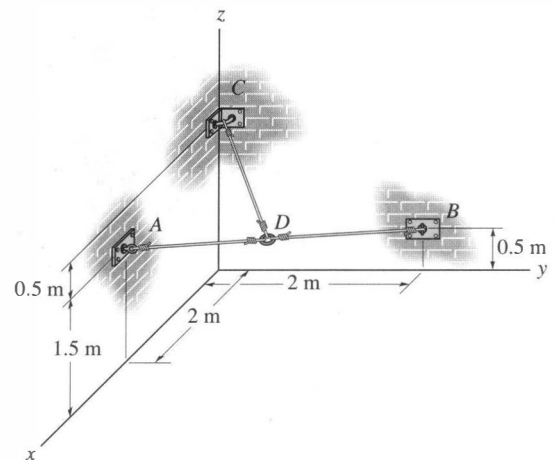
Prob. 2-90

2-89. La placa abisagrada está soportada por la cuerda AB . Si la fuerza en la cuerda es $F = 340$ lb, exprese esta fuerza dirigida de A hacia B , como un vector cartesiano. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?



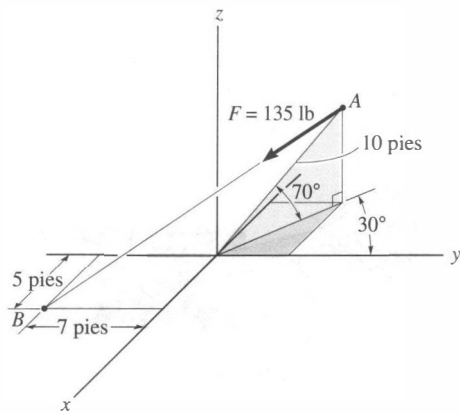
Prob. 2-89

2-91. Determine las longitudes de los alambres AD , BD y CD . El anillo en D está a la mitad de la distancia entre A y B .



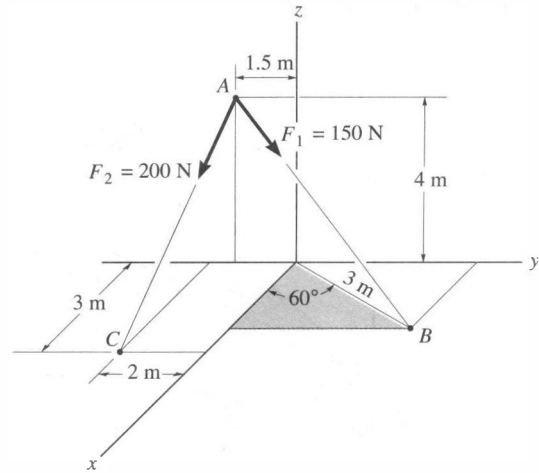
Prob. 2-91

*2-92. Exprese la fuerza \mathbf{F} como un vector cartesiano; luego determine sus ángulos coordenados de dirección.



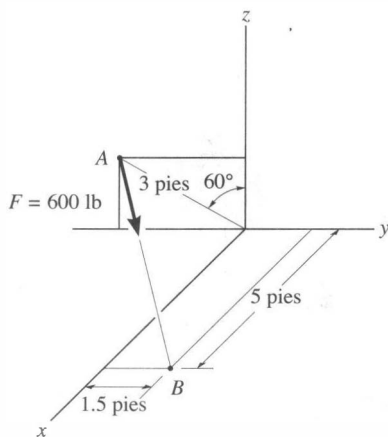
Prob. 2-92

2-94. Determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de la fuerza resultante que actúa en el punto A.



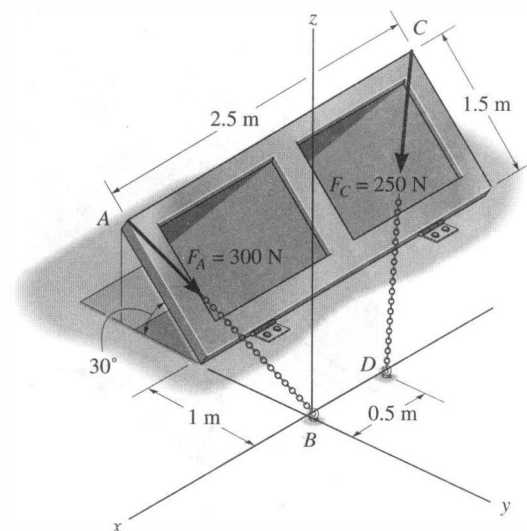
Prob. 2-94

2-93. Exprese la fuerza \mathbf{F} como un vector cartesiano; luego determine sus ángulos coordenados de dirección.



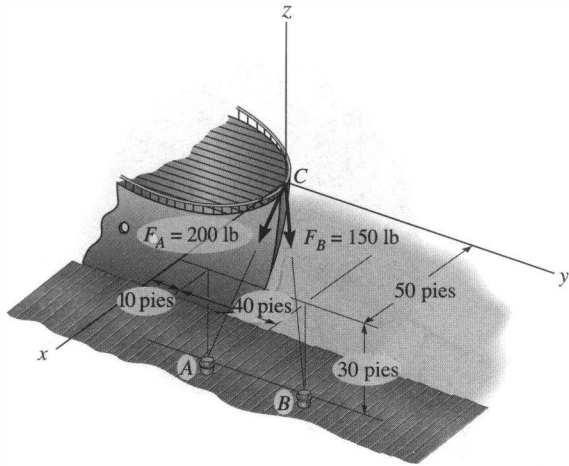
Prob. 2-93

2-95. La puerta se mantiene abierta por medio de dos cadenas. Si la tensión en AB y CD es $F_A = 300\text{ N}$ y $F_C = 250\text{ N}$, respectivamente, exprese cada una de esas fuerzas en forma cartesiana vectorial.



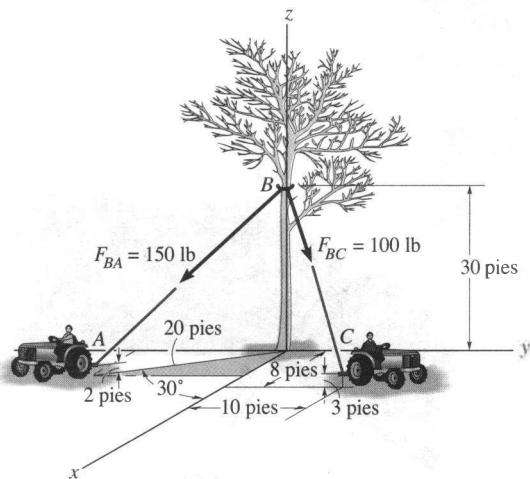
Prob. 2-95

***2-96.** Los dos cables de amarre ejercen fuerzas sobre la popa de un barco como se muestra. Represente cada fuerza como un vector cartesiano, y determine la magnitud y la dirección de la resultante.



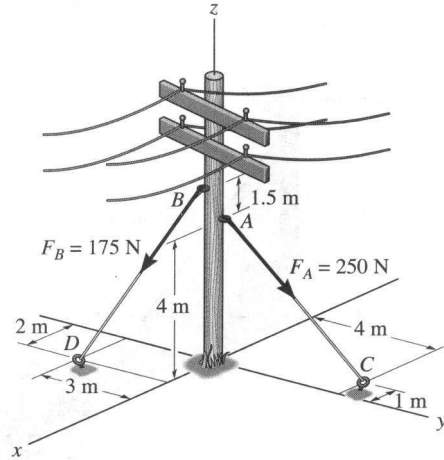
Prob. 2-96

2-97. Dos tractores jalan el árbol con las fuerzas mostradas. Represente cada fuerza como un vector cartesiano, y luego determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de la fuerza resultante.



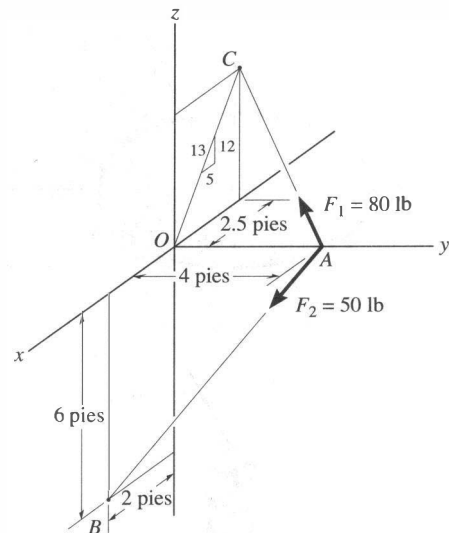
Prob. 2-97

2-98. Las retenidas de alambre se usan para dar soporte al poste telefónico. Represente la fuerza en cada alambre en forma vectorial cartesiana.



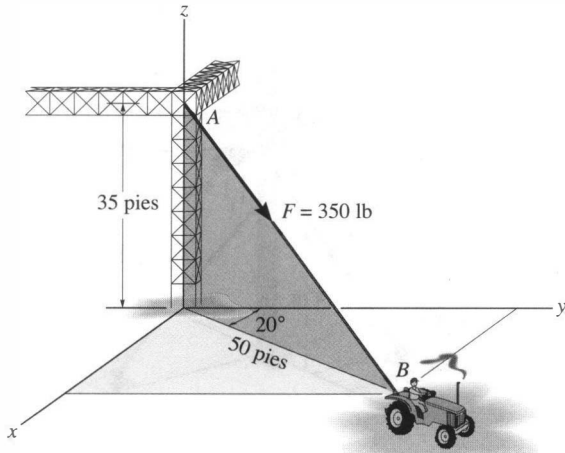
Prob. 2-98

2-99. Expresé cada una de las fuerzas en forma vectorial cartesiana, y determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de la fuerza resultante.



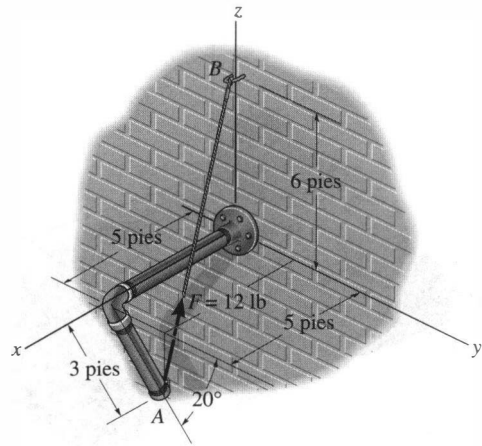
Prob. 2-99

***2-100.** El cable unido al tractor en B ejerce una fuerza de 350 lb sobre la estructura. Expresé esta fuerza como un vector cartesiano.



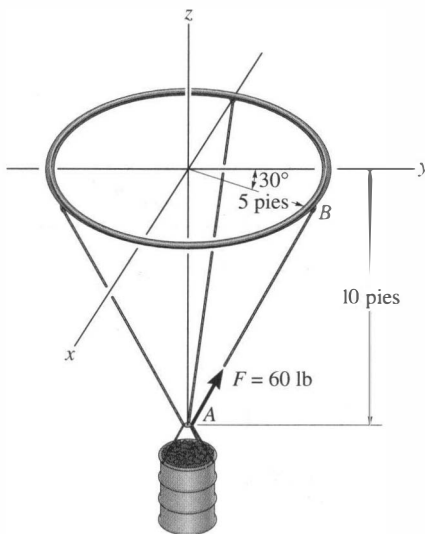
Prob. 2-100

2-102. El tubo está soportado en sus extremos por una cuerda AB . Si la cuerda ejerce una fuerza $F = 12$ lb sobre el tubo en A , exprese esta fuerza como un vector cartesiano.



Prob. 2-102

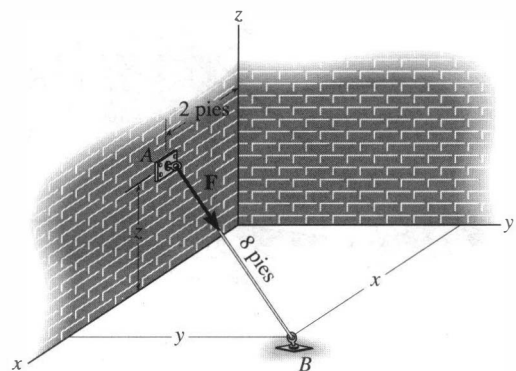
2-101. La carga en A genera una fuerza de 60 lb en el alambre AB . Expresé esta fuerza como un vector cartesiano actuando en A y dirigido hacia B como se muestra.



Prob. 2-101

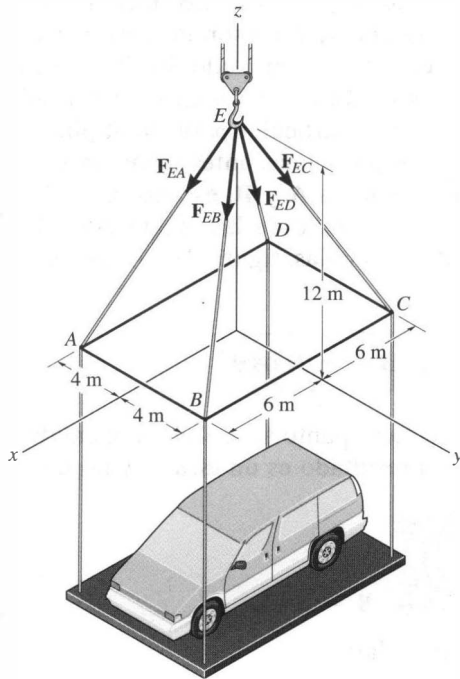
2-103. La cuerda ejerce una fuerza $\mathbf{F} = \{12\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 8\mathbf{k}\}$ lb sobre el gancho. Si la cuerda tiene 8 pies de longitud, determine la localización x, y del punto de unión B , y la altura z del gancho.

***2-104.** La cuerda ejerce una fuerza $F = 30$ lb sobre el gancho. Si la cuerda tiene 8 pies de longitud, $z = 4$ pies, y la componente x de la fuerza es $F_x = 25$ lb, determine la localización x, y del punto de unión B de la cuerda al suelo.



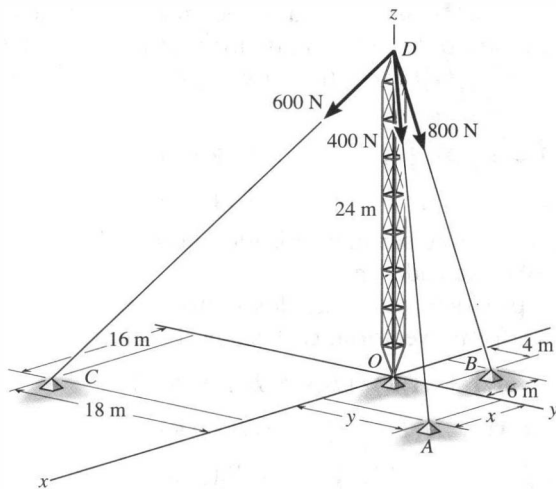
Probs. 2-103/104

2-105. Cada una de las cuatro fuerzas que actúan en E tiene una magnitud de 28 kN. Expresar cada fuerza como un vector cartesiano y determine la fuerza resultante.



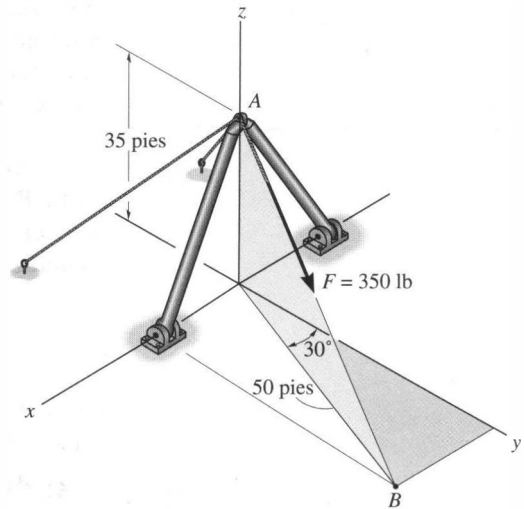
Prob. 2-105

2-106. La torre es sostenida por tres cables. Si las fuerzas en cada cable son las mostradas, determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección α , β , γ de la fuerza resultante. Considere $x = 20$ m, $y = 15$ m.



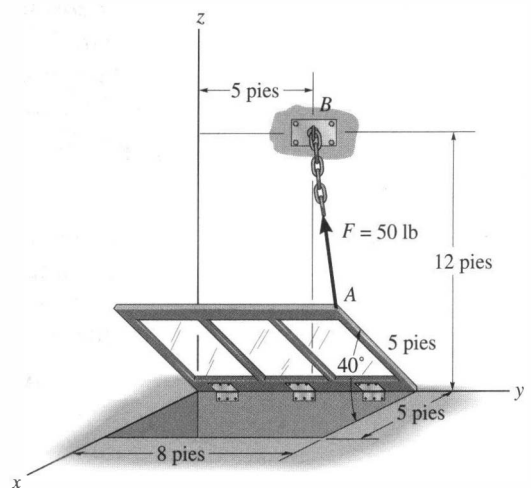
Prob. 2-106

2-107. El cable unido a la grúa ejerce sobre ésta una fuerza de $F = 350$ lb. Expresar esta fuerza como un vector cartesiano.



Prob. 2-107

*2-108. La ventana se mantiene abierta por medio de la cadena AB . Determine la longitud de la cadena, y exprese la fuerza de 50 lb que actúa en A a lo largo de la cadena como un vector cartesiano, también determine sus ángulos coordenados de dirección.



Prob. 2-108

2.9 Producto punto

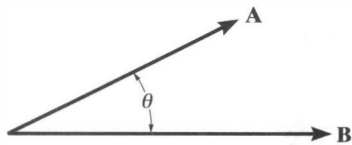


Fig. 2-41

A veces, en estática, debemos localizar el ángulo entre dos líneas o las componentes de una fuerza paralela y perpendicular a una línea. En dos dimensiones, esos problemas pueden ser resueltos fácilmente por trigonometría ya que las relaciones geométricas son fáciles de visualizar. Sin embargo, en tres dimensiones, esto es a menudo difícil, y en consecuencia deben emplearse métodos vectoriales para encontrar la solución. El producto punto define un método particular para “multiplicar” dos vectores y se usa para resolver los problemas antes mencionados.

El *producto punto* de los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , escrito $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, y leído “ \mathbf{A} punto \mathbf{B} ”, se define como el producto de las magnitudes de \mathbf{A} y \mathbf{B} y el coseno del ángulo θ entre sus colas, figura 2-41. Expresado como ecuación,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (2-14)$$

donde $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$. Al producto punto se le llama a menudo *producto escalar* de vectores ya que el resultado es un *escalar* y no un vector.

Leyes de operación

1. Ley conmutativa:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

2. Multiplicación por un escalar:

$$a(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (a\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})a$$

3. Ley distributiva:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$$

Es fácil demostrar la primera y segunda leyes usando la ecuación 2-14. La prueba de la ley distributiva se deja como un ejercicio (vea el problema 2-109).

Formulación vectorial cartesiana. La ecuación 2-14 puede usarse para hallar el producto punto de cada uno de los vectores unitarios cartesianos. Por ejemplo, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = (1)(1) \cos 0^\circ = 1$ y $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1)(1) \cos 90^\circ = 0$. De manera similar,

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 & \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0 \end{array}$$

Estos resultados no tienen que ser memorizados, pero debe entenderse claramente cómo se obtiene cada uno.

Considere ahora el producto punto de dos vectores generales \mathbf{A} y \mathbf{B} que son expresados en forma vectorial cartesiana. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= A_x B_x (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + A_x B_y (\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) + A_x B_z (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}) \\ &\quad + A_y B_x (\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) + A_y B_y (\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) + A_y B_z (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) \\ &\quad + A_z B_x (\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) + A_z B_y (\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}) + A_z B_z (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Efectuando las operaciones producto punto, se obtiene

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (2-15)$$

Así, para determinar el producto punto de dos vectores cartesianos, multiplique sus correspondientes componentes x , y , z y sume sus productos algebraicamente. Como el resultado es un escalar, tenga cuidado de no incluir ningún vector unitario en el resultado final.

Aplicaciones. En mecánica, el producto punto tiene dos importantes aplicaciones.

1. El ángulo formado entre dos vectores o líneas que se cortan. El ángulo θ entre las colas de los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} mostrados en la figura 2-41 puede ser determinado mediante la ecuación 2-14 y escribirse como

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}\right) \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

Aquí, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ se calcula empleando la ecuación 2-15. En particular, advierta que si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, $\theta = \cos^{-1}0 = 90^\circ$, por lo que \mathbf{A} será perpendicular a \mathbf{B} .

2. Las componentes de un vector paralelo y perpendicular a una línea. La componente de un vector \mathbf{A} paralelo a, o colineal con la línea aa' en la figura 2-42 es definida por \mathbf{A}_{\parallel} , donde $A_{\parallel} = A \cos \theta$. A esta componente se le llama a veces la *proyección* de \mathbf{A} sobre la línea, ya que se forma un ángulo recto en la construcción. Si la dirección de la línea es especificada por el vector unitario \mathbf{u} , entonces, como $u = 1$, podemos determinar A_{\parallel} directamente con el producto punto (Ecuación 2-14); esto es,

$$A_{\parallel} = A \cos \theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$$

Por consiguiente, la proyección escalar de \mathbf{A} a lo largo de una línea se determina con el producto punto de \mathbf{A} y el vector unitario \mathbf{u} que define la dirección de la línea. Advierta que si este resultado es positivo, entonces \mathbf{A}_{\parallel} tiene un sentido direccional que es igual al de \mathbf{u} , mientras que si A_{\parallel} es un escalar negativo, entonces \mathbf{A}_{\parallel} tiene el sentido opuesto de dirección al de \mathbf{u} . La componente \mathbf{A}_{\parallel} representada como un vector es entonces

$$\mathbf{A}_{\parallel} = A \cos \theta \mathbf{u} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$$

La componente de \mathbf{A} que es perpendicular a la línea aa' también puede ser obtenida, figura 2-42. Como $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\parallel} + \mathbf{A}_{\perp}$, entonces $\mathbf{A}_{\perp} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_{\parallel}$. Hay dos maneras posibles de obtener A_{\perp} . Una es determinar θ con el producto punto, $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}/A)$, entonces $A_{\perp} = A \sin \theta$. De manera alternativa, si A_{\parallel} es conocida, entonces, por el teorema de Pitágoras, también podemos escribir $A_{\perp} = \sqrt{A^2 - A_{\parallel}^2}$.

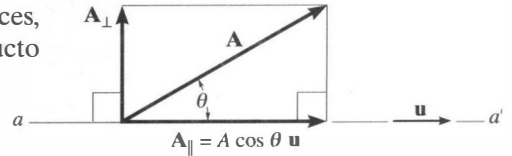
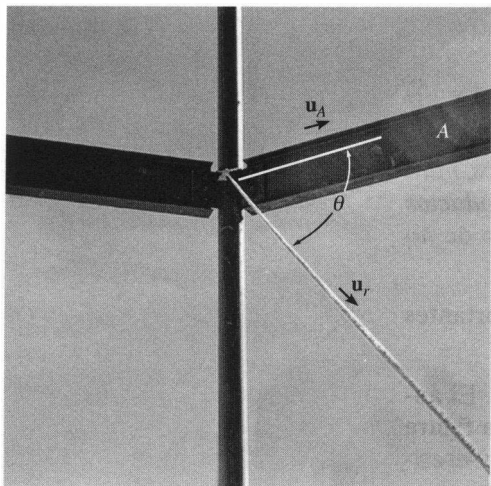
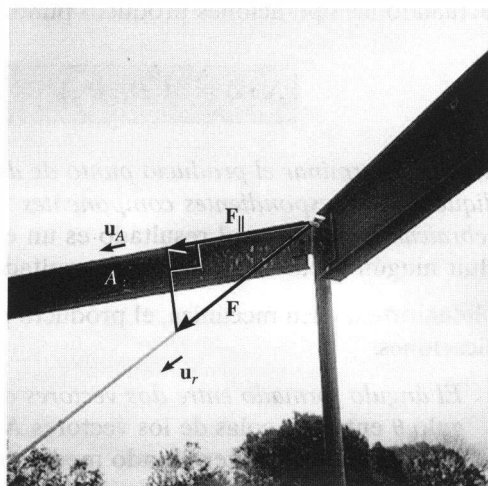


Fig. 2-42



El ángulo θ formado entre la cuerda y la viga A puede ser determinado usando el producto punto. Simplemente formule los vectores posición o vectores unitarios a lo largo de la viga, $\mathbf{u}_A = \mathbf{r}_A/r_A$, y a lo largo de la cuerda, $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}_r/r_r$. Como θ se define entre las colas de esos vectores, podemos encontrar θ usando $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_r/r_A r_r) = \cos^{-1} \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{u}_r$.



Si la cuerda ejerce una fuerza \mathbf{F} sobre la junta, la proyección de esta fuerza a lo largo de la viga A puede ser determinada definiendo primero la *dirección de la viga* usando el vector unitario $\mathbf{u}_A = \mathbf{r}_A/r_A$, y formulando luego la fuerza como un vector cartesiano $\mathbf{F} = F(\mathbf{r}_r/r_r) = F\mathbf{u}_r$. Aplicando el producto punto, la proyección es $F_{\parallel} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_A$.

PUNTOS IMPORTANTES

- El producto punto se usa para determinar el ángulo entre dos vectores o la proyección de un vector en una dirección específica.
- Si los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} están expresados en forma cartesiana, el producto punto se determina multiplicando las respectivas componentes escalares x , y , z y sumando algebraicamente los resultados, esto es, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$.
- A partir de la definición del producto punto, el ángulo formado entre las colas de los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} es $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}/AB)$.
- La magnitud de la proyección del vector \mathbf{A} a lo largo de una línea cuya dirección está especificada por \mathbf{u} se determina con el producto punto $A_{\parallel} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$.

EJEMPLO 2.16

El marco mostrado en la figura 2-43a está sometido a una fuerza horizontal $\mathbf{F} = \{300\mathbf{j}\}$ N. Determine la magnitud de las componentes de esta fuerza paralela y perpendicular a la barra AB .

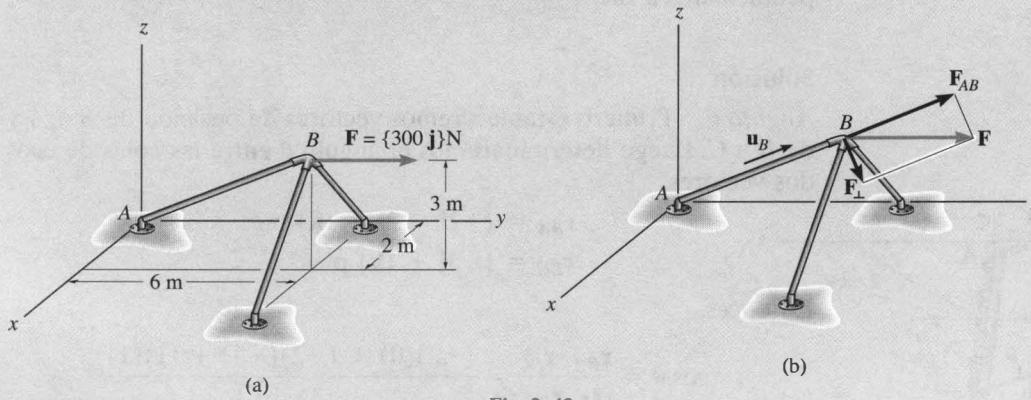


Fig. 2-43

Solución

La magnitud de la componente de \mathbf{F} a lo largo de AB es igual al producto punto de \mathbf{F} y el vector unitario \mathbf{u}_B , el cual define la dirección de AB , figura 2-43b. Como

$$\mathbf{u}_B = \frac{\mathbf{r}_B}{r_B} = \frac{2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (3)^2}} = 0.286\mathbf{i} + 0.857\mathbf{j} + 0.429\mathbf{k}$$

entonces

$$\begin{aligned} F_{AB} &= F \cos \theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_B = (300\mathbf{j}) \cdot (0.286\mathbf{i} + 0.857\mathbf{j} + 0.429\mathbf{k}) \\ &= (0)(0.286) + (300)(0.857) + (0)(0.429) \\ &= 257.1 \text{ N} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

Como el resultado es un escalar positivo, \mathbf{F}_{AB} tiene el mismo sentido que \mathbf{u}_B , figura 2-43b.

Expresando \mathbf{F}_{AB} en forma vectorial cartesiana, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{AB} &= F_{AB}\mathbf{u}_B = (257.1 \text{ N})(0.286\mathbf{i} + 0.857\mathbf{j} + 0.429\mathbf{k}) \\ &= \{73.5\mathbf{i} + 220\mathbf{j} + 110\mathbf{k}\} \text{ N} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

La componente perpendicular, figura 2-43b, es por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\perp &= \mathbf{F} - \mathbf{F}_{AB} = 300\mathbf{j} - (73.5\mathbf{i} + 220\mathbf{j} + 110\mathbf{k}) \\ &= \{-73.5\mathbf{i} + 80\mathbf{j} - 110\mathbf{k}\} \text{ N} \end{aligned}$$

Su magnitud puede ser determinada a partir de este vector o con el teorema de Pitágoras, figura 2-43b:

$$\begin{aligned} F_\perp &= \sqrt{F^2 - F_{AB}^2} \\ &= \sqrt{(300 \text{ N})^2 - (257.1 \text{ N})^2} \\ &= 155 \text{ N} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 2.17

El tubo en la figura 2-44a está sometido a la fuerza $F = 80$ lb. Determine el ángulo θ entre \mathbf{F} y el segmento de tubo BA , así como las magnitudes de las componentes de \mathbf{F} , las cuales son paralelas y perpendiculares a BA .

Solución

Ángulo θ . Primero estableceremos vectores de posición de B a A y de B a C . Luego determinaremos el ángulo θ entre las colas de esos dos vectores.

$$\mathbf{r}_{BA} = \{-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\} \text{ pies}$$

$$\mathbf{r}_{BC} = \{-3\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\} \text{ pies}$$

Entonces,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{r}_{BA} \cdot \mathbf{r}_{BC}}{r_{BA} r_{BC}} = \frac{(-2)(0) + (-2)(-3) + (1)(1)}{3\sqrt{10}}$$

$$= 0.7379$$

$$\theta = 42.5^\circ$$

Resp.

Componentes de F . La fuerza \mathbf{F} se resuelve en componentes como se muestra en la figura 2-44b. Como $F_{BA} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_{BA}$, debemos formular primero el vector unitario a lo largo de BA y la fuerza \mathbf{F} como vectores cartesianos.

$$\mathbf{u}_{BA} = \frac{\mathbf{r}_{BA}}{r_{BA}} = \frac{(-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k})}{3} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = 80 \text{ lb} \left(\frac{\mathbf{r}_{BC}}{r_{BC}} \right) = 80 \left(\frac{-3\mathbf{j} + 1\mathbf{k}}{\sqrt{10}} \right) = -75.89\mathbf{j} + 25.30\mathbf{k}$$

Entonces,

$$F_{BA} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_{BA} = (-75.89\mathbf{j} + 25.30\mathbf{k}) \cdot \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k} \right)$$

$$= 0 + 50.60 + 8.43$$

$$= 59.0 \text{ lb}$$

Resp.

Como θ fue calculado en la figura 2-44b, este mismo resultado puede obtenerse también directamente empleando trigonometría.

$$F_{BA} = 80 \cos 42.5^\circ \text{ lb} = 59.0 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

La componente perpendicular se puede obtener por trigonometría,

$$F_{\perp} = F \sin \theta$$

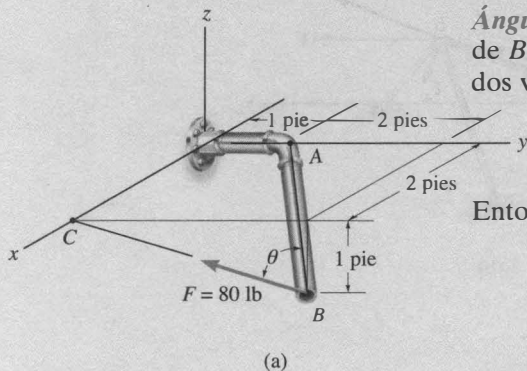
$$= 80 \sin 42.5^\circ \text{ lb}$$

$$= 54.0 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

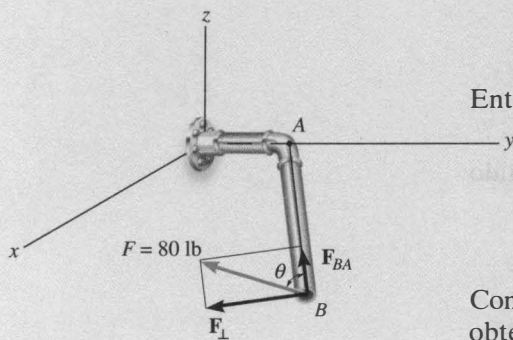
O, por el teorema de Pitágoras,

$$F_{\perp} = \sqrt{F^2 - F_{BA}^2} = \sqrt{(80)^2 - (59.0)^2}$$

$$= 54.0 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$



(a)



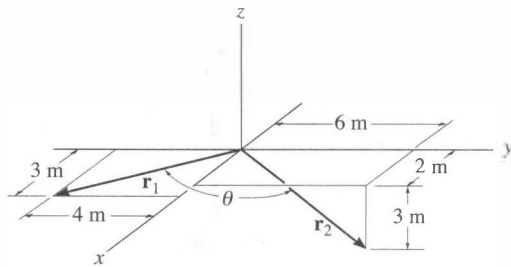
(b)

Fig. 2-44

PROBLEMAS

2-109. Dados los tres vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{D} , muestre que $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$.

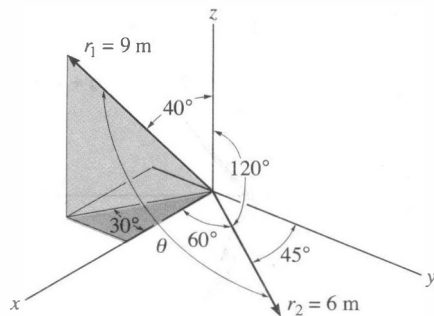
2-110. Determine el ángulo θ entre las colas de los dos vectores.



Prob. 2-110

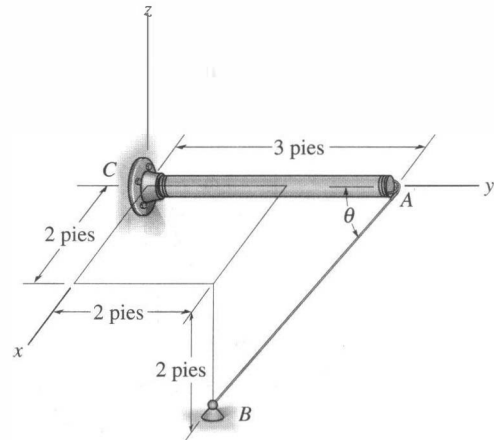
2-111. Determine el ángulo θ entre las colas de los dos vectores.

***2-112.** Determine la magnitud de la componente proyectada de \mathbf{r}_1 a lo largo de \mathbf{r}_2 , y la proyección de \mathbf{r}_2 a lo largo de \mathbf{r}_1 .



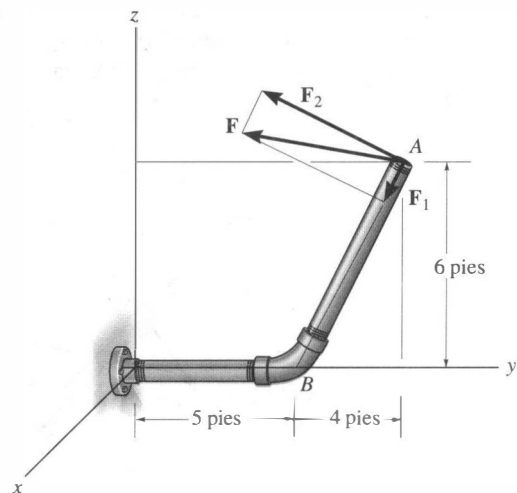
Probs. 2-111/112

2-113. Determine el ángulo θ entre el eje y y la barra y el alambre AB .



Prob. 2-113

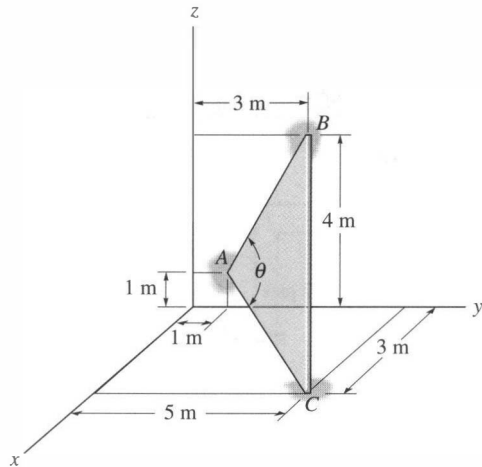
2-114. La fuerza $\mathbf{F} = [25\mathbf{i} - 50\mathbf{j} + 10\mathbf{k}]$ N actúa en el extremo A de la tubería. Determine la magnitud de las componentes \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 que actúan a lo largo del eje de AB y perpendicular a él.



Prob. 2-114

2-115. Determine el ángulo θ entre los lados de la placa triangular.

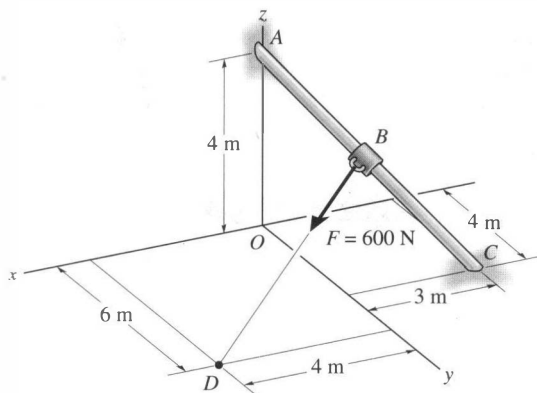
***2-116.** Determine la longitud del lado BC de la placa triangular. Resuelva el problema encontrando la magnitud de \mathbf{r}_{BC} ; entonces verifique el resultado encontrando primero θ , r_{AB} , y r_{AC} y luego use la ley de los cosenos.



Probs. 2-115/116

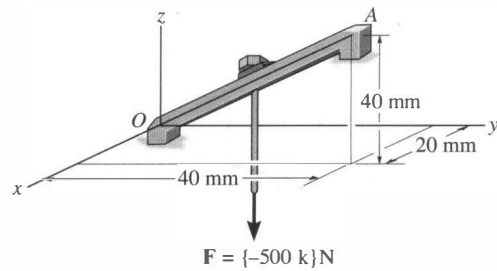
2-117. Determine las componentes de \mathbf{F} que actúan a lo largo de la barra AC y perpendicularmente a ella. El punto B está localizado en el punto medio de la barra.

2-118. Determine las componentes de \mathbf{F} que actúan a lo largo de la barra AC y perpendicularmente a ella. El punto B está localizado a 3 m a lo largo de la barra desde el extremo C .



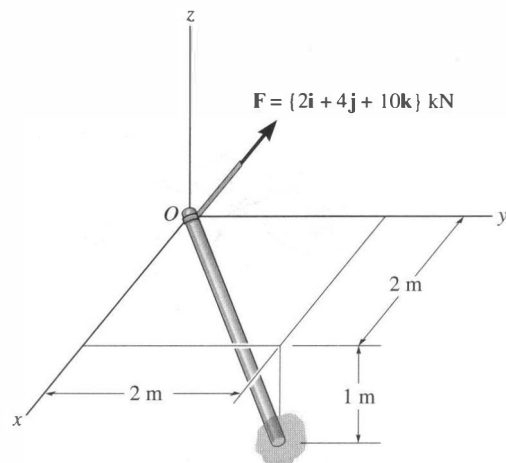
Probs. 2-117/118

2-119. La abrazadera se usa sobre un gálibro. Si la fuerza vertical que actúa sobre el perno es $\mathbf{F} = \{-500\mathbf{k}\}$ N, determine las magnitudes de las componentes \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 que actúan a lo largo del eje OA y perpendicularmente a él.



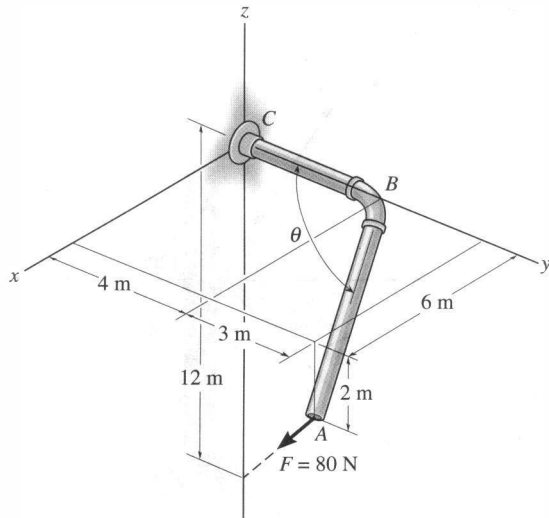
Prob. 2-119

***2-120.** Determine la proyección de la fuerza \mathbf{F} a lo largo del poste.



Prob. 2-120

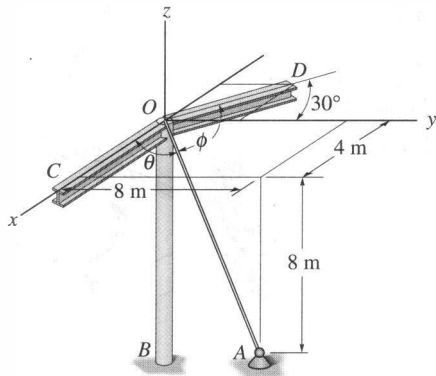
2-121. Determine la componente proyectada de la fuerza de 80 N que actúa a lo largo del eje AB del tubo.



Prob. 2-121

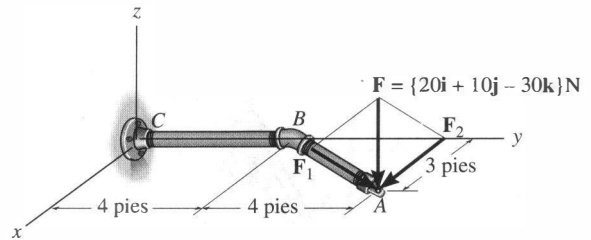
2-122. El cable OA se usa para dar soporte a la columna OB . Determine el ángulo θ que forma el cable con la viga OC .

2-123. El cable OA se usa para dar soporte a la columna OB . Determine el ángulo ϕ que forma el cable con la viga OD .



Probs. 2-122/123

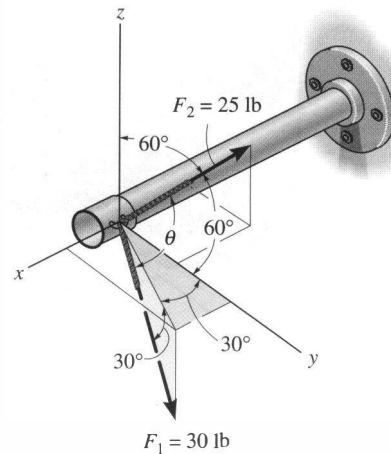
*2-124. La fuerza \mathbf{F} actúa en el extremo A de la tubería. Determine las magnitudes de las componentes \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 que actúan a lo largo del eje de AB y perpendicular a él.



Prob. 2-124

2-125. Dos cables ejercen fuerzas sobre el tubo. Determine la magnitud de la componente proyectada de \mathbf{F}_1 a lo largo de la línea de acción de \mathbf{F}_2 .

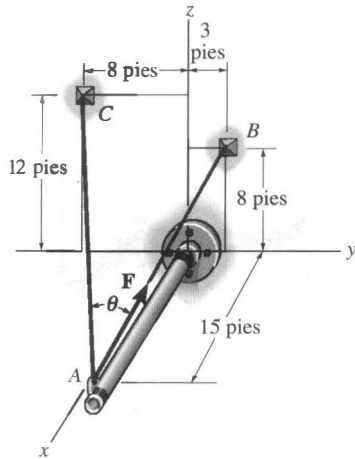
2-126. Determine el ángulo θ entre los dos cables unidos al tubo.



Probs. 2-125/126

2-127. Determine el ángulo θ entre los cables AB y AC .

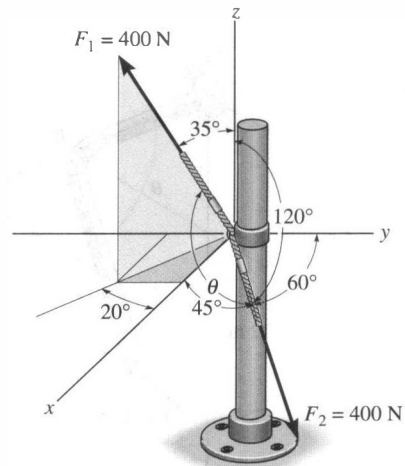
***2-128.** Si F tiene una magnitud de 55 lb, determine la magnitud de su componente proyectada que actúa a lo largo del eje x y a lo largo del cable AC .



Probs. 2-127/128

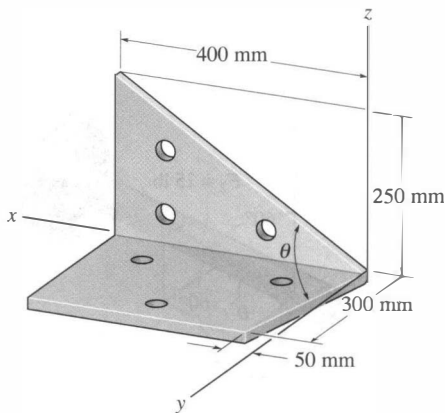
2-130. Los cables ejercen cada uno una fuerza de 400 N sobre el poste. Determine la magnitud de la componente proyectada de F_1 a lo largo de la línea de acción de F_2 .

2-131. Determine el ángulo θ entre los dos cables unidos al poste.



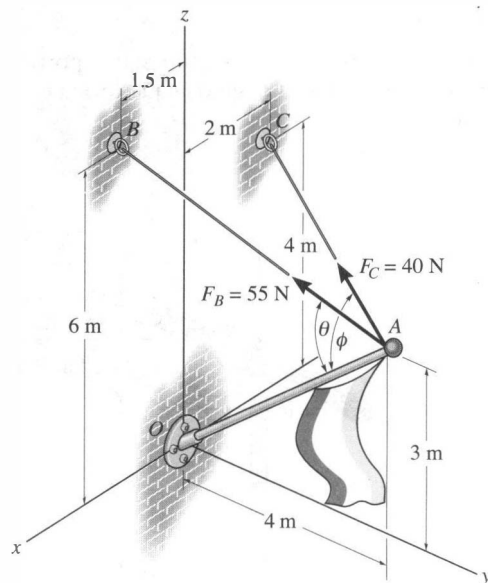
Probs. 2-130/131

2-129. Determine el ángulo θ entre los bordes de la ménsula de lámina metálica.



Prob. 2-129

***2-132.** Determine los ángulos θ y ϕ entre el eje OA del poste de la bandera y AB y AC , respectivamente, de cada cable.



Prob. 2-132

REPASO DEL CAPÍTULO

- **Ley del paralelogramo.** Dos vectores se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Las *componentes* forman los lados del paralelogramo y la *resultante* es la diagonal. Para obtener las componentes o la resultante, muestre cómo se suman los vectores por la adición punta a cola usando la regla del triángulo, y luego use la ley de los senos y la ley de los cosenos para calcular sus valores.

- **Vectores cartesianos.** Un vector puede ser resuelto en sus componentes cartesianas a lo largo de los ejes x , y , z de manera que $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$.

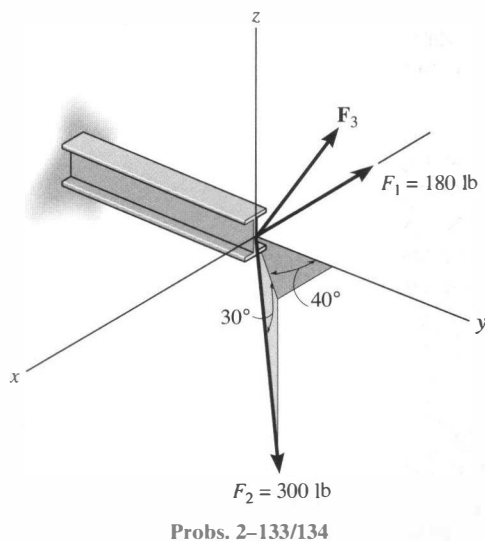
La magnitud de \mathbf{F} se determina mediante $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ y los ángulos coordenados de dirección α , β , γ se determinan formulando un vector unitario en la dirección de \mathbf{F} , que es $\mathbf{u} = (F_x/F)\mathbf{i} + (F_y/F)\mathbf{j} + (F_z/F)\mathbf{k}$. Las componentes de \mathbf{u} representan $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ o cosenos directores. Esos tres ángulos están relacionados por $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, de modo que sólo dos de los tres ángulos son independientes entre sí.

- **Vectores de fuerza y de posición.** Un vector de posición está dirigido entre dos puntos. Puede ser formulado encontrando la distancia y la dirección que debemos desplazarnos a lo largo de los ejes x , y , z desde un punto (la cola) hasta el otro punto (la punta). Si la línea de acción de una fuerza pasa por esos dos puntos, entonces la fuerza actúa en la misma dirección \mathbf{u} que el vector de posición. La fuerza puede ser expresada como un vector cartesiano usando $\mathbf{F} = F\mathbf{u} = F(\mathbf{r}/r)$.
- **Producto punto.** El producto punto entre dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} se define por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$. Si \mathbf{A} y \mathbf{B} están expresados como vectores cartesianos, entonces $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$. En estática, el producto punto se usa para determinar el ángulo entre las colas de los vectores, es decir, $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}/AB)$. También se usa para determinar la componente proyectada de un vector \mathbf{A} sobre un eje definido por su vector unitario \mathbf{u} , de manera que $A = A \cos \theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$.

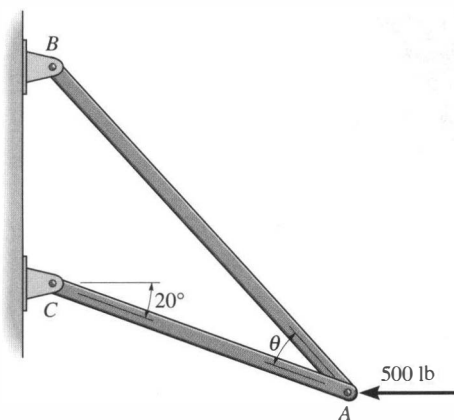
PROBLEMAS DE REPASO

2-133. Determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de \mathbf{F}_3 de modo que la resultante de las tres fuerzas actúe a lo largo del eje y y positivo y tenga una magnitud de 600 lb.

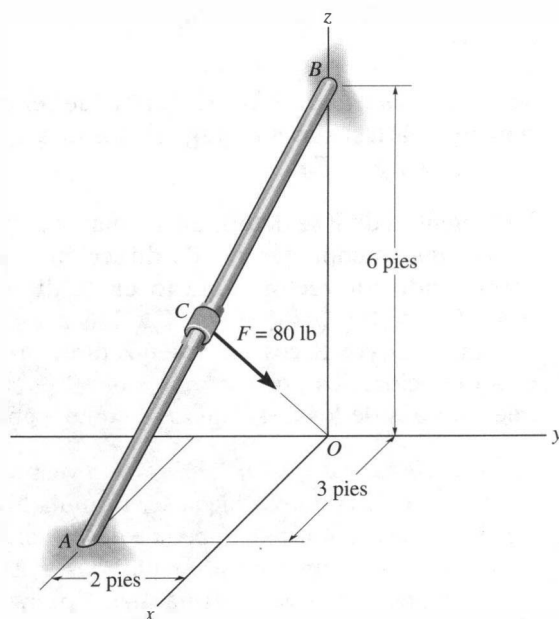
2-134. Determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de \mathbf{F}_3 de modo que la resultante de las tres fuerzas sea cero.



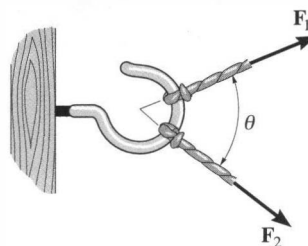
2-135. Determine el ángulo de diseño θ ($\theta < 90^\circ$) entre los dos puntales de manera que la fuerza horizontal de 500 lb tenga una componente de 600 lb dirigida de A hacia C . ¿Cuál es la componente de fuerza que actúa a lo largo de la barra BA ?



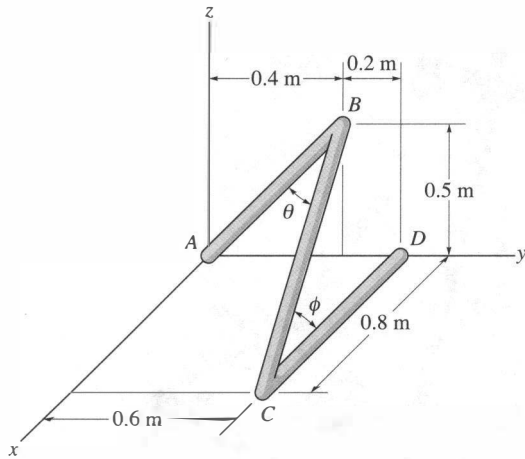
***2-136.** La fuerza \mathbf{F} tiene una magnitud de 80 lb y actúa en el punto medio C de la barra delgada. Expresar la fuerza como un vector cartesiano.



2-137. Dos fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 actúan sobre el gancho. Si sus líneas de acción forman un ángulo θ y la magnitud de cada fuerza es $F_1 = F_2 = F$, determine la magnitud de la fuerza resultante \mathbf{F}_R y el ángulo entre \mathbf{F}_R y \mathbf{F}_1 .

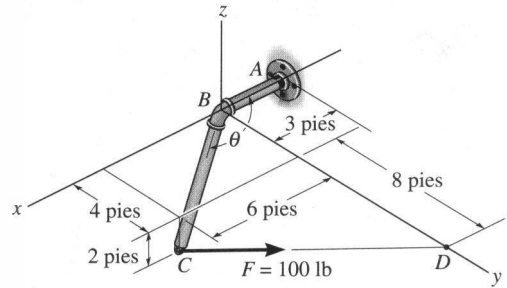


2-138. Determine los ángulos θ y ϕ entre los segmentos del alambre.



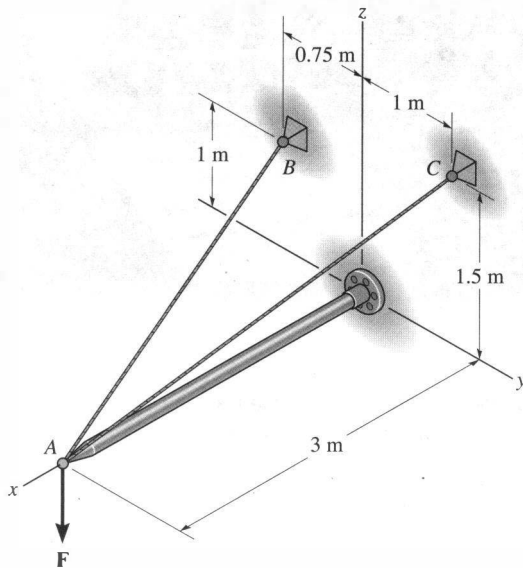
Prob. 2-138

*2-140. Determine la magnitud de la componente proyectada de la fuerza de 100 lb que actúa a lo largo del eje BC del tubo.



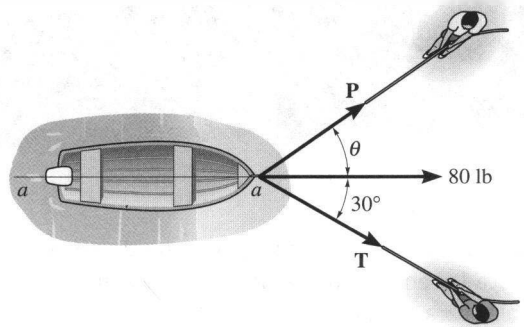
Prob. 2-140

2-139. Determine las magnitudes de las componentes proyectadas de la fuerza $\mathbf{F} = \{60\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 40\mathbf{k}\}$ N en la dirección de los cables AB y AC.



Prob. 2-139

2-141. El bote debe ser jalado a la orilla usando dos cuerdas. Si la fuerza resultante va a ser de 80 lb dirigida a lo largo de la quilla *aa*, como se muestra, determine las magnitudes de las fuerzas \mathbf{T} y \mathbf{P} que actúan en cada cuerda y el ángulo θ de modo que \mathbf{P} sea *mínima*. \mathbf{T} actúa a 30° desde la quilla como se muestra.



Prob. 2-141

CAPÍTULO 3

Equilibrio de una partícula

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Introducir el concepto de diagrama de cuerpo libre para una partícula.
- Mostrar cómo resolver problemas de equilibrio de partículas usando las ecuaciones de equilibrio.

3.1 Condiciones para el equilibrio de una partícula

Una partícula estará en *equilibrio* siempre que esté en reposo si originalmente estaba en reposo, o siempre que tenga una velocidad constante si originalmente estaba en movimiento. Sin embargo, más a menudo, el término “equilibrio” o, más específicamente, “equilibrio estático” se usa para describir un objeto en reposo. Para mantener el equilibrio, es *necesario* satisfacer la primera ley del movimiento de Newton, la cual requiere que la *fuerza resultante* que actúa sobre una partícula sea igual a *cero*. Esta condición puede ser establecida matemáticamente como

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3-1)$$

donde $\Sigma \mathbf{F}$ es el vector *suma de todas las fuerzas* que actúan sobre la partícula.

La ecuación 3-1 no sólo es una condición necesaria para el equilibrio, también es una condición *suficiente*. Esto es una consecuencia de la segunda ley del movimiento de Newton, la cual puede escribirse como $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Como el sistema de fuerzas satisface la ecuación 3-1, entonces $m\mathbf{a} = \mathbf{0}$, y por tanto la aceleración de la partícula $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. En consecuencia, la partícula se mueve con velocidad constante o permanece en reposo.

3.2 El diagrama de cuerpo libre

Para aplicar la ecuación de equilibrio, debemos tomar en cuenta *todas* las fuerzas conocidas y desconocidas ($\Sigma \mathbf{F}$) que actúan *sobre* la partícula. La mejor manera de hacer esto es trazando el *diagrama de cuerpo libre* de la partícula. Este diagrama es simplemente un croquis que muestra la partícula “libre” de su entorno con *todas* las fuerzas que actúan *sobre* ella.

Antes de presentar un procedimiento formal de cómo trazar un diagrama de cuerpo libre, consideraremos dos tipos de conexiones encontradas a menudo en problemas de equilibrio en partículas.

Resortes. Si un *resorte elástico lineal* se usa como soporte, su longitud cambiará en proporción directa a la fuerza que actúe en él. Una característica que define la “elasticidad” de un resorte es la *constante de resorte* o *rigidez* k . La magnitud de la fuerza ejercida en un resorte elástico lineal que tiene una rigidez k y es deformado (alargado o acortado) una distancia s , medida ésta desde su posición *descargada*, es

$$F = ks \quad (3-2)$$

Aquí s está determinada a partir de la diferencia de la longitud del resorte deformado l y su longitud no deformada l_0 , es decir, $s = l - l_0$. Si s es positiva, \mathbf{F} “jala” al resorte, mientras que si es negativa, \mathbf{F} lo “empuja”. Por ejemplo, el resorte mostrado en la figura 3-1 tiene una longitud no deformada $l_0 = 0.4$ m y rigidez $k = 500$ N/m. Para alargarlo de manera que $l = 0.6$ m, se requiere una fuerza $F = ks = (500 \text{ N/m})(0.6 \text{ m} - 0.4 \text{ m}) = 100$ N. De la misma manera, para acortarlo a una longitud $l = 0.2$ m, se requiere una fuerza $F = ks = (500 \text{ N/m})(0.2 \text{ m} - 0.4 \text{ m}) = -100$ N, figura 3-1.

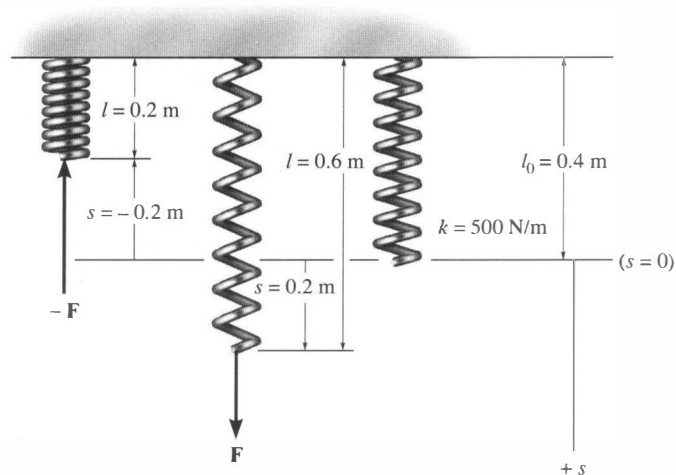
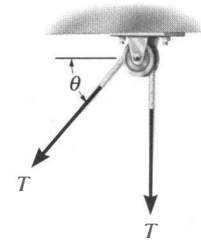


Fig. 3-1

Cables y poleas. En todo este libro, excepto en la sección 7.4, suponemos que todos los cables (o cuerdas) tienen peso insignificante y que no pueden estirarse. Además, un cable puede soportar *sólo* una tensión o jalón, y esta fuerza siempre actúa en la dirección del cable. En el capítulo 5 se mostrará que la fuerza de tensión desarrollada en un *cable continuo* que pasa sobre una polea sin fricción debe tener una magnitud *constante* para mantener al cable en equilibrio. Por tanto, para cualquier ángulo θ , mostrado en la figura 3-2, el cable está sometido a una tensión constante T en toda su longitud.



El cable está en tensión

Fig. 3-2

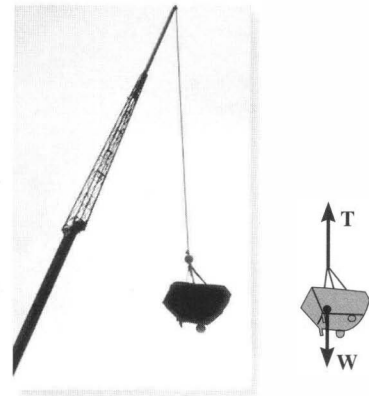
PROCEDIMIENTO PARA TRAZAR UN DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Como al aplicar las ecuaciones de equilibrio debemos tomar en cuenta *todas las fuerzas que actúan sobre una partícula*, debe enfatizarse la importancia de trazar primero un diagrama de cuerpo libre. Para construir un diagrama de cuerpo libre, son necesarios los siguientes tres pasos.

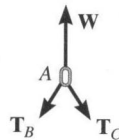
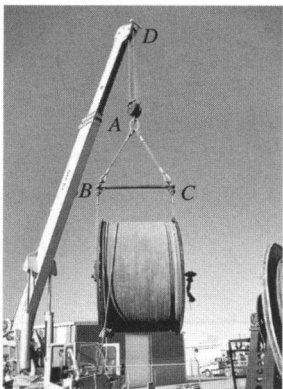
Trace la forma delineada. Suponga que la partícula está *aislada* o “liberada” de su entorno trazando su forma delineada.

Muestre todas las fuerzas. Indique sobre ese croquis *todas* las fuerzas que actúan *sobre la partícula*. Éstas pueden ser *fuerzas activas*, las cuales tienden a poner la partícula en movimiento, o *fuerzas reactivas*, que son el resultado de las restricciones o soportes que tienden a prevenir el movimiento. Para tomar en cuenta todas esas fuerzas, puede ser conveniente delimitar los alrededores de la partícula, señalando cuidadosamente cada fuerza que actúa sobre ella.

Identifique cada fuerza. Las fuerzas que son *conocidas* deben ser rotuladas con sus propias magnitudes y direcciones. Para representar las magnitudes y direcciones de las fuerzas desconocidas se usan letras.

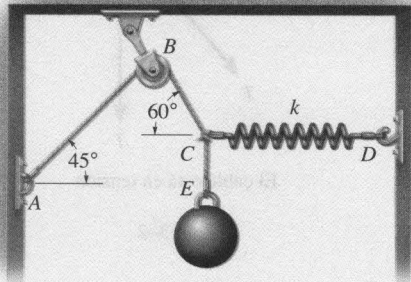


La cubeta se mantiene en equilibrio por el cable, e instintivamente sabemos que la fuerza en el cable debe ser igual al peso de la cubeta. Al trazar un diagrama de cuerpo libre de la cubeta podemos entender por qué esto es así. Este diagrama muestra que hay sólo dos fuerzas *actuando sobre la cubeta*, su peso W y la fuerza T del cable. Para obtener la posición de equilibrio, la resultante de esas fuerzas debe ser igual a cero, por lo que $T = W$. El punto importante es que al *aislar la cubeta*, la fuerza T desconocida en el cable resulta “expuesta” y debe ser considerada como un requisito para obtener el equilibrio.



Considere el carrete con peso W que está suspendido de la grúa. Si queremos obtener las fuerzas presentes en los cables AB y AC , podemos considerar el diagrama de cuerpo libre del anillo situado en A , ya que esas fuerzas actúan sobre el anillo. Aquí, los cables AD ejercen una fuerza resultante W sobre el anillo y la condición de equilibrio se usa para obtener T_B y T_C .

EJEMPLO 3.1



(a)

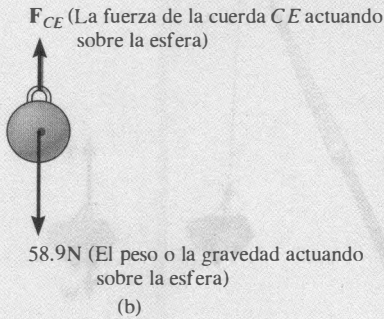
La esfera que aparece en la figura 3-3a tiene una masa de 6 kg y está soportada como se muestra. Trace un diagrama de cuerpo libre de la esfera, de la cuerda CE, y del nudo en C.

Solución

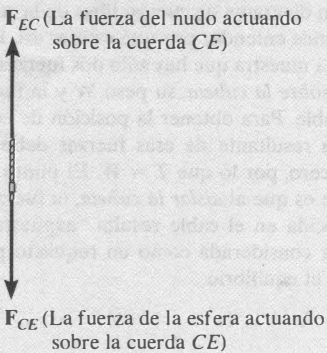
Esfera. Por inspección, hay sólo dos fuerzas actuando sobre la esfera: su peso y la fuerza en la cuerda CE. La esfera tiene un peso de $6 \text{ kg} (9.81 \text{ m/s}^2) = 58.9 \text{ N}$. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 3-3b.

Cuerda CE. Cuando la cuerda CE es aislada de su entorno, su diagrama de cuerpo libre muestra sólo dos fuerzas actuando sobre ella, a saber, la fuerza de la esfera y la fuerza del nudo, figura 3-3c. Advierta que la F_{CE} mostrada aquí es igual pero opuesta a la mostrada en la figura 3-3b, una consecuencia de la tercera ley de Newton. F_{CE} y F_{EC} jalan la cuerda y la mantienen en tensión de manera que no se colapse. Por equilibrio, $F_{CE} = F_{EC}$.

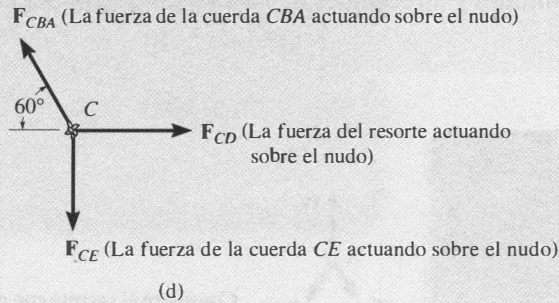
Nudo. El nudo en C está sometido a tres fuerzas, figura 3-3d. Éstas son causadas por las cuerdas CBA y CE y el resorte CD. Como es requerido, el diagrama de cuerpo libre muestra todas esas fuerzas rotuladas con sus magnitudes y direcciones. Es importante reconocer que el peso de la esfera no actúa directamente sobre el nudo, sino que la cuerda CE somete al nudo a esta fuerza.



(b)



(c)



(d)

Fig. 3-3

3.3 Sistemas de fuerzas coplanares

Si una partícula está sometida a un sistema de fuerzas coplanares que se encuentran en el plano $x-y$, figura 3-4, entonces cada fuerza puede ser resuelta en sus componentes \mathbf{i} y \mathbf{j} . Por equilibrio, la ecuación 3-1 puede escribirse como

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F} &= \mathbf{0} \\ \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Para que se satisfaga esta ecuación vectorial, ambas componentes x y y deben ser iguales a cero. Por tanto,

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0\end{aligned}\tag{3-3}$$

Estas *ecuaciones escalares de equilibrio* requieren que la *suma algebraica* de las componentes x y y de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula sea igual a cero. En consecuencia, las ecuaciones 3-3 pueden resolverse cuando mucho para dos incógnitas, representadas generalmente como ángulos y magnitudes de fuerzas mostradas sobre el diagrama de cuerpo libre de la partícula.

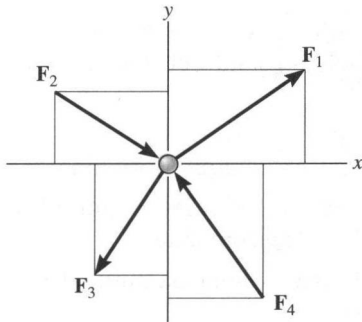
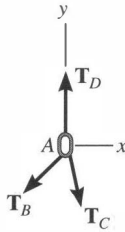
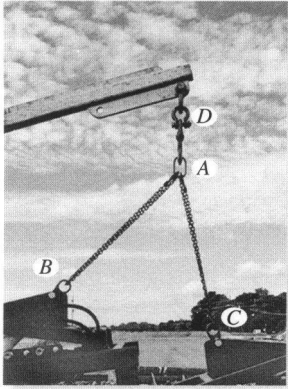


Fig. 3-4

Notación escalar. Como cada una de las dos ecuaciones de equilibrio requiere la resolución de componentes vectoriales a lo largo de un eje específico x o y , usaremos notación escalar para representar las componentes al aplicar esas ecuaciones. Al hacer esto, el sentido de cada componente es tomado en cuenta por un *signo algebraico* que corresponde a la dirección de la cabeza de flecha de la componente a lo largo de cada eje. Si una fuerza tiene *magnitud desconocida*, entonces el sentido de la cabeza de flecha de la fuerza sobre el diagrama de cuerpo libre puede ser *supuesto*. Como la magnitud de una fuerza es *siempre positiva*, entonces, si la *solución* da un *escalar negativo*, esto indica que el sentido de la fuerza actúa en la dirección opuesta.



Las cadenas ejercen tres fuerzas sobre el anillo localizado en A. El anillo no se moverá, o se moverá con velocidad constante, siempre que la suma de esas fuerzas a lo largo de los ejes x y y sobre el diagrama de cuerpo libre sea igual a cero. Si se conoce una de las tres fuerzas, las magnitudes de las otras dos pueden ser obtenidas a partir de las dos ecuaciones de equilibrio.



Fig. 3-5

Por ejemplo, considere el diagrama de cuerpo libre de la partícula sometida a las dos fuerzas mostradas en la figura 3-5. Aquí se *supone* que la fuerza desconocida F actúa hacia la derecha para mantener el equilibrio. Aplicando la ecuación de equilibrio a lo largo del eje x , tenemos

$$\pm \Sigma F_x = 0; \quad +F + 10 \text{ N} = 0$$

Ambos términos son “positivos” ya que las dos fuerzas actúan en la dirección x positiva. Cuando se resuelve esta ecuación, $F = -10 \text{ N}$. Aquí, el *signo negativo* indica que F debe actuar hacia la izquierda para mantener la partícula en equilibrio, figura 3-5. Observe que si el eje $+x$ en la figura 3-5 estuviese dirigido hacia la izquierda, en la ecuación anterior ambos términos serían negativos, pero de nuevo, después de resolverla, $F = -10 \text{ N}$, indicando de nuevo que F estaría dirigida hacia la izquierda.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Los problemas de equilibrio de fuerzas coplanares para una partícula pueden ser resueltos usando el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre.

- Establezca los ejes x , y en cualquier orientación apropiada.
- Rotule sobre el diagrama todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas conocidas y desconocidas.
- El sentido de una fuerza con una magnitud desconocida puede ser supuesto.

Ecuaciones de equilibrio.

- Aplique las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$.
- Las componentes son positivas si están dirigidas a lo largo de un eje positivo, y negativas si están dirigidas a lo largo de un eje negativo.
- Si existen más de dos incógnitas y el problema implica un resorte, aplique $F = ks$ para relacionar la fuerza del resorte con la deformación s del mismo.
- Si la solución produce un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza es el inverso del mostrado sobre el diagrama de cuerpo libre.

EJEMPLO 3.2

Determine la tensión en los cables AB y AD para mantener en equilibrio el motor de 250 kg mostrado en la figura 3-6a.

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Para resolver este problema, investigaremos el equilibrio del anillo localizado en A porque esta “partícula” está sometida a las fuerzas de ambos cables AB y AD . Primero, sin embargo, advierta que el motor tiene un peso de $(250 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 2.452 \text{ kN}$ que es soportado por el cable CA . Por tanto, como se muestra en la figura 3-6b, hay tres fuerzas concurrentes que actúan sobre el anillo. Las fuerzas T_B y T_D tienen magnitudes desconocidas pero direcciones conocidas, y el cable AC ejerce sobre A una fuerza hacia abajo igual a 2.452 kN.

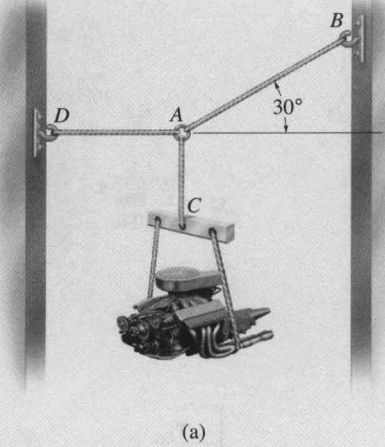
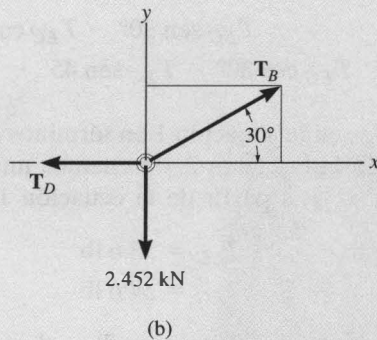


Fig. 3-6

Ecuaciones de equilibrio. Las dos magnitudes desconocidas T_B y T_D se pueden obtener a partir de las dos ecuaciones escalares de equilibrio, $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. Para aplicar estas ecuaciones, se establecen los ejes x, y sobre el diagrama de cuerpo libre, y T_B debe resolverse en sus componentes x y y . Entonces,

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad T_B \cos 30^\circ - T_D = 0 \quad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad T_B \sin 30^\circ - 2.452 \text{ kN} = 0 \quad (2)$$

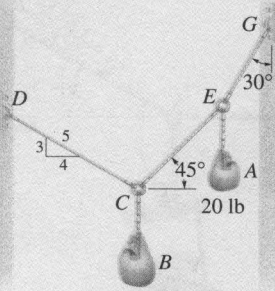
Al despejar T_B de la ecuación 2 y sustituirla en la ecuación 1 para obtener T_D resulta

$$T_B = 4.90 \text{ kN} \quad \text{Respuesta}$$

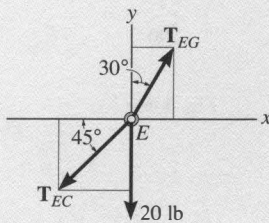
$$T_D = 4.25 \text{ kN} \quad \text{Respuesta}$$

La exactitud de esos resultados depende, por supuesto, de la exactitud de los datos, es decir, de las medidas geométricas y de las cargas. En la mayor parte de los trabajos de ingeniería que implican un problema como este, los datos medidos con tres cifras significativas serán adecuados. Observe que aquí hemos ignorado los pesos de los cables, lo que es razonable ya que son pequeños en comparación con el peso del motor.

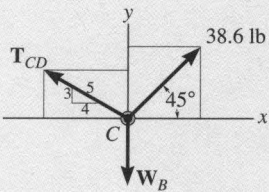
EJEMPLO 3.3



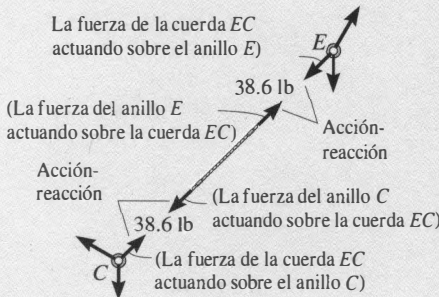
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 3-7

Si el saco localizado en *A* en la figura 3-7a tiene un peso de 20 lb, determine el peso del saco ubicado en *B* y la fuerza que se necesita en cada cuerda para mantener el sistema en equilibrio en la posición mostrada.

Solución

Como el peso de *A* es conocido, la tensión desconocida en las dos cuerdas *EG* y *EC* puede ser determinada investigando el equilibrio del anillo en *E*. ¿Por qué?

Diagrama de cuerpo libre. Hay tres fuerzas actuando sobre *E*, como se muestra en la figura 3-7b.

Ecuaciones de equilibrio. Al establecer los ejes *x*, *y* y resolver cada fuerza en sus componentes *x* y *y* usando trigonometría, tenemos

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad T_{EG} \text{ sen } 30^\circ - T_{EC} \text{ cos } 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad T_{EG} \text{ cos } 30^\circ - T_{EC} \text{ sen } 45^\circ - 20 \text{ lb} = 0 \quad (2)$$

Despejando T_{EG} en la ecuación 1 en términos de T_{EC} y sustituyendo el resultado en la ecuación 2, obtenemos una solución para T_{EC} . Luego se obtiene T_{EG} a partir de la ecuación 1. Los resultados son

$$T_{EC} = 38.6 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

$$T_{EG} = 54.6 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

Usando el resultado calculado para T_{EC} , el equilibrio del anillo localizado en *C* puede investigarse ahora para determinar la tensión en *CD* y el peso de *B*.

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 3-7c, $T_{EC} = 38.6 \text{ lb}$ “jalando” a *C*. La razón de esto resulta clara cuando se traza el diagrama de cuerpo libre de la cuerda *CE* y se aplican la condición de equilibrio y el principio de acción, que es igual pero opuesto a la fuerza de reacción (tercera ley de Newton), figura 3-7d.

Ecuaciones de equilibrio. Al establecer los ejes *x*, *y* y observar que las componentes de T_{CD} son proporcionales a la pendiente de la cuerda como está definida por el triángulo 3-4-5, tenemos

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 38.6 \text{ cos } 45^\circ \text{ lb} - \left(\frac{4}{5}\right)T_{CD} = 0 \quad (3)$$

$$\rightarrow \Sigma F_y = 0; \quad \left(\frac{3}{5}\right)T_{CD} + 38.6 \text{ sen } 45^\circ \text{ lb} - W_B = 0 \quad (4)$$

Al resolver la ecuación 3 y sustituir el resultado en la ecuación 4 resulta

$$T_{CD} = 34.2 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

$$W_B = 47.8 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 3.4

Determine la longitud requerida de la cuerda AC en la figura 3-8a de manera que la lámpara de 8 kg esté suspendida en la posición mostrada. La longitud *no deformada* del resorte AB es $l'_{AB} = 0.4$ m, y el resorte tiene rigidez $k_{AB} = 300$ N/m.

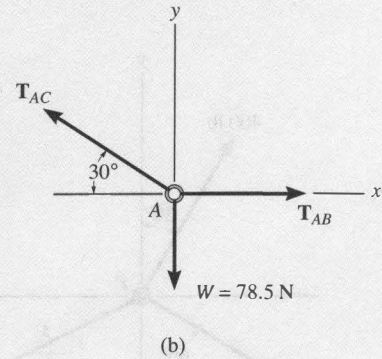
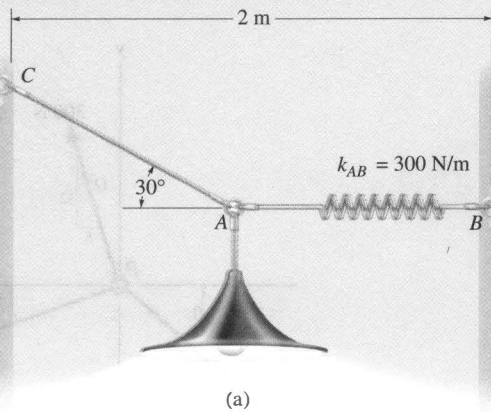


Fig. 3-8

Solución

Si se conoce la fuerza presente en el resorte AB , el alargamiento de éste puede hallarse usando $F = ks$. A partir de la geometría del problema, es posible calcular entonces la longitud requerida de AC .

Diagrama de cuerpo libre. La lámpara tiene un peso $W = 8(9.81) = 78.5$ N. El diagrama de cuerpo libre del anillo en A se muestra en la figura 3-8b.

Ecuaciones de equilibrio. Usando los ejes x, y ,

$$\begin{aligned} \pm \Sigma F_x = 0; & \quad T_{AB} - T_{AC} \cos 30^\circ = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; & \quad T_{AC} \sin 30^\circ - 78.5 \text{ N} = 0 \end{aligned}$$

Al resolver estas ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} T_{AC} &= 157.0 \text{ N} \\ T_{AB} &= 136.0 \text{ N} \end{aligned}$$

El alargamiento del resorte AB es entonces

$$\begin{aligned} T_{AB} = k_{AB}s_{AB}; & \quad 136.0 \text{ N} = 300 \text{ N/m}(s_{AB}) \\ & \quad s_{AB} = 0.453 \text{ m} \end{aligned}$$

por lo que la longitud alargada es

$$\begin{aligned} l_{AB} &= l'_{AB} + s_{AB} \\ l_{AB} &= 0.4 \text{ m} + 0.453 \text{ m} = 0.853 \text{ m} \end{aligned}$$

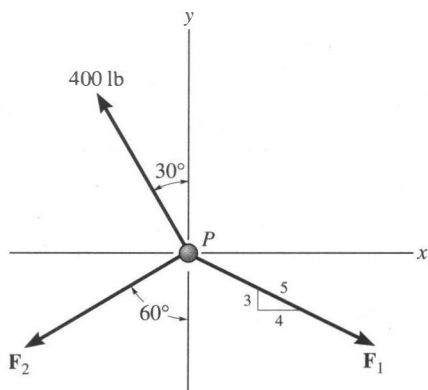
La distancia horizontal de C a B , figura 3-8a, requiere que

$$\begin{aligned} 2 \text{ m} &= l_{AC} \cos 30^\circ + 0.853 \text{ m} \\ l_{AC} &= 1.32 \text{ m} \end{aligned}$$

Resp.

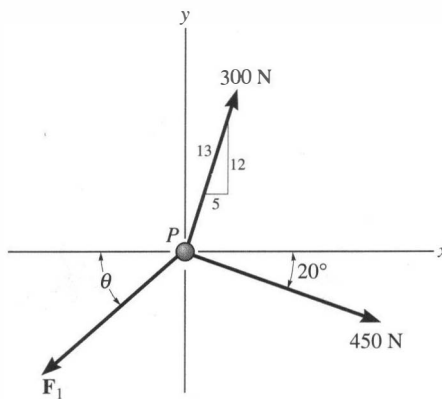
PROBLEMAS

3-1. Determine las magnitudes de F_1 y F_2 necesarias para que la partícula P esté en equilibrio.



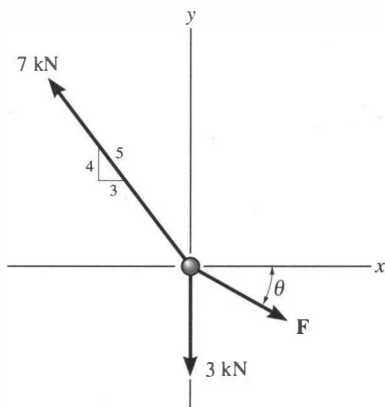
Prob. 3-1

3-3. Determine la magnitud y el ángulo θ de F_1 necesarios para que la partícula P esté en equilibrio.



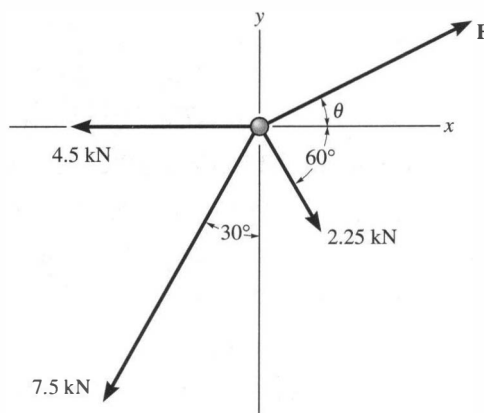
Prob. 3-3

3-2. Determine la magnitud y la dirección θ de F necesarias para que la partícula esté en equilibrio.



Prob. 3-2

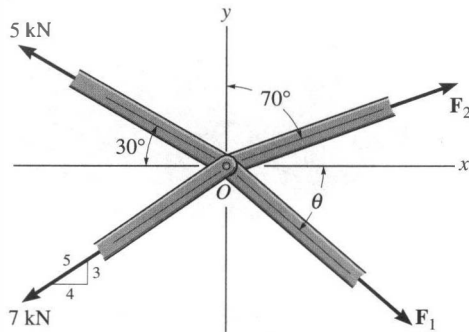
*3-4. Determine la magnitud y el ángulo θ de F necesarios para que la partícula esté en equilibrio.



Prob. 3-4

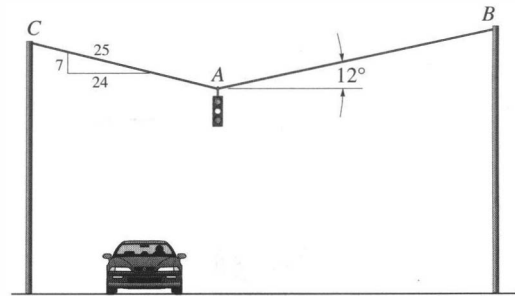
3-5. Las barras de una armadura están articuladas en el nudo O . Determine las magnitudes de F_1 y F_2 por equilibrio. Considere $\theta = 60^\circ$.

3-6. Las barras de una armadura están articuladas en el nudo O . Determine la magnitud de F_1 y su ángulo θ por equilibrio. Considere $F_2 = 6$ kN.



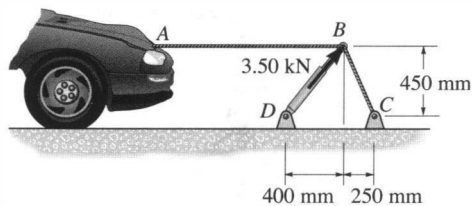
Probs. 3-5/6

*3-8. Determine la fuerza en los cables AB y AC necesaria para soportar el semáforo de 12 kg.



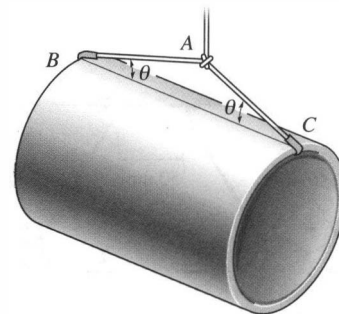
Prob. 3-8

3-7. El dispositivo mostrado se usa para enderezar los bastidores de autos chocados. Determine la tensión de cada segmento de la cadena, es decir, AB y BC , si la fuerza que el cilindro hidráulico DB ejerce sobre el punto B es de 3.50 kN, como se muestra.



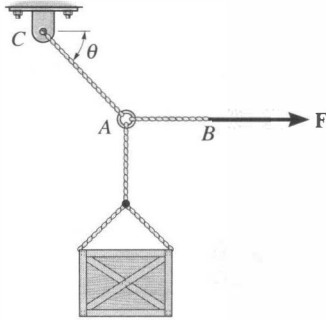
Prob. 3-7

3-9. Cada una de las cuerdas AB y AC puede sostener una tensión máxima de 800 lb. Si el tubo pesa 900 lb, determine el ángulo θ más pequeño con que las cuerdas pueden unirse a él.



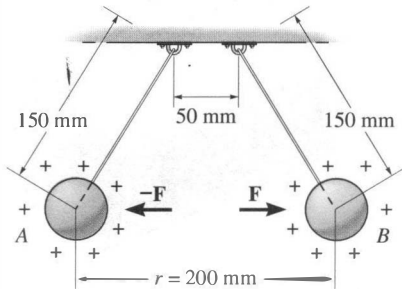
Prob. 3-9

3-10. El cajón de 500 lb va a ser levantado usando las cuerdas AB y AC . Cada cuerda puede resistir una tensión máxima de 2500 lb antes de romperse. Si AB siempre permanece horizontal, determine el ángulo θ más pequeño con que el cajón puede ser levantado.



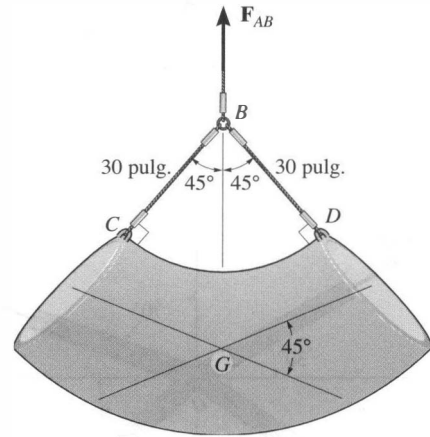
Prob. 3-10

3-11. Dos bolas cargadas eléctricamente, cada una con masa de 0.2 g, están suspendidas de cuerdas ligeras de igual longitud. Determine la fuerza horizontal resultante de repulsión, F , que actúa sobre cada bola si la distancia medida entre ellas es $r = 200$ mm.



Prob. 3-11

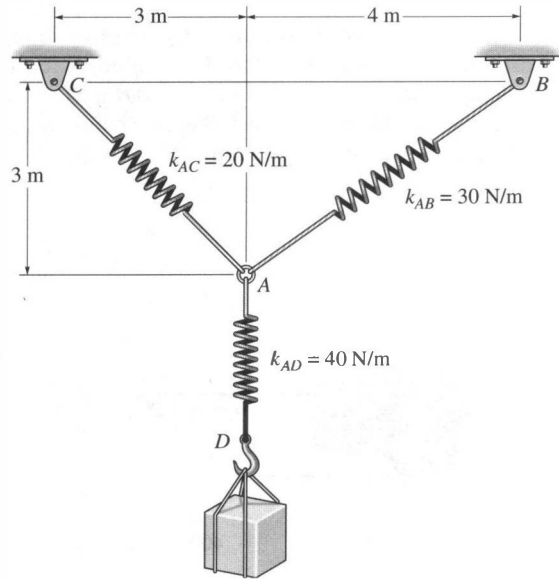
*3-12. El tubo en codo de concreto pesa 400 lb y su centro de gravedad se localiza en el punto G . Determine la fuerza necesaria en los cables AB y CD para soportarlo.



Prob. 3-12

3-13. Determine el alargamiento producido en cada resorte cuando el bloque de 2 kg está en equilibrio. Los resortes se muestran en posición de equilibrio.

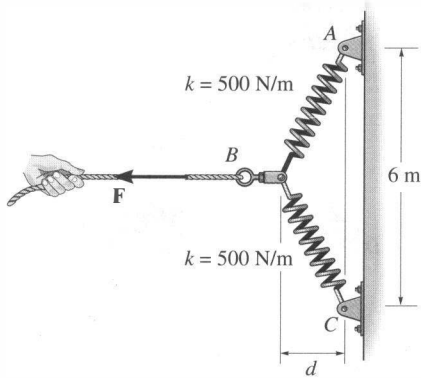
3-14. La longitud no alargada del resorte AB es de 2 m. Si el bloque es mantenido en la posición de equilibrio mostrada, determine la masa del bloque en D .



Probs. 3-13/14

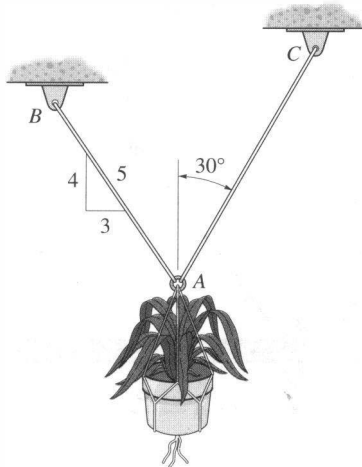
3-15. El resorte ABC tiene una rigidez de 500 N/m y longitud no alargada de 6 m . Determine la fuerza horizontal F aplicada a la cuerda que está unida a la pequeña polea en B cuando el desplazamiento de la polea con respecto a la pared es $d = 1.5 \text{ m}$.

***3-16.** El resorte ABC tiene una rigidez de 500 N/m y longitud no alargada de 6 m . Determine el desplazamiento d de la cuerda con respecto a la pared cuando se aplica una fuerza $F = 175 \text{ N}$ a la cuerda.



Probs. 3-15/16

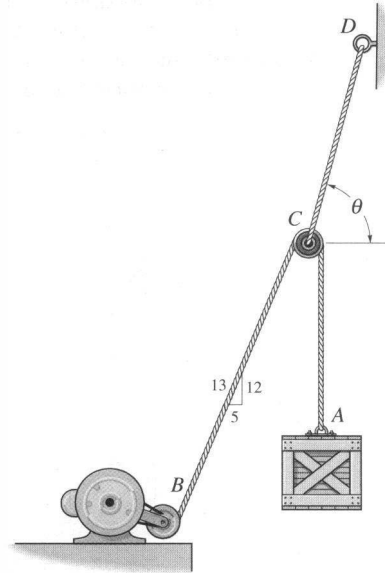
3-17. Determine el peso máximo de la maceta que puede ser soportado sin exceder una tensión en el cable de 50 lb en cualquiera de los cables AB o AC .



Prob. 3-17

3-18. El motor en B enrolla la cuerda unida a la caja de 65 lb con rapidez constante. Determine la fuerza en la cuerda CD que soporta la polea y el ángulo θ por equilibrio. Ignore el tamaño de la polea en C .

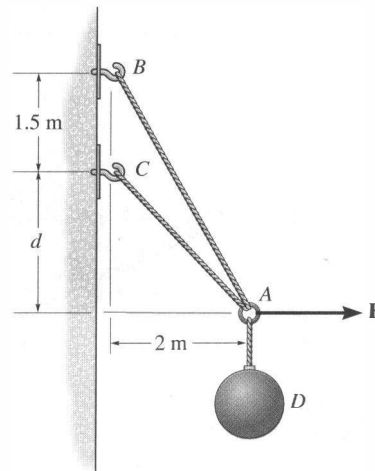
3-19. Cada una de las cuerdas BCA y CD puede soportar una carga máxima de 100 lb . Determine el peso máximo de la caja que puede ser levantado a velocidad constante, y el ángulo θ por equilibrio.



Probs. 3-18/19

***3-20.** Determine las fuerzas necesarias en los cables AC y AB para mantener la bola D de 20 kg en equilibrio. Considere $F = 300 \text{ N}$ y $d = 1 \text{ m}$.

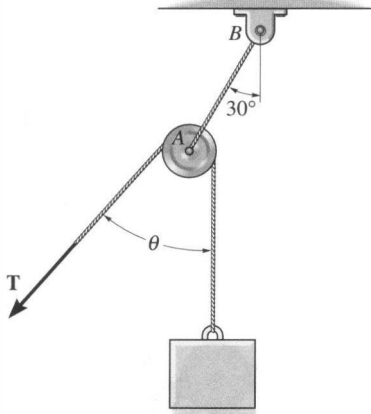
3-21. La bola D tiene masa de 20 kg . Si una fuerza $F = 100 \text{ N}$ se aplica horizontalmente al anillo localizado en A , determine la dimensión d más grande necesaria para que la fuerza en el cable AC sea igual a cero.



Probs. 3-20/21

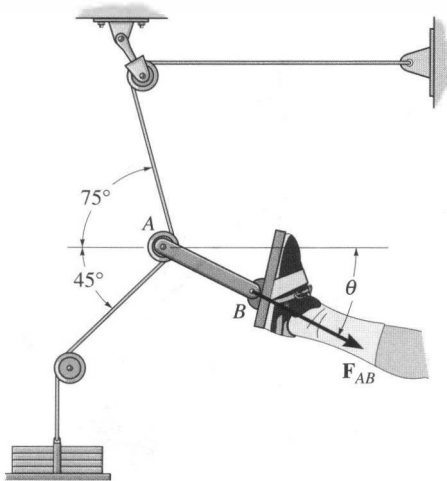
3-22. El bloque pesa 20 lb y está siendo levantado a velocidad uniforme. Determine el ángulo θ por equilibrio y la fuerza requerida en cada cuerda.

3-23. Determine el peso máximo W del bloque que puede ser suspendido en la posición mostrada si cada cuerda puede soportar una tensión máxima de 80 lb. ¿Cuál es el ángulo θ en la posición de equilibrio?



Probs. 3-22/23

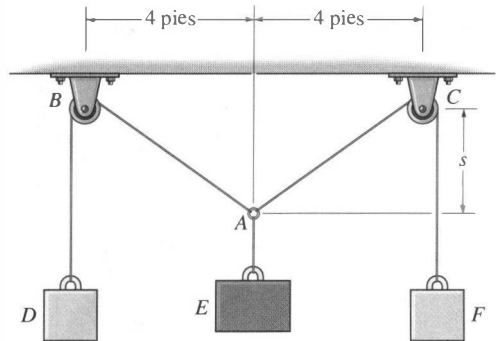
***3-24.** Determine la magnitud y la dirección θ de la fuerza de equilibrio F_{AB} ejercida a lo largo del eslabón AB por el aparato de tracción mostrado. La masa suspendida pesa 10 kg. Ignore el tamaño de la polea ubicada en A .



Prob. 3-24

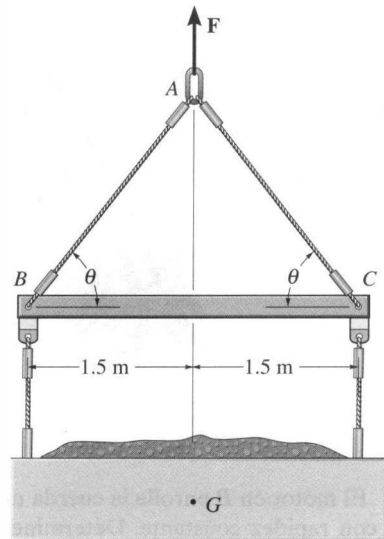
3-25. Los bloques D y F pesan 5 lb cada uno y el bloque E pesa 8 lb. Determine la deflexión s por equilibrio. Ignore el tamaño de las poleas.

3-26. Si los bloques D y F pesan 5 lb cada uno, determine el peso del bloque E si la deflexión $s = 3$ pies. Ignore el tamaño de las poleas.



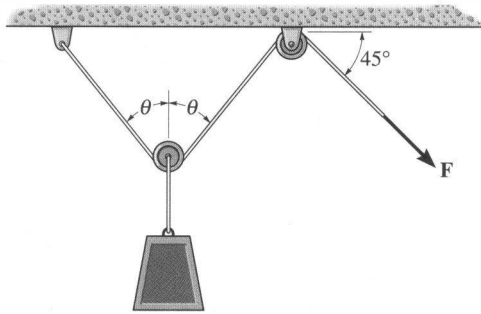
Probs. 3-25/26

3-27. La eslinga se usa para levantar un recipiente que tiene una masa de 500 kg. Determine la fuerza en cada uno de los cables AB y AC como función de θ . Si la tensión máxima permitida en cada cable es de 5 kN, determine las longitudes más cortas de los cables AB y AC que pueden usarse para efectuar el izado. El centro de gravedad del recipiente está en G .



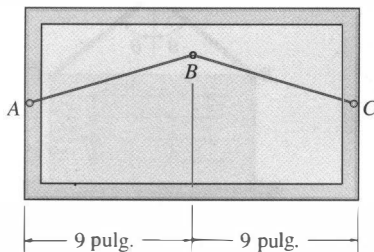
Prob. 3-27

***3-28.** La carga tiene una masa de 15 kg y es levantada por el sistema de poleas mostrado. Determine la fuerza F en la cuerda como función del ángulo θ . Grafique la función de fuerza F versus el ángulo θ para $0 \leq \theta \leq 90^\circ$.



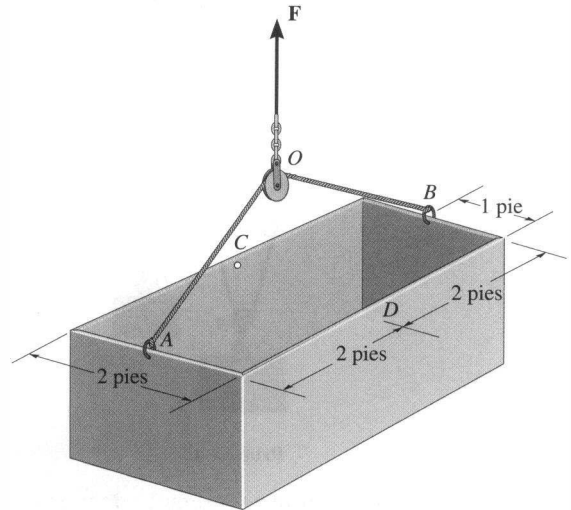
Prob. 3-28

3-29. El cuadro pesa 10 lb y va a ser colgado del pasador liso B . Si una cuerda es unida al marco en los puntos A y C , y la fuerza máxima que la cuerda puede soportar es de 15 lb, determine la cuerda más corta que puede usarse con seguridad.



Prob. 3-29

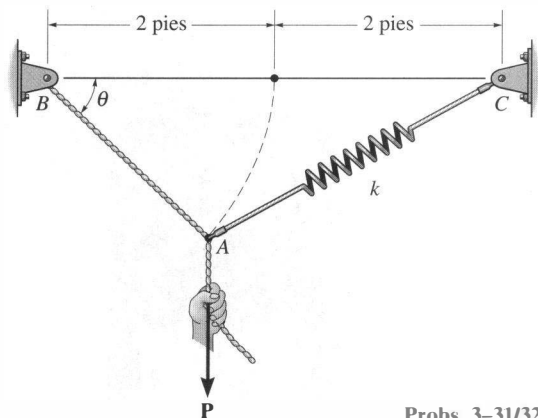
3-30. El tanque de dimensiones uniformes y peso de 200 lb está suspendido por medio de un cable de 6 pies de longitud que va unido a dos lados del tanque y pasa sobre la pequeña polea localizada en O . Si el cable puede ser unido a los puntos A y B o C y D , determine qué unión produce la menor tensión en el cable. ¿Cuál es esta tensión?



Prob. 3-30

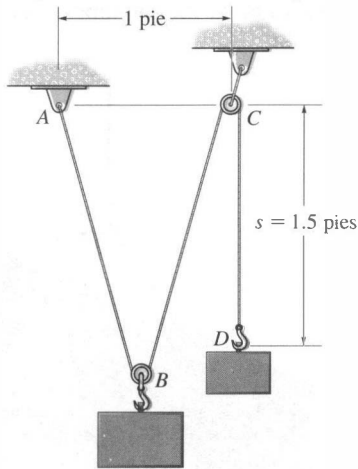
■ 3-31. Una fuerza vertical $P = 10$ lb es aplicada a los extremos de la cuerda AB de 2 pies y del resorte AC . Si el resorte tiene una longitud no alargada de 2 pies, determine el ángulo θ por equilibrio. Considere $k = 15$ lb/pie.

***3-32.** Determine la longitud no alargada del resorte AC si una fuerza $P = 80$ lb genera el ángulo $\theta = 60^\circ$ en la posición de equilibrio. La cuerda AB tiene 2 pies de longitud. Considere $k = 50$ lb/pie.



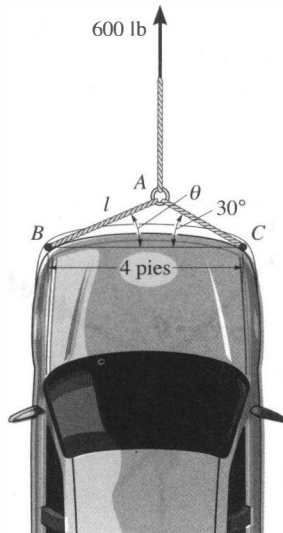
Probs. 3-31/32

■ 3-33. Se construye una “escala” con una cuerda de 4 pies de longitud y el bloque D de 10 lb. La cuerda está fija a un pasador situado en A y pasa sobre dos pequeñas poleas. Determine el peso del bloque B suspendido si el sistema está en equilibrio cuando $s = 1.5$ pies.



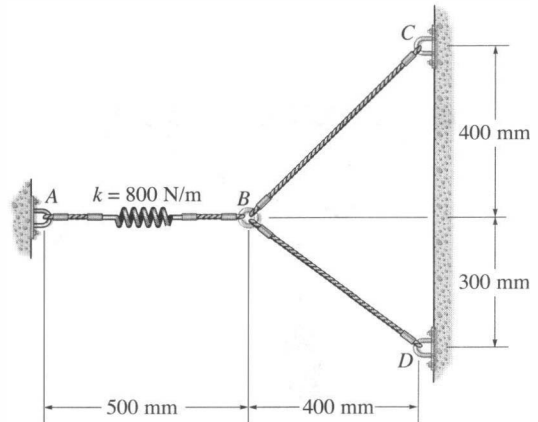
Prob. 3-33

■ 3-34. Un automóvil va a ser remolcado usando el arreglo de cuerdas que se muestra. La fuerza de remolque requerida es de 600 lb. Determine la longitud l mínima de cuerda AB para que la tensión en las cuerdas AB o AC no exceda de 750 lb. *Sugerencia:* Use la condición de equilibrio en el punto A para determinar el ángulo θ requerido para la conexión, luego determine l usando trigonometría aplicada al triángulo ABC .



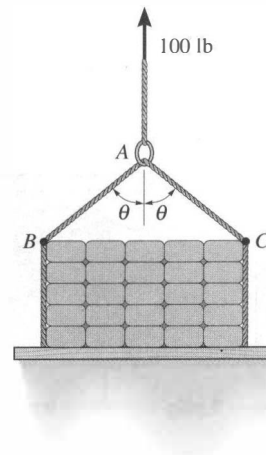
Prob. 3-34

■ 3-35. El resorte tiene una rigidez $k = 800$ N/m y longitud no alargada de 200 mm. Determine la fuerza en los cables BC y BD cuando el resorte se mantiene en la posición mostrada.



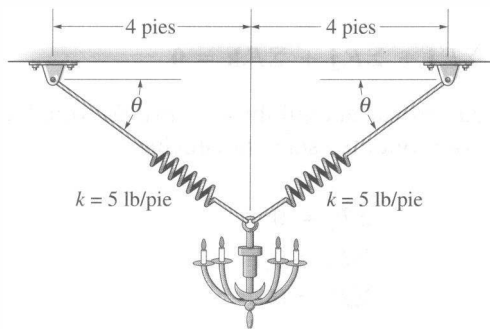
Prob. 3-35

*3-36. La eslinga BAC se usa para izar la carga de 100 lb con velocidad constante. Determine la fuerza en la eslinga y grafique su valor T (ordenada) como función de su orientación θ , donde $0 \leq \theta \leq 90^\circ$.



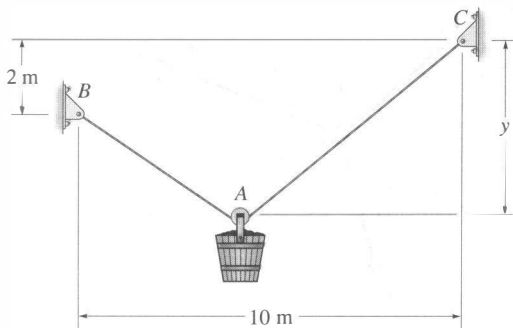
Prob. 3-36

■ 3-37. La lámpara de 10 lb está suspendida de dos resortes, cada uno con longitud no alargada de 4 pies y rigidez $k = 5$ lb/pie. Determine el ángulo θ por equilibrio.



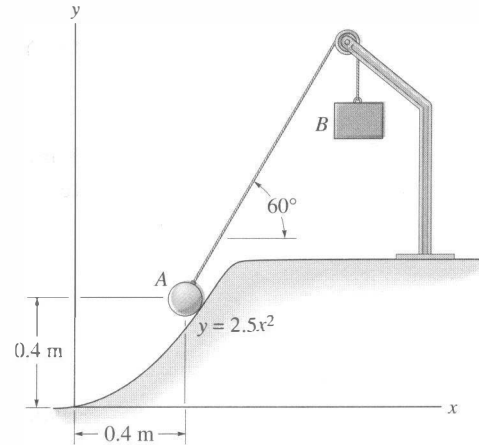
Prob. 3-37

3-38. La cubeta y su contenido tienen una masa de 60 kg. Si el cable tiene 15 m de longitud, determine la distancia y de la polea por equilibrio. Ignore el tamaño de la polea ubicada en A.



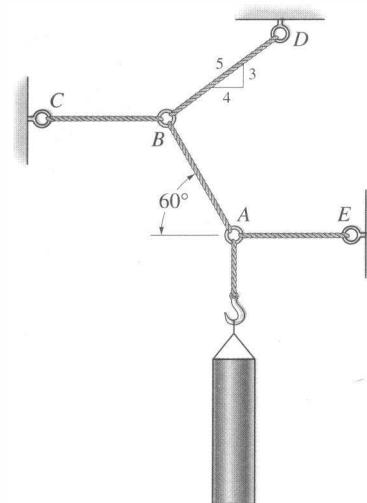
Prob. 3-38

3-39. Una esfera de 4 kg descansa sobre la superficie parabólica lisa mostrada. Determine la fuerza normal que ejerce la esfera sobre la superficie y la masa m_B del bloque B necesaria para mantenerla en la posición de equilibrio que aparece en la figura.



Prob. 3-39

*3-40. El tubo de 30 kg está soportado en A por un sistema de cinco cuerdas. Determine la fuerza necesaria en cada cuerda para obtener el equilibrio.



Prob. 3-40

3.4 Sistemas tridimensionales de fuerzas

Para el equilibrio de una partícula se requiere

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3-4)$$

Si las fuerzas son resueltas en sus respectivas componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , figura 3-9, tenemos entonces

$$\Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Por consiguiente, para garantizar el equilibrio, es preciso que las siguientes tres ecuaciones de componentes sean satisfechas:

$$\begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \end{array} \quad (3-5)$$

Estas ecuaciones representan las *sumas algebraicas* de las componentes x , y , z de fuerza que actúan sobre la partícula. Usándolas podemos resolver un máximo de tres incógnitas representadas generalmente como ángulos o magnitudes de fuerzas mostradas sobre el diagrama de cuerpo libre de la partícula.

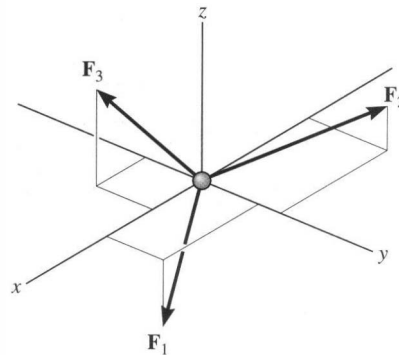
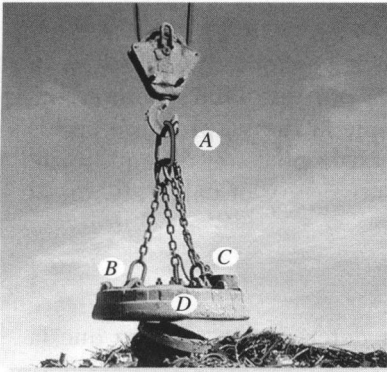


Fig. 3-9



El anillo en A está sometido a la fuerza del gancho así como a las fuerzas de cada una de las tres cadenas. Si el electroimán y su carga tienen un peso W , entonces la fuerza del gancho será W , y las tres ecuaciones escalares de equilibrio pueden ser aplicadas al diagrama de cuerpo libre del anillo para determinar las fuerzas en las cadenas, F_B , F_C y F_D .

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Los problemas de equilibrio tridimensional de fuerzas para una partícula pueden ser resueltos usando el siguiente procedimiento.

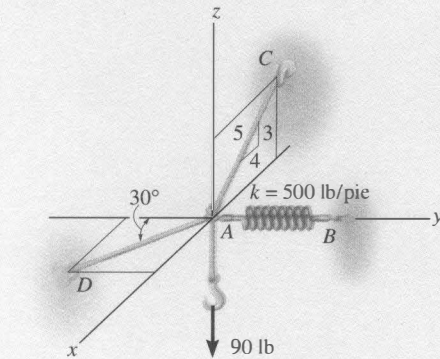
Diagrama de cuerpo libre

- Establezca los ejes x , y , z con cualquier orientación apropiada.
- Rotule todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas conocidas y desconocidas sobre el diagrama.
- El sentido de una fuerza que tenga magnitud desconocida puede ser supuesto.

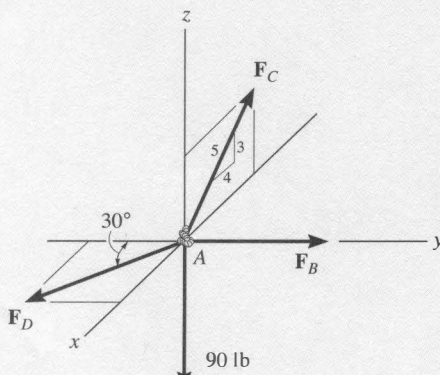
Ecuaciones de equilibrio

- Use las ecuaciones escalares de equilibrio, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$, en los casos en que sea fácil resolver cada fuerza en sus componentes x , y , z .
- Si la geometría tridimensional parece difícil, entonces exprese primero cada fuerza como un vector cartesiano, sustituya esos vectores en $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$, y luego haga las componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} igual a cero.
- Si la solución da un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza es el inverso del mostrado en el diagrama de cuerpo libre.

EJEMPLO 3.5



(a)



(b)

Fig. 3-10

Una carga de 90 lb está suspendida del gancho mostrado en la figura 3-10a. La carga está soportada por dos cables y un resorte con rigidez $k = 500$ lb/pie. Determine la fuerza presente en los cables y el alargamiento del resorte en la posición de equilibrio. El cable AD se encuentra en el plano $x-y$ y el cable AC en el plano $x-z$.

Solución

El alargamiento del resorte puede ser determinado una vez que la fuerza presente en él sea calculada.

Diagrama de cuerpo libre. La conexión en A es la seleccionada para el análisis del equilibrio ya que las fuerzas presentes en los cables son concurrentes en este punto. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 3-10b.

Ecuaciones de equilibrio. Por inspección, cada fuerza puede ser resuelta fácilmente en sus componentes x , y , z , y, por tanto, es posible aplicar directamente las tres ecuaciones escalares de equilibrio. Considerando las componentes dirigidas a lo largo de los ejes positivos como “positivas”, tenemos

$$\Sigma F_x = 0; \quad F_D \sin 30^\circ - \frac{4}{5}F_C = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad -F_D \cos 30^\circ + F_B = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad \frac{3}{5}F_C - 90 \text{ lb} = 0 \quad (3)$$

Despejando F_C de la ecuación 3, luego F_D de la ecuación 1, y finalmente F_B de la ecuación 2, obtenemos

$$F_C = 150 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

$$F_D = 240 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

$$F_B = 208 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

El alargamiento del resorte es entonces

$$F_B = k s_{AB}$$

$$208 \text{ lb} = 500 \text{ lb/pie}(s_{AB})$$

$$s_{AB} = 0.416 \text{ pies} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 3.6

Determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de la fuerza \mathbf{F} en la figura 3-11a que son requeridos para obtener el equilibrio de la partícula O .

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Sobre la partícula O actúan cuatro fuerzas, figura 3-11b.

Ecuaciones de equilibrio. Cada una de las fuerzas puede ser expresada en forma vectorial cartesiana, y las ecuaciones de equilibrio pueden ser aplicadas para determinar las componentes x, y, z de \mathbf{F} . Observando que las coordenadas de B son $B(-2 \text{ m}, -3 \text{ m}, 6 \text{ m})$, tenemos

$$\mathbf{F}_1 = \{400\mathbf{j}\} \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_2 = \{-800\mathbf{k}\} \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_3 = F_3 \left(\frac{\mathbf{r}_B}{r_B} \right) = 700 \text{ N} \left[\frac{-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (6)^2}} \right]$$

$$= \{-200\mathbf{i} - 300\mathbf{j} + 600\mathbf{k}\} \text{ N}$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

Por equilibrio,

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$400\mathbf{j} - 800\mathbf{k} - 200\mathbf{i} - 300\mathbf{j} + 600\mathbf{k} + F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Al igualar las respectivas componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ a cero, tenemos

$$\Sigma F_x = 0; \quad -200 + F_x = 0 \quad F_x = 200 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad 400 - 300 + F_y = 0 \quad F_y = -100 \text{ N}$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad -800 + 600 + F_z = 0 \quad F_z = 200 \text{ N}$$

Entonces,

$$\mathbf{F} = \{200\mathbf{i} - 100\mathbf{j} + 200\mathbf{k}\} \text{ N}$$

$$F = \sqrt{(200)^2 + (-100)^2 + (200)^2} = 300 \text{ N}$$

$$\mathbf{u}_F = \frac{\mathbf{F}}{F} = \frac{200}{300}\mathbf{i} - \frac{100}{300}\mathbf{j} + \frac{200}{300}\mathbf{k}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{200}{300}\right) = 48.2^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-100}{300}\right) = 109^\circ$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{200}{300}\right) = 48.2^\circ$$

La magnitud y la dirección correctas de \mathbf{F} se muestran en la figura 3-11c.

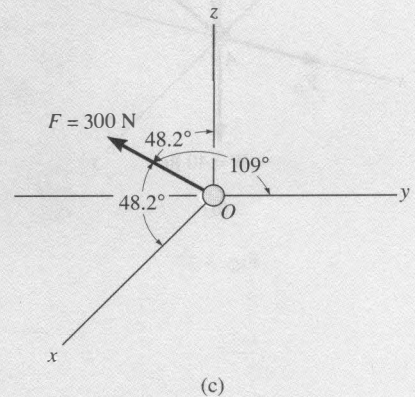
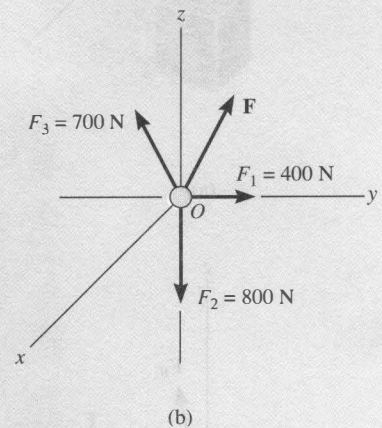
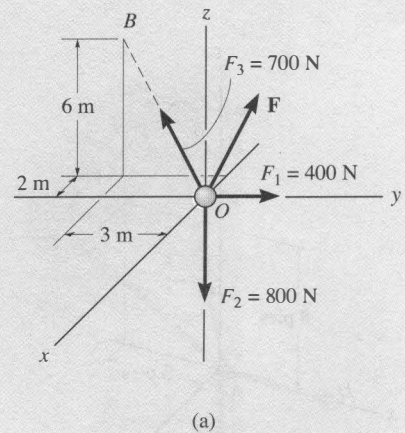
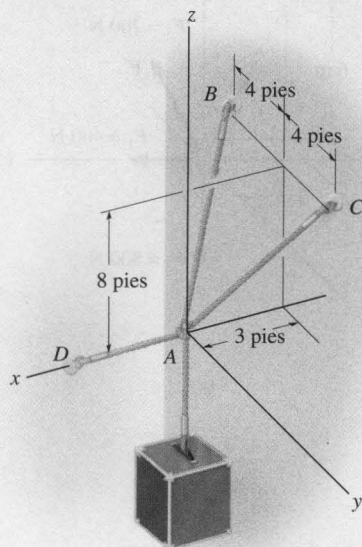
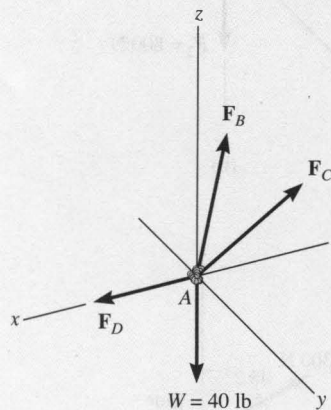


Fig. 3-11

EJEMPLO 3.7



(a)



(b)

Fig. 3-12

Determine la fuerza desarrollada en cada cable usado para soportar el cajón de 40 lb que se muestra en la figura 3-12a.

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Como se aprecia en la figura 3-12b, el diagrama de cuerpo libre del punto A es considerado para “exponer” las tres fuerzas desconocidas en los cables.

Ecuaciones de equilibrio. Primero expresaremos cada fuerza en forma vectorial cartesiana. Como las coordenadas de los puntos B y C son $B(-3 \text{ pies}, -4 \text{ pies}, 8 \text{ pies})$ y $C(-3 \text{ pies}, 4 \text{ pies}, 8 \text{ pies})$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_B &= F_B \left[\frac{-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (8)^2}} \right] \\ &= -0.318F_B\mathbf{i} - 0.424F_B\mathbf{j} + 0.848F_B\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C &= F_C \left[\frac{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (8)^2}} \right] \\ &= -0.318F_C\mathbf{i} + 0.424F_C\mathbf{j} + 0.848F_C\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_D = F_D\mathbf{i}$$

$$\mathbf{W} = \{-40\mathbf{k}\} \text{ lb}$$

Por equilibrio se requiere que

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} &= \mathbf{0}; & \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{W} &= \mathbf{0} \\ & -0.318F_B\mathbf{i} - 0.424F_B\mathbf{j} + 0.848F_B\mathbf{k} - 0.318F_C\mathbf{i} + 0.424F_C\mathbf{j} \\ & \quad + 0.848F_C\mathbf{k} + F_D\mathbf{i} - 40\mathbf{k} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Al igualar las respectivas componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} a cero resulta

$$\Sigma F_x = 0; \quad -0.318F_B - 0.318F_C + F_D = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad -0.424F_B + 0.424F_C = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad 0.848F_B + 0.848F_C - 40 = 0 \quad (3)$$

La ecuación 2 establece que $F_B = F_C$. Entonces, despejando F_B y F_C de la ecuación 3 y sustituyendo el resultado en la ecuación 1 para obtener F_D , tenemos

$$F_B = F_C = 23.6 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

$$F_D = 15.0 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 3.8

El cajón de 100 kg mostrado en la figura 3-13a está soportado por tres cuerdas, una de las cuales se conecta a un resorte. Determine la tensión en las cuerdas AC y AD , así como el alargamiento del resorte.

Solución

Diagrama de cuerpo libre. La fuerza presente en cada una de las cuerdas puede ser determinada investigando el equilibrio del punto A . El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 3-13b. El peso del cajón es $W = 100(9.81) = 981$ N.

Ecuaciones de equilibrio. Cada vector trazado en el diagrama de cuerpo libre se expresa primero en forma vectorial cartesiana. Usando la ecuación 2-11 para \mathbf{F}_C y el punto $D(-1$ m, 2 m, 2 m) para \mathbf{F}_D , tenemos

$$\mathbf{F}_B = F_B \mathbf{i}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C &= F_C \cos 120^\circ \mathbf{i} + F_C \cos 135^\circ \mathbf{j} + F_C \cos 60^\circ \mathbf{k} \\ &= -0.5F_C \mathbf{i} - 0.707F_C \mathbf{j} + 0.5F_C \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_D &= F_D \left[\frac{-1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2}} \right] \\ &= -0.333F_D \mathbf{i} + 0.667F_D \mathbf{j} + 0.667F_D \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\mathbf{W} = \{-981\mathbf{k}\} \text{ N}$$

Por equilibrio se requiere que

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{W} = \mathbf{0} \\ F_B \mathbf{i} - 0.5F_C \mathbf{i} - 0.707F_C \mathbf{j} + 0.5F_C \mathbf{k} - 0.333F_D \mathbf{i} + 0.667F_D \mathbf{j} \\ + 0.667F_D \mathbf{k} - 981\mathbf{k} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Al igualar las respectivas componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} a cero resulta

$$\Sigma F_x = 0; \quad F_B - 0.5F_C - 0.333F_D = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad -0.707F_C + 0.667F_D = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad 0.5F_C + 0.667F_D - 981 = 0 \quad (3)$$

Despejando F_D en la ecuación 2 en términos de F_C , y sustituyendo este resultado en la ecuación 3, se obtiene F_C . F_D se determina con la ecuación 2. Finalmente, al sustituir los resultados en la ecuación 1 resulta F_B . Por consiguiente,

$$F_C = 813 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$F_D = 862 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$F_B = 693.7 \text{ N}$$

El alargamiento del resorte es entonces

$$\begin{aligned} F = ks; \quad 693.7 &= 1500s \\ s &= 0.462 \text{ m} \end{aligned}$$

Resp.

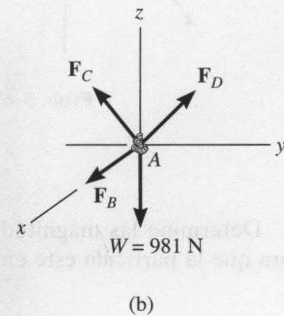
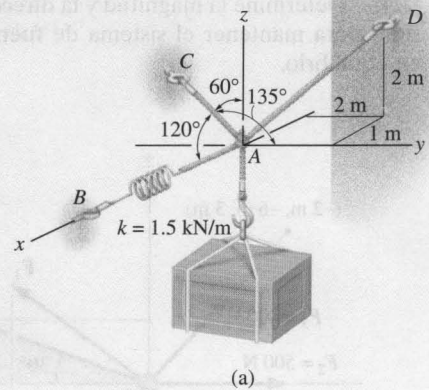
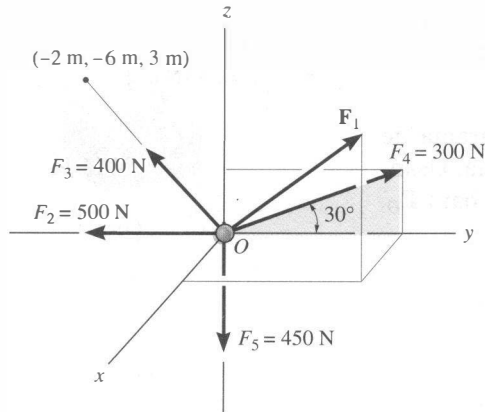


Fig. 3-13

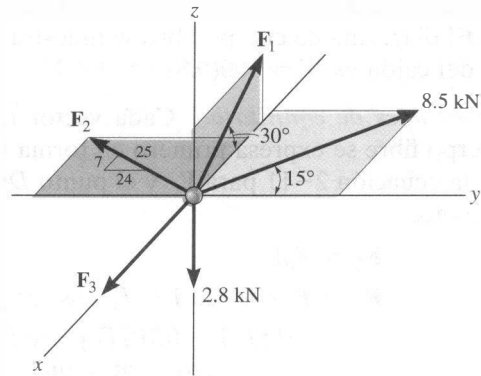
PROBLEMAS

3-41. Determine la magnitud y la dirección de \mathbf{F}_1 requeridas para mantener el sistema de fuerzas concurrentes en equilibrio.



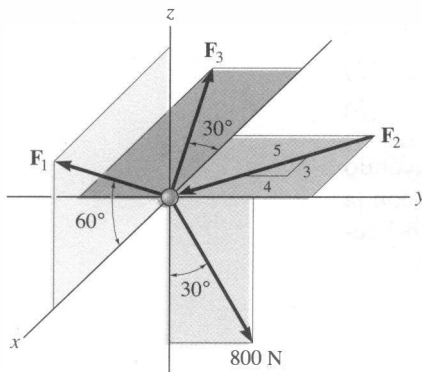
Prob. 3-41

3-43. Determine las magnitudes necesarias de \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_3 para que la partícula esté en equilibrio.



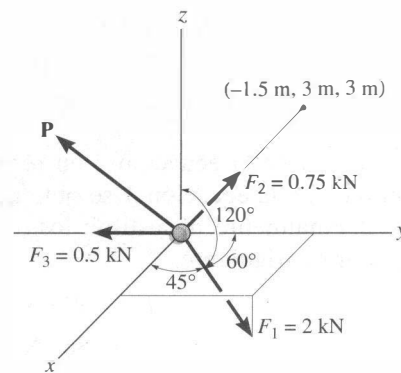
Prob. 3-43

3-42. Determine las magnitudes necesarias de \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_3 para que la partícula esté en equilibrio.



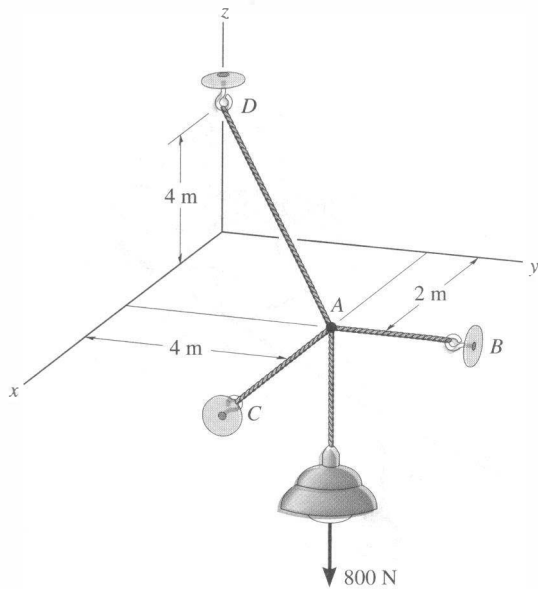
Prob. 3-42

*3-44. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza \mathbf{P} requerida para mantener el sistema de fuerzas concurrentes en equilibrio.



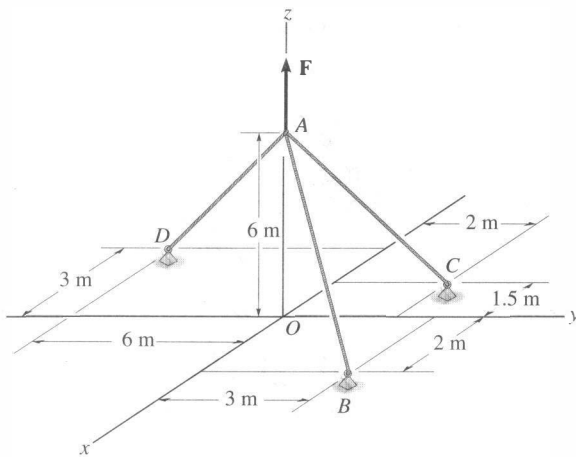
Prob. 3-44

3-45. Los tres cables se usan para dar soporte a la lámpara de 800 N. Determine la fuerza desarrollada en cada cable en la posición de equilibrio.



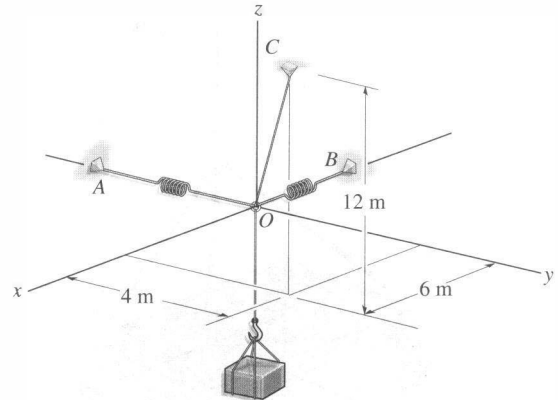
Prob. 3-45

3-46. Si el cable AB está sometido a una tensión de 700 N, determine la tensión presente en los cables AC y AD y la magnitud de la fuerza vertical F .



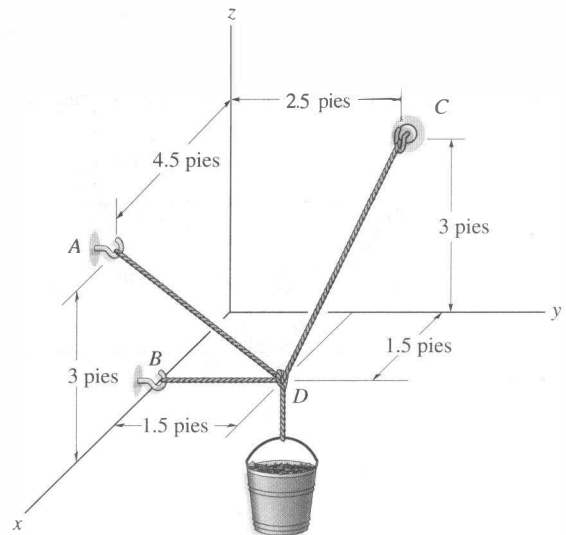
Prob. 3-46

3-47. Determine el alargamiento de cada uno de los dos resortes requeridos para mantener el cajón de 20 kg en la posición de equilibrio mostrada. Cada resorte tiene una longitud no alargada de 2 m y rigidez $k = 300 \text{ N/m}$.



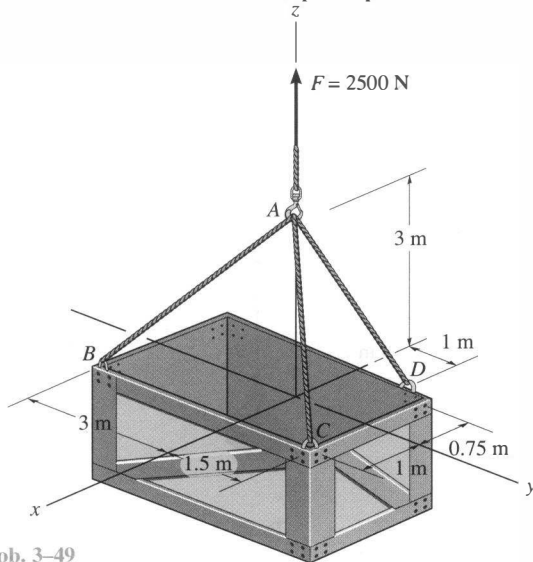
Prob. 3-47

*3-48. Si la cubeta y su contenido tienen un peso total de 20 lb, determine la fuerza presente en los cables de soporte DA , DB y DC .



Prob. 3-48

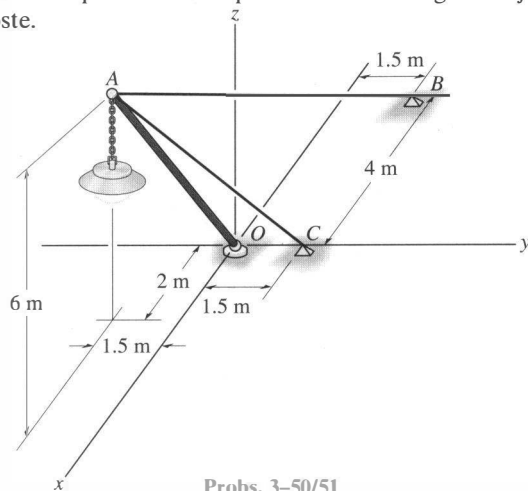
■ 3-49. La caja de 2500 N va a ser levantada, con velocidad constante, desde la bodega de un buque usando el arreglo de cables que se muestra. Determine la tensión en cada uno de los tres cables por equilibrio.



Prob. 3-49

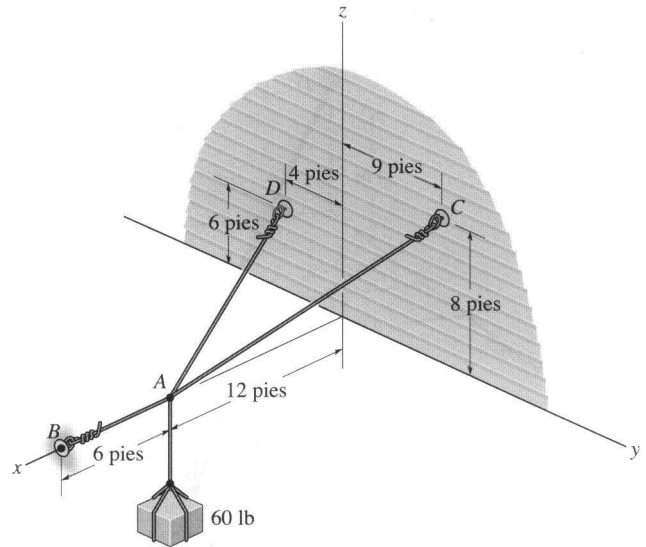
■ 3-50. La lámpara tiene masa de 15 kg y está soportada por un poste AO y los cables AB y AC . Si la fuerza presente en el poste actúa a lo largo de su eje, determine las fuerzas en AO , AB y AC por equilibrio.

3-51. Los cables AB y AC pueden soportar una tensión máxima de 500 N, y el poste soporta una compresión máxima de 300 N. Determine el peso máximo de una lámpara para que pueda ser sostenida en la posición mostrada. La fuerza presente en el poste actúa a lo largo del eje del poste.



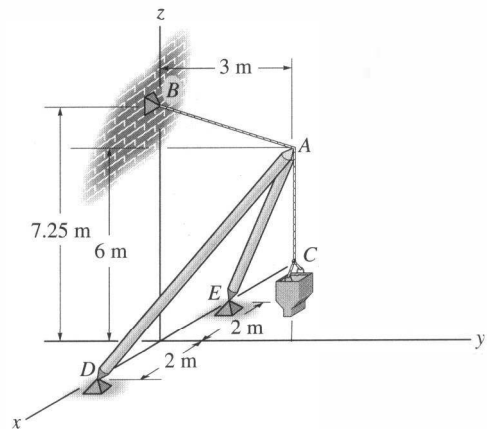
Probs. 3-50/51

*3-52. Determine la tensión presente en los cables AB , AC y AD , los cuales son requeridos para mantener la caja de 60 lb en equilibrio.



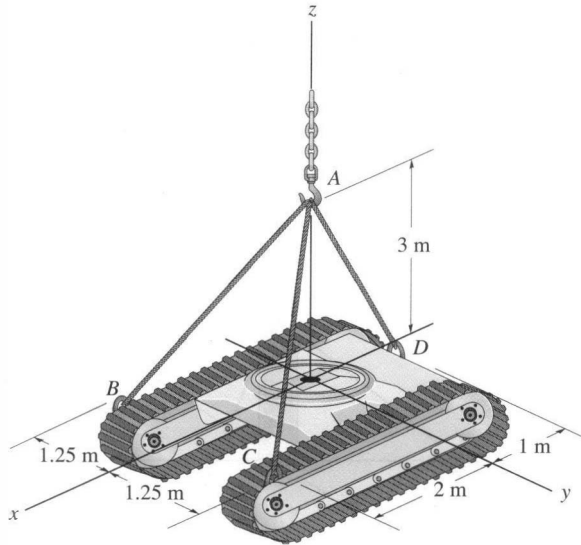
Prob. 3-52

3-53. El cable AC soporta una cubeta y su contenido que tienen una masa total de 300 kg. Determine las fuerzas desarrolladas en los puntales AD y AE y la tensión en el cable AB en la posición de equilibrio. La fuerza en cada puntal actúa a lo largo de su eje.



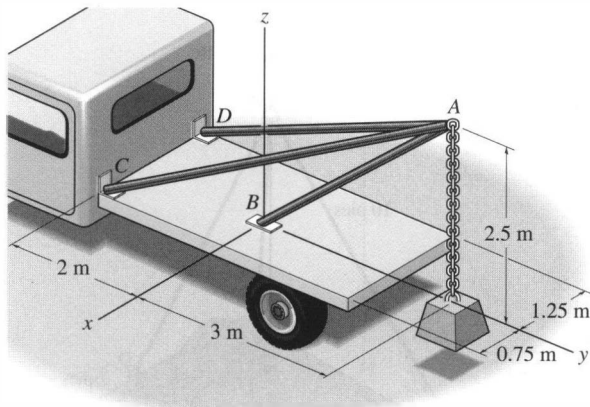
Prob. 3-53

3-54. Determine la fuerza necesaria en cada uno de los tres cables para elevar el tractor que tiene una masa de 8 Mg.



Prob. 3-54

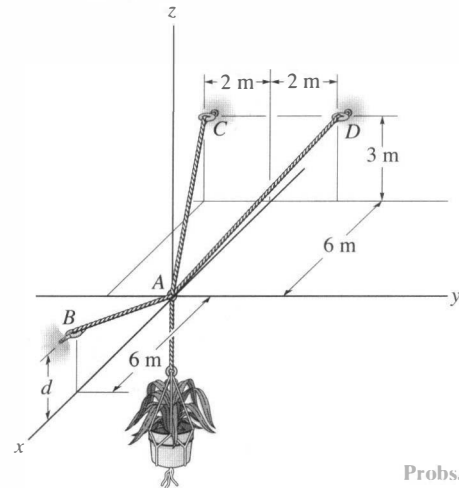
3-55. Determine la fuerza que actúa a lo largo del eje de cada uno de los tres puntales necesarios para dar soporte al bloque de 500 kg.



Prob. 3-55

*3-56. La maceta de 50 kg está soportada en A por los tres cables mostrados. Determine la fuerza que actúa en cada cable en la posición de equilibrio. Considere $d = 2.5$ m.

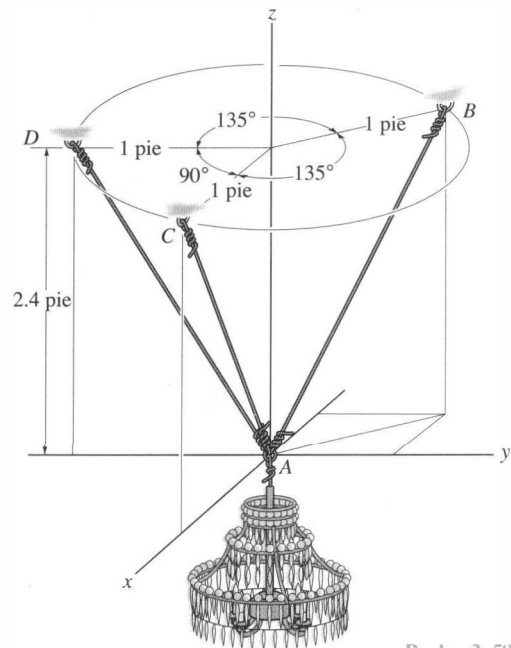
3-57. Determine la altura d del cable AB de manera que la fuerza en los cables AD y AC tenga la mitad del valor de la fuerza presente en el cable AB . ¿Cuál es la fuerza presente en cada cable para este caso? La maceta tiene una masa de 50 kg.



Probs. 3-56/57

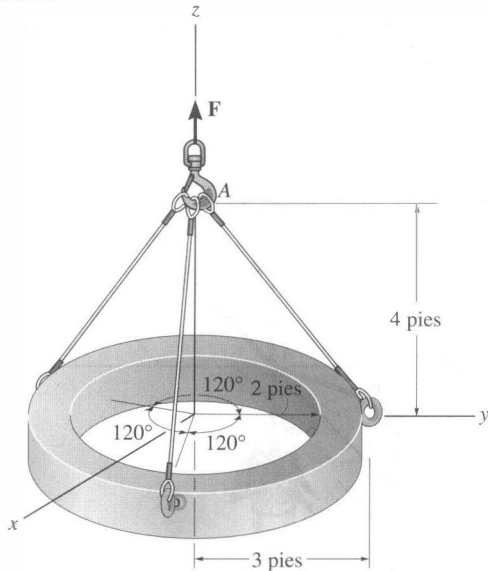
3-58. El candelabro de 80 lb está soportado por tres alambres como se muestra. Determine la fuerza en cada alambre en la posición de equilibrio.

3-59. Si cada alambre puede soportar una tensión peso del candelabro que los alambres soportarán en la posición mostrada.



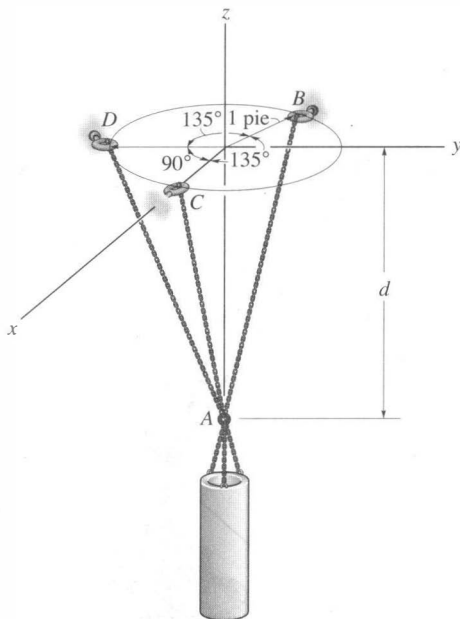
Probs. 3-58/59

*3-60. Tres cables se usan para soportar un anillo de 900 lb. Determine la tensión en cada cable en la posición de equilibrio.



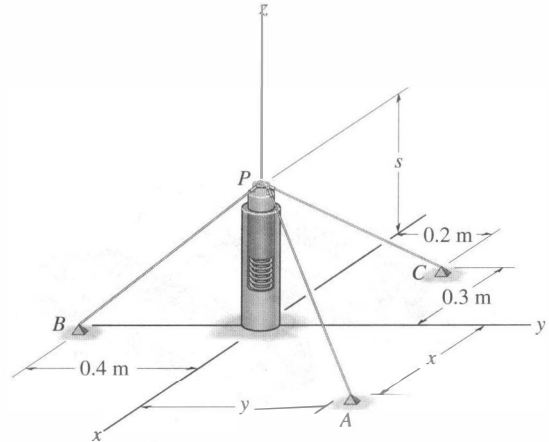
Prob. 3-60

3-61. El cilindro de 800 lb está soportado por tres cadenas como se muestra. Determine la fuerza presente en cada cadena en la posición de equilibrio. Considere $d = 1$ pie.



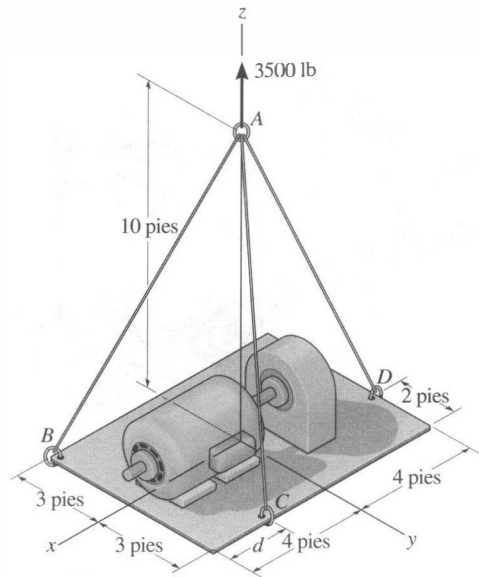
Prob. 3-61

3-62. Una pequeña clavija P descansa sobre un resorte que está contenido dentro de un tubo liso. Cuando el resorte se comprime de modo que $s = 0.15$ m, ejerce hacia arriba una fuerza de 60 N sobre la clavija. Determine el punto de unión $A(x, y, 0)$ de la cuerda PA para que la tensión en las cuerdas PB y PC sea de 30 y 50 N, respectivamente.



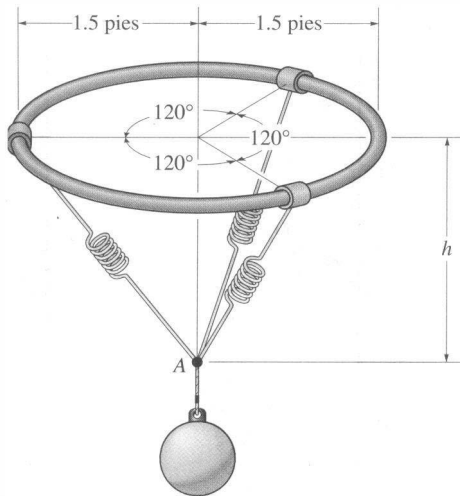
Prob. 3-62

3-63. Determine la fuerza necesaria en cada cable para soportar la plataforma de 3500 lb. Considere $d = 4$ pies.



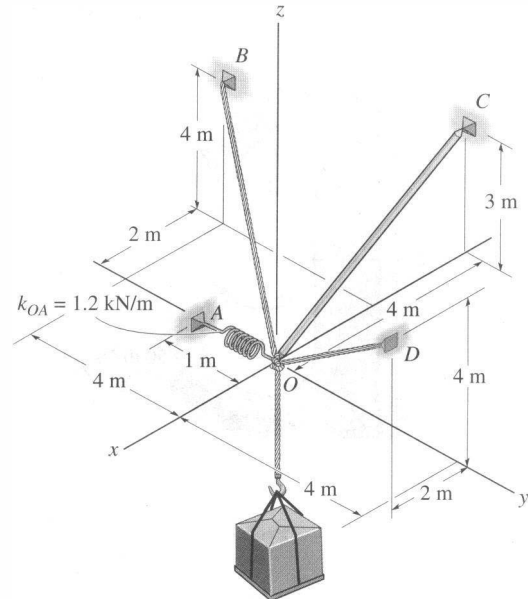
Prob. 3-63

■*3-64. La bola de 80 lb está suspendida del anillo horizontal usando tres resortes, cada resorte tiene longitud no alargada de 1.5 pies y rigidez de 50 lb/pie. Determine la distancia vertical h del anillo hasta el punto A por equilibrio.



Prob. 3-64

3-65. Determine la tensión desarrollada en los cables OD y OB y en la barra OC requerida para sostener la caja de 50 kg. El resorte OA tiene una longitud no alargada de 0.8 m y rigidez $k_{OA} = 1.2$ kN/m. La fuerza presente en la barra actúa a lo largo del eje de ésta.



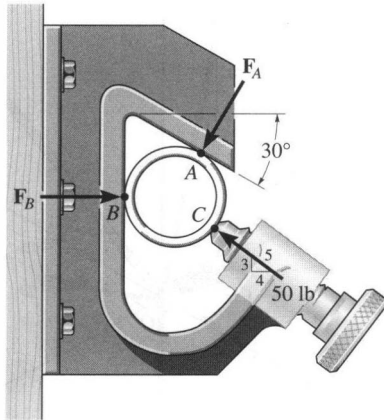
Prob. 3-65

REPASO DEL CAPÍTULO

- **Equilibrio.** Cuando una partícula está en reposo o se mueve con velocidad constante, se dice que está en equilibrio. Esto requiere que todas las fuerzas que actúan sobre la partícula formen una resultante de fuerza nula. Para tomar en cuenta todas estas fuerzas es necesario trazar un diagrama de cuerpo libre. Este diagrama es una forma delineada de la partícula y muestra todas las fuerzas, indicadas con sus magnitudes y direcciones conocidas o desconocidas.
- **Dos dimensiones.** Las dos ecuaciones escalares de equilibrio de fuerzas $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ pueden ser aplicadas al referirlas a un sistema coordenado x, y establecido. Si la solución para una magnitud de fuerza da un escalar negativo, entonces la fuerza actúa en la dirección opuesta a la mostrada sobre el diagrama de cuerpo libre. Si el problema implica un resorte elástico lineal, entonces el alargamiento o la compresión s del resorte pueden ser relacionados a la fuerza aplicada usando $F = ks$.
- **Tres dimensiones.** Como la geometría tridimensional puede ser difícil de visualizar, la ecuación de equilibrio $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ debe ser aplicada usando un análisis vectorial cartesiano. Esto requiere expresar primero cada fuerza sobre el diagrama de cuerpo libre como un vector cartesiano. Cuando las fuerzas se suman y se igualan a cero, entonces las componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} son también cero, de modo que $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma F_z = 0$.

PROBLEMAS DE REPASO

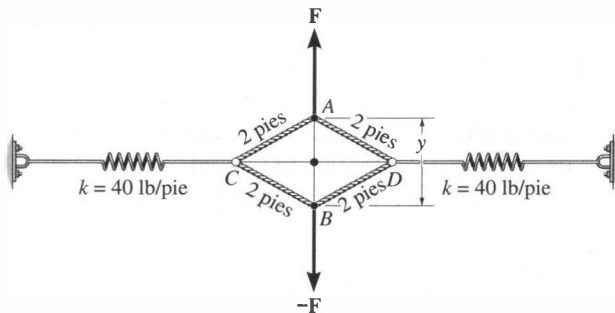
3-66. El tubo es mantenido en su lugar por la prensa mecánica. Si el perno ejerce una fuerza de 50 lb sobre el tubo en la dirección mostrada, determine las fuerzas F_A y F_B que los contactos lisos en A y B ejercen sobre el tubo.



Prob. 3-66

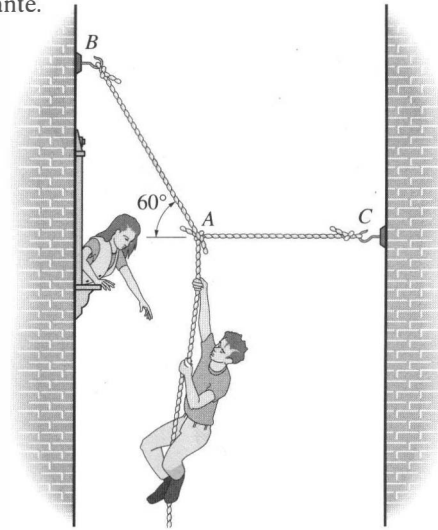
3-67. Cuando y es cero, los resortes soportan una fuerza de 60 lb. Determine la magnitud requerida de las fuerzas verticales aplicadas F y $-F$ para separar el punto A del punto B una distancia $y = 2$ pies. Los extremos de las cuerdas CAD y CBD están unidos a anillos situados en C y D .

*3-68. Cuando y es cero, cada uno de los resortes está estirado 1.5 pies. Determine la distancia y si una fuerza $F = 60$ lb es aplicada a los puntos A y B como se muestra. Los extremos de las cuerdas CAD y CBD están unidos a anillos situados en C y D .



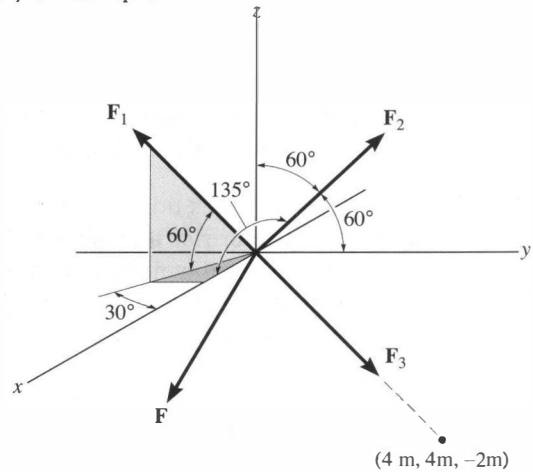
Prob. 3-67/68

3-69. Romeo trata de llegar a Julieta trepando con velocidad constante por una cuerda que está anudada en el punto A . Cualquiera de los tres segmentos de la cuerda puede soportar una fuerza máxima de 2 kN antes de romperse. Determine si Romeo, quien tiene una masa de 65 kg, puede trepar por la cuerda y luego descender junto con Julieta, quien tiene una masa de 60 kg, con velocidad constante.



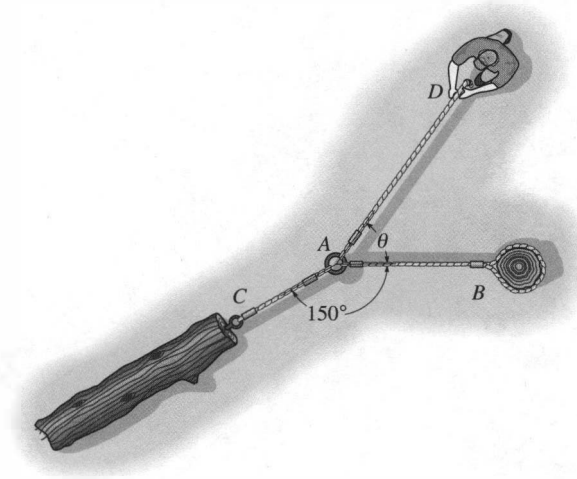
Prob. 3-69

■ 3-70. Determine las magnitudes de las fuerzas F_1 , F_2 y F_3 necesarias para mantener la fuerza $F = \{-9i - 8j - 5k\}$ kN en equilibrio.



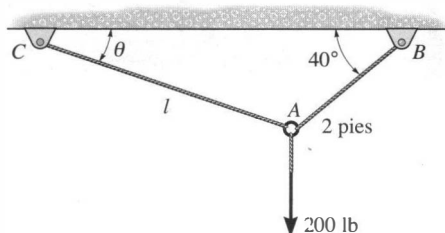
Prob. 3-70

3-71. El hombre intenta jalar el tronco ubicado en C usando las tres cuerdas. Determine la dirección θ en que debe jalar su cuerda con una fuerza de 80 lb de manera que ejerza una fuerza máxima sobre el tronco. ¿Cuál es la fuerza aplicada sobre el tronco en este caso? Determine también la dirección en que debe jalarsse para maximizar la fuerza en la cuerda unida a B . ¿Cuál es esta fuerza máxima?



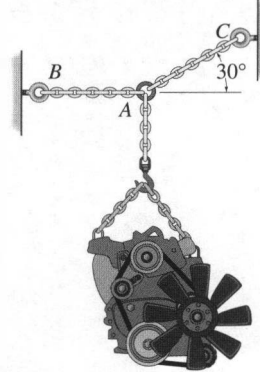
Prob. 3-71

*3-72. El anillo de tamaño insignificante está sometido a una fuerza vertical de 200 lb. Determine la longitud requerida l de la cuerda AC tal que la tensión que actúa en AC sea de 160 lb. También, ¿cuál es la fuerza que actúa en la cuerda AB ? *Sugerencia:* Use la condición de equilibrio para determinar el ángulo θ requerido para la unión, y luego determine l usando trigonometría en el triángulo ABC .



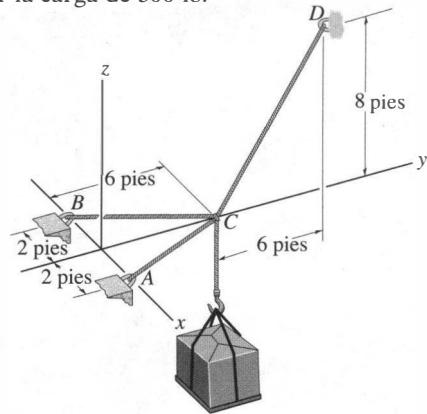
Prob. 3-72

3-73. Determine el peso máximo del motor que puede ser sostenido sin exceder una tensión de 450 lb en la cadena AB ni de 480 lb en la cadena AC .



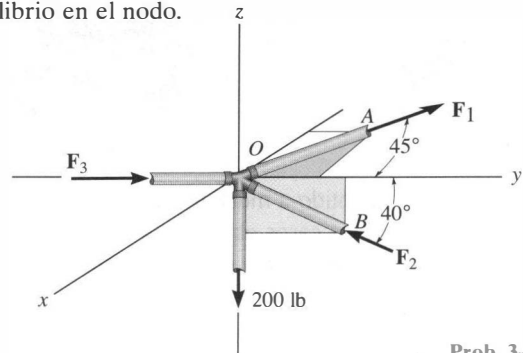
Prob. 3-73

3-74. Determine la fuerza necesaria en cada cable para sostener la carga de 500 lb.



Prob. 3-74

3-75. El nodo de un marco espacial está sometido a cuatro fuerzas. La barra OA se encuentra en el plano $x-y$ y la barra OB en el plano $y-z$. Determine las fuerzas que actúan en cada barra y que son requeridas para obtener equilibrio en el nodo.



Prob. 3-75

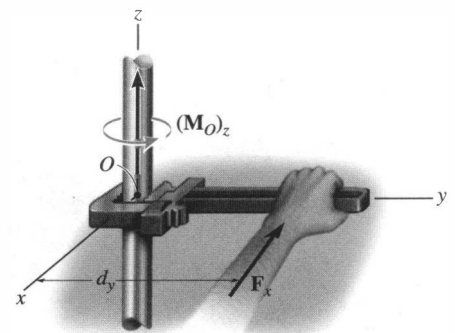
Resultantes de sistemas de fuerzas

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Analizar el concepto de momento de una fuerza y mostrar cómo calcularla en dos y tres dimensiones.
- Proporcionar un método para encontrar el momento de una fuerza con respecto a un eje específico.
- Definir el momento de un par.
- Presentar métodos para determinar las resultantes de sistemas de fuerzas no concurrentes.
- Indicar cómo reducir una carga simple distribuida a una fuerza resultante con una localización específica.

4.1 Momento de una fuerza —formulación escalar

El *momento* de una fuerza con respecto a un punto o eje proporciona una medida de la tendencia de la fuerza a ocasionar que un cuerpo gire alrededor del punto o eje. Por ejemplo, considere la fuerza horizontal \mathbf{F}_x , que actúa perpendicularmente al mango de la llave y está localizada a una distancia d_y del punto O , figura 4-1a. Se ve que esta fuerza tiende a girar el tubo alrededor del eje z . Entre mayor es la fuerza o la distancia d_y , mayor es el efecto de rotación. A esta tendencia a la rotación causada por \mathbf{F}_x ocasionalmente se le llama *torca*, pero más a menudo se denomina *momento de una fuerza* o simplemente *momento* $(\mathbf{M}_O)_z$. Observe que el *eje de momento* (z) es perpendicular al plano sombreado (x - y) que contiene \mathbf{F}_x y d_y , y que este eje interseca al plano en el punto O .



(a)

Fig. 4-1

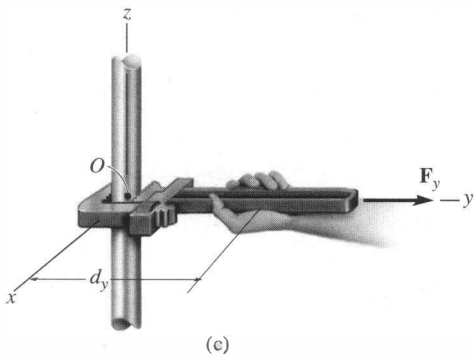
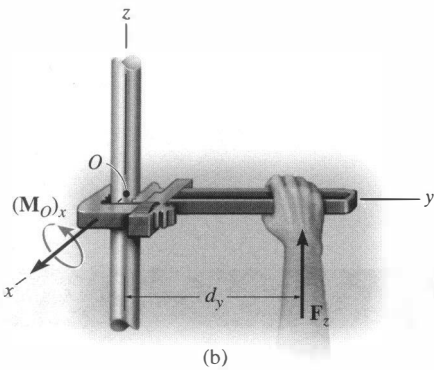


Fig. 4-1

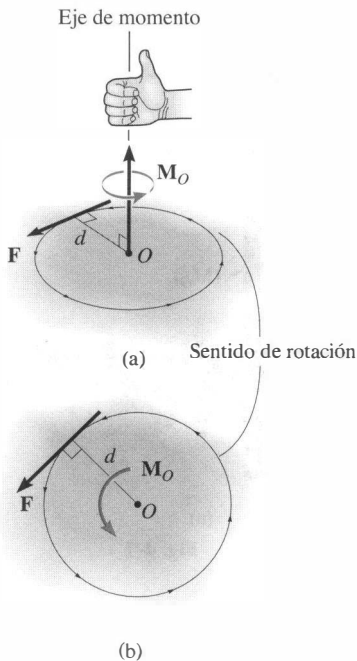


Fig. 4-2

Ahora considere aplicar la fuerza F_z a la llave, figura 4-1b. Esta fuerza *no* girará el tubo con respecto al eje z . En vez de eso, tiende a girarlo alrededor del eje x . Tenga en mente que aunque pueda no ser posible “girar” realmente el tubo de esta manera, F_z aún crea la *tendencia* de rotación y se produce así el momento $(M_O)_x$. Como antes, la fuerza y la distancia d_y se encuentran en el plano sombreado ($y-z$) que es perpendicular al eje de momento (x). Finalmente, si una fuerza F_y es aplicada a la llave, figura 4-1c, no se produce ningún momento con respecto al punto O . Esto resulta en una ausencia de giro ya que la línea de acción de la fuerza pasa por O y, por tanto, ninguna tendencia a rotar es posible.

Ahora generalizaremos el análisis anterior y consideraremos la fuerza F y el punto O que se encuentran en un plano sombreado como se muestra en la figura 4-2a. El momento M_O con respecto al punto O , o con respecto a un eje que pase por O y sea perpendicular al plano, es una *cantidad vectorial* puesto que tiene magnitud y dirección específicas.

Magnitud. La magnitud de M_O es

$$M_O = Fd \quad (4-1)$$

donde d es referido como *brazo de momento* o distancia perpendicular del eje en el punto O a la línea de acción de la fuerza. Las unidades de la magnitud del momento son el producto de la fuerza multiplicada por la distancia, esto es, $N \cdot m$ o $lb \cdot pies$.

Dirección. La dirección de M_O será especificada usando la “regla de la mano derecha”. Para hacer esto, los dedos de la mano derecha son enrollados en forma tal que sigan el sentido de rotación que ocurriría si la fuerza pudiese rotar alrededor del punto O , figura 4-2a. El *pulgar señala* entonces a lo largo del *eje de momento* de manera que da la dirección y el sentido del vector momento, que es *hacia arriba* y *perpendicular* al plano sombreado que contiene a F y d .

En tres dimensiones, M_O se ilustra mediante un vector flecha con una flecha curva sobre él para *distinguirlo* de un vector fuerza, figura 4-2a. Sin embargo, muchos problemas de mecánica implican sistemas de fuerzas coplanares que pueden ser vistos convenientemente en dos dimensiones. Por ejemplo, una vista bidimensional de la figura 4-2a está dada en la figura 4-2b. Aquí, M_O se representa simplemente por medio de la flecha curva (en sentido contrario al de las manecillas del reloj), la cual indica la acción de F . La cabeza de flecha sobre esta flecha curva se usa para mostrar el *sentido de rotación* causado por F . Sin embargo, usando la regla de la mano derecha, vemos que la dirección y el sentido del vector momento en la figura 4-2b son especificados por el pulgar, el cual señala *hacia fuera* de la página ya que los dedos siguen la flecha curva. En particular, advierta que *esta flecha curva, o sentido de rotación, siempre puede ser determinada observando en qué dirección “orbitaria” la fuerza presente alrededor del punto O* (en sentido contrario al de las manecillas del reloj en la figura 4-2b). En dos dimensiones nos referiremos a menudo a encontrar el momento de una fuerza “con respecto a un punto” (O). Sin embargo, recuerde que el momento *siempre actúa con respecto a un eje* que es perpendicular al plano que contiene F y d , y que este eje interseca al plano en el punto (O), figura 4-2a.

Momento resultante de un sistema de fuerzas coplanares. Si un sistema de fuerzas se encuentra en un plano $x-y$, entonces el momento producido por cada fuerza con respecto al punto O estará dirigido a lo largo del eje z , figura 4-3. En consecuencia, el momento resultante M_{R_o} del sistema puede ser determinado sumando simplemente los momentos de todas las fuerzas *algebraicamente* ya que todos los vectores momento son colineales. Esta suma vectorial puede escribirse en forma simbólica como

$$\downarrow + M_{R_o} = \Sigma Fd \quad (4-2)$$

Aquí, la flecha curva que va en sentido contrario al de las manecillas del reloj y trazada junto a la ecuación indica que, por la convención escalar de signos, el momento de cualquier fuerza será positivo si está dirigido a lo largo del eje $+z$, mientras que un momento negativo está dirigido a lo largo del eje $-z$.

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación numérica de las ecuaciones 4-1 y 4-2.

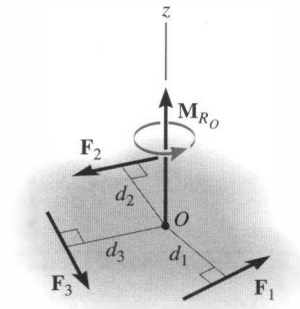
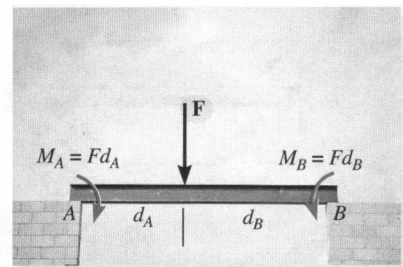
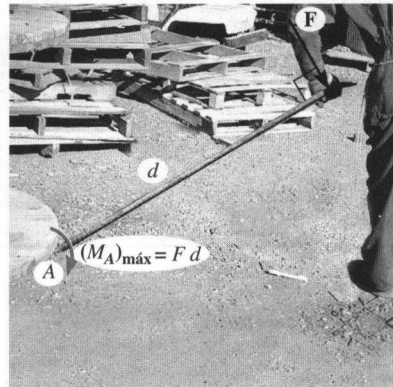
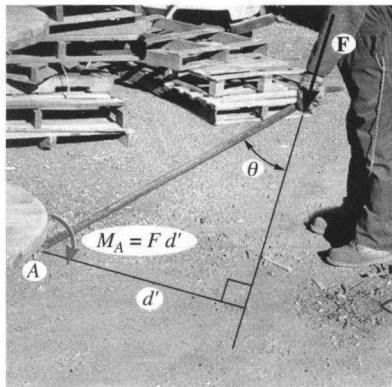


Fig. 4-3

Empujando hacia abajo la barra de palanqueo, la carga situada sobre el terreno en el punto A puede ser levantada. El efecto de volteo, causado por la fuerza aplicada, se debe al momento con respecto a A . Para producir este momento con esfuerzo mínimo, sabemos instintivamente que la fuerza debe aplicarse al *extremo* de la barra; sin embargo, la *dirección* en que esta fuerza sea aplicada también es importante. Esto se debe a que el momento es el producto de la fuerza y el brazo de momento. Observe que cuando la fuerza está a un ángulo $\theta < 90^\circ$, entonces la distancia del brazo de momento es *más corta* que cuando la fuerza se aplica perpendicularmente a la barra, $\theta = 90^\circ$, es decir, $d' < d$. Por consiguiente, el momento máximo se produce cuando la fuerza está más alejada del punto A y es aplicada perpendicularmente al eje de la barra, de manera que se maximice el brazo de momento.



El momento de una fuerza no siempre causa rotación. Por ejemplo, la fuerza F tiende a girar la viga en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de su soporte en A con un momento $M_A = Fd_A$. La rotación real ocurriría si el soporte en B fuese retirado. De la misma manera, F genera una tendencia a girar la viga en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de B con un momento $M_B = Fd_B$. Aquí el soporte en A impide la rotación.

EJEMPLO 4.1

Para cada caso ilustrado en la figura 4-4, determine el momento de la fuerza con respecto al punto O .

Solución (Análisis escalar)

La línea de acción de cada fuerza está extendida como una línea discontinua para establecer el brazo de momento d . También se ilustra la tendencia de rotación del miembro causada por la fuerza. Además, la órbita de la fuerza se muestra con un flecha curva más obscura.

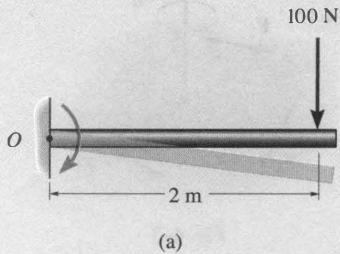


Fig. 4-4a $M_O = (100 \text{ N})(2 \text{ m}) = 200 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$ Resp.

Fig. 4-4b $M_O = (50 \text{ N})(0.75 \text{ m}) = 37.5 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$ Resp.

Fig. 4-4c $M_O = (40 \text{ lb})(4 \text{ pies} + 2 \cos 30^\circ \text{ pie}) = 229 \text{ lb} \cdot \text{pie} \downarrow$ Resp.

Fig. 4-4d $M_O = (60 \text{ lb})(1 \text{ sen } 45^\circ \text{ pie}) = 42.4 \text{ lb} \cdot \text{pie} \uparrow$ Resp.

Fig. 4-4e $M_O = (7 \text{ kN})(4 \text{ m} - 1 \text{ m}) = 21.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \uparrow$ Resp.

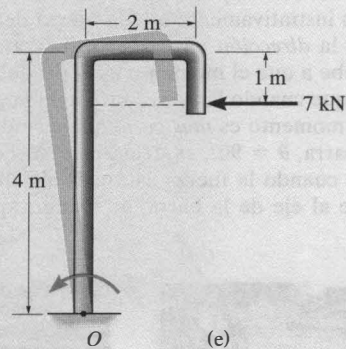
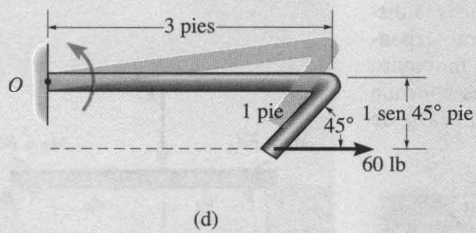
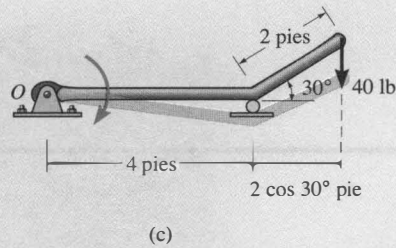
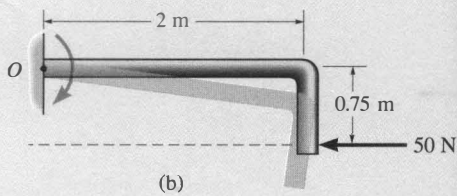


Fig. 4-4

EJEMPLO 4.2

Determine los momentos de la fuerza de 800 N que actúa sobre la estructura que aparece en la figura 4-5 con respecto a los puntos A , B , C y D .

Solución (Análisis escalar)

En general, $M = Fd$, donde d es el brazo de momento o *distancia perpendicular* desde el punto sobre el eje de momento hasta la *línea de acción* de la fuerza. Por tanto,

$$M_A = 800 \text{ N}(2.5 \text{ m}) = 2000 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow \quad \text{Resp.}$$

$$M_B = 800 \text{ N}(1.5 \text{ m}) = 1200 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow \quad \text{Resp.}$$

$$M_C = 800 \text{ N}(0) = 0 \quad (\text{la línea de acción de } \mathbf{F} \text{ pasa por } C) \quad \text{Resp.}$$

$$M_D = 800 \text{ N}(0.5 \text{ m}) = 400 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow \quad \text{Resp.}$$

Las flechas curvas indican el sentido de rotación del momento, el cual está definido por la dirección con que la fuerza orbita alrededor de cada punto.

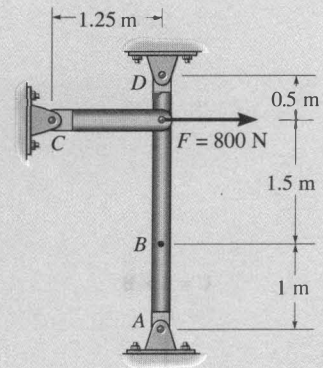


Fig. 4-5

EJEMPLO 4.3

Determine el momento resultante de las cuatro fuerzas que actúan sobre la barra mostrada en la figura 4-6 con respecto al punto O .

Solución

Suponiendo que los momentos positivos actúan en la dirección $+\mathbf{k}$, es decir, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, tenemos

$$\downarrow +M_{R_O} = \Sigma Fd;$$

$$M_{R_O} = -50 \text{ N}(2 \text{ m}) + 60 \text{ N}(0) + 20 \text{ N}(3 \text{ sen } 30^\circ \text{ m}) \\ -40 \text{ N}(4 \text{ m} + 3 \text{ cos } 30^\circ \text{ m})$$

$$M_{R_O} = -334 \text{ N} \cdot \text{m} = 334 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow \quad \text{Resp.}$$

Para este cálculo, observe cómo se establecen las distancias brazo de momento para las fuerzas de 20 y 40 N desde las líneas de acción extendidas (línea discontinua) de cada una de estas fuerzas.

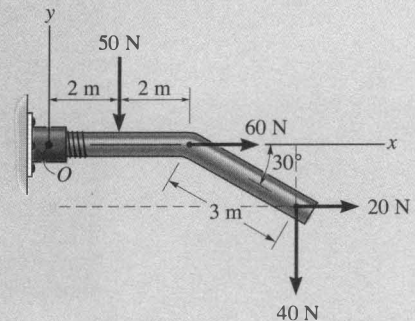


Fig. 4-6

4.2 Producto cruz

El momento de una fuerza será formulado usando vectores cartesianos en la siguiente sección. Sin embargo, antes de hacerlo, es necesario ampliar nuestro conocimiento del álgebra vectorial e introducir el método del producto cruz de la multiplicación vectorial.

El *producto cruz* de dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} da el vector \mathbf{C} , el cual se escribe como

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

y se lee “ \mathbf{C} es igual a \mathbf{A} cruz \mathbf{B} ”.

Magnitud. La *magnitud* de \mathbf{C} se define como el producto de las magnitudes de \mathbf{A} y \mathbf{B} y el seno del ángulo θ entre sus colas ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$). Así, $C = AB \text{ sen } \theta$.

Dirección. El vector \mathbf{C} tiene una *dirección* perpendicular al plano que contiene a \mathbf{A} y \mathbf{B} de manera tal que \mathbf{C} se especifica mediante la regla de la mano derecha; es decir, enrollando los dedos de la mano derecha desde el vector \mathbf{A} (cruz) hacia el vector \mathbf{B} , el pulgar señala entonces la dirección de \mathbf{C} , como se muestra en la figura 4-7.

Conociendo la magnitud y la dirección de \mathbf{C} , podemos escribir

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \text{ sen } \theta)\mathbf{u}_C \quad (4-3)$$

donde el escalar $AB \text{ sen } \theta$ define la *magnitud* de \mathbf{C} y el vector unitario \mathbf{u}_C define la *dirección* de \mathbf{C} . Los términos de la ecuación 4-3 están ilustrados gráficamente en la figura 4-8.

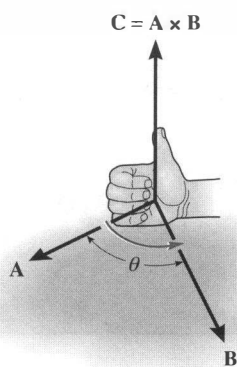


Fig. 4-7

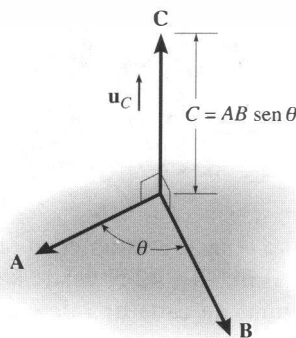


Fig. 4-8

Leyes de operación.

1. La ley conmutativa *no* es válida, es decir,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

En vez de ello,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

Esto se muestra en la figura 4-9 usando la regla de la mano derecha. El producto cruz $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ produce un vector que actúa en dirección opuesta a \mathbf{C} ; esto es, $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{C}$.

2. Multiplicación por un escalar:

$$a(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (a\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})a$$

Esta propiedad es fácil de demostrar ya que la magnitud del vector resultante ($|a|AB \sin \theta$) y su dirección son las mismas en cada caso.

3. La ley distributiva:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{D})$$

La prueba de esta identidad se deja como ejercicio (vea el Problema 4-1). Es importante advertir que debe mantenerse el *orden correcto* de los productos cruz, en vista de que no son conmutativos.

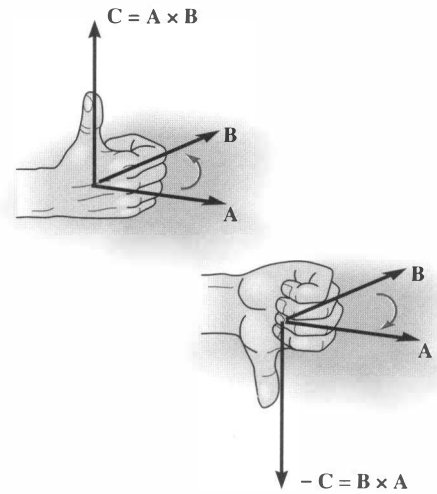


Fig. 4-9

Formulación vectorial cartesiana. La ecuación 4-3 puede usarse para encontrar el producto cruz de un par de vectores unitarios cartesianos. Por ejemplo, para encontrar $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, la *magnitud* del vector resultante es $(i)(j)(\sin 90^\circ) = (1)(1)(1) = 1$, y su *dirección* se determina usando la regla de la mano derecha. Como se muestra en la figura 4-10, el vector resultante señala en la dirección $+\mathbf{k}$. Así, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = (1)\mathbf{k}$. De manera similar,

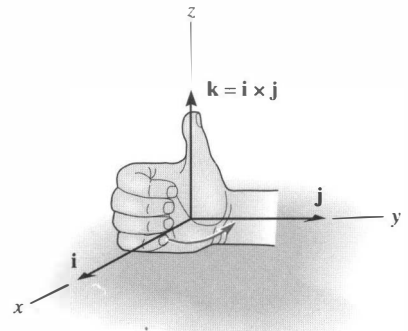


Fig. 4-10

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{array}$$

Estos resultados *no* tienen que memorizarse; en lugar de ello, debe entenderse claramente cómo se obtiene cada uno empleando la regla de la mano derecha y la definición del producto cruz. El esquema sencillo mostrado en la figura 4-11 ayuda a obtener los mismos resultados cuando se necesita. Si el círculo se construye como se muestra, entonces, al “cruzar” dos vectores unitarios en *sentido contrario al de las manecillas del reloj* alrededor del círculo, se obtiene el tercer vector unitario *positivo*; por ejemplo, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Desplazándose en el *sentido de las manecillas del reloj* se obtiene un vector unitario *negativo*; por ejemplo, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

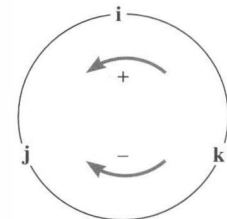


Fig. 4-11

Considere ahora el producto cruz de dos vectores generales **A** y **B** que se expresan en forma vectorial cartesiana. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \times (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\ &= A_xB_x(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + A_xB_y(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + A_xB_z(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + A_yB_x(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + A_yB_y(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + A_yB_z(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + A_zB_x(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + A_zB_z(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Al efectuar las operaciones de productos cruz y combinando términos resulta

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k} \quad (4-4)$$

Esta ecuación puede escribirse también en una forma de determinante más compacta como

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (4-5)$$

Así, para encontrar el producto cruz de dos vectores cartesianos **A** y **B** cualesquiera, es necesario desarrollar un determinante cuya primera fila de elementos consiste en los vectores unitarios **i**, **j** y **k** y cuyas segunda y tercera filas representan las componentes *x*, *y*, *z* de los dos vectores **A** y **B**, respectivamente.*

*Un determinante con tres filas y tres columnas puede ser desarrollado usando tres menores, cada uno de los cuales es multiplicado por uno de los tres términos anotados en la primera fila. Hay cuatro elementos en cada menor, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

Por definición, esta notación representa los términos $(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})$, lo cual es simplemente el producto de los dos elementos de la flecha inclinada hacia abajo y hacia la derecha $(A_{11}A_{22})$ menos el producto de los dos elementos de la flecha inclinada hacia abajo y hacia la izquierda $(A_{12}A_{21})$. Para un determinante de 3×3 , como el de la ecuación 4-5, los tres menores pueden ser generados de acuerdo con el siguiente esquema:

Para el elemento **i**: $\begin{vmatrix} \oplus & & \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y)$

Para el elemento **j**: $\begin{vmatrix} & \oplus & \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\mathbf{j}(A_xB_z - A_zB_x)$

Para el elemento **k**: $\begin{vmatrix} & & \oplus \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x)$

Al sumar los resultados y tomar nota de que el elemento **j** debe incluir el signo menos, se obtiene la forma desarrollada de **A** × **B** dada por la ecuación 4-4.

4.3 Momento de una fuerza —formulación vectorial

El momento de una fuerza \mathbf{F} con respecto al punto O , o realmente con respecto al eje de momento que pasa por O y es perpendicular al plano que contiene a O y a \mathbf{F} , figura 4-12a, puede expresarse usando el producto cruz, es decir,

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (4-6)$$

Aquí, \mathbf{r} representa un vector posición trazado *desde* O hasta *cualquier punto* que se encuentre sobre la línea de acción de \mathbf{F} . Mostraremos ahora que el momento \mathbf{M}_O , al ser determinado por este producto cruz, tiene la magnitud y la dirección correctas.

Magnitud. La magnitud del producto cruz se define con la ecuación 4-3 como $M_O = rF \sin \theta$, donde el ángulo θ se mide entre las *colas* de \mathbf{r} y \mathbf{F} . Para establecer este ángulo, \mathbf{r} debe ser tratado como un vector deslizante de manera que θ pueda ser construido apropiadamente, figura 4-12b. Como el brazo de momento $d = r \sin \theta$, entonces

$$M_O = rF \sin \theta = F(r \sin \theta) = Fd$$

lo cual concuerda con la ecuación 4-1.

Dirección. La dirección y el sentido de \mathbf{M}_O en la ecuación 4-6 están determinados por la regla de la mano derecha, tal como se aplica ésta al producto cruz. Así, extendiendo \mathbf{r} a la posición de la línea discontinua y enrollando los dedos de la mano derecha de \mathbf{r} hacia \mathbf{F} , “ \mathbf{r} cruz \mathbf{F} ”, el pulgar está dirigido hacia arriba o perpendicularmente al plano que contiene \mathbf{r} y \mathbf{F} y esto es en la *misma dirección* que \mathbf{M}_O , el momento de la fuerza con respecto al punto O , figura 4-12b. Observe que el “enrollamiento” de los dedos, como el enrollamiento alrededor del vector momento, indica el sentido de rotación causado por la fuerza. Como el producto cruz no es conmutativo, es importante que se mantenga el *orden correcto* de \mathbf{r} y \mathbf{F} en la ecuación 4-6.

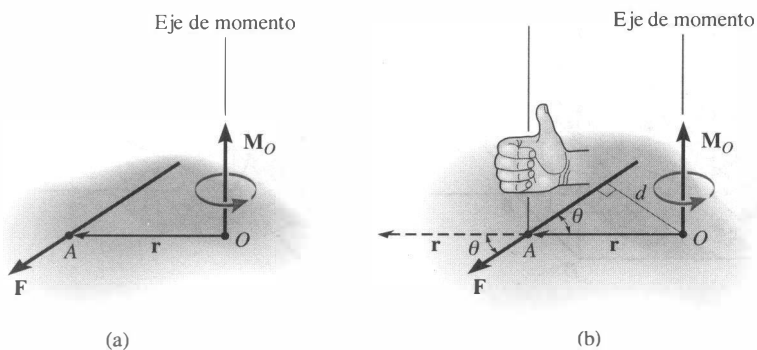


Fig. 4-12

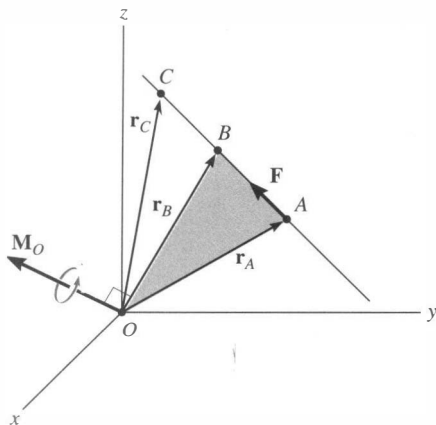


Fig. 4-13

Principio de transmisibilidad. Considere la fuerza \mathbf{F} aplicada en el punto A en la figura 4-13. El momento producido por \mathbf{F} con respecto a O es $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}$; sin embargo, se mostró que “ \mathbf{r} ” puede extenderse desde O hasta *cualquier punto* sobre la línea de acción de \mathbf{F} . En consecuencia, \mathbf{F} puede ser aplicado en el punto B o C , y se obtendrá el mismo momento $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}$. Por ello, \mathbf{F} tiene las propiedades de un *vector deslizante* y puede actuar entonces en *cualquier punto a lo largo de su línea de acción* y producirá aún el mismo momento con respecto al punto O . Nos referimos a esto como el *principio de transmisibilidad*, el cual discutiremos más ampliamente en la sección 4.7.

Formulación vectorial cartesiana. Si establecemos ejes coordenados x, y, z , el vector posición \mathbf{r} y el vector \mathbf{F} pueden expresarse como vectores cartesianos, figura 4-14. Al aplicar la ecuación 4-5 tenemos

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (4-7)$$

donde

r_x, r_y, r_z representan las componentes x, y, z del vector posición trazado desde el punto O hasta *cualquier punto* sobre la línea de acción de la fuerza

F_x, F_y, F_z representan las componentes x, y, z del vector fuerza.

Si se desarrolla el determinante, como en la ecuación 4-4, tenemos entonces

$$\mathbf{M}_O = (r_y F_z - r_z F_y)\mathbf{i} - (r_x F_z - r_z F_x)\mathbf{j} + (r_x F_y - r_y F_x)\mathbf{k} \quad (4-8)$$

El significado físico de esas tres componentes de momento resulta evidente al estudiar la figura 4-14a. Por ejemplo, la componente \mathbf{i} de \mathbf{M}_O

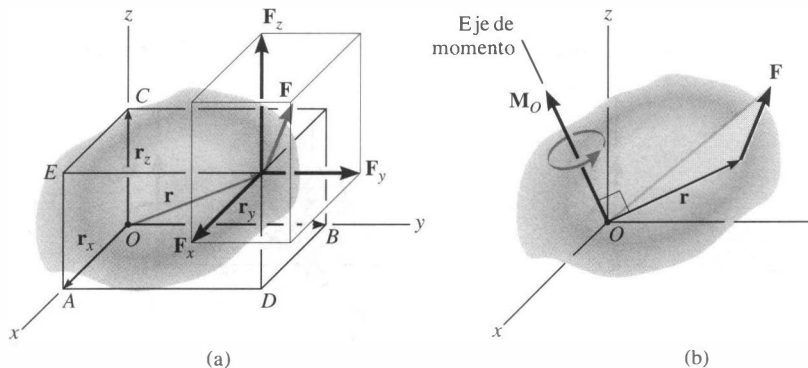


Fig. 4-14

está determinada a partir de los momentos de \mathbf{F}_x , \mathbf{F}_y y \mathbf{F}_z con respecto al eje x . En particular, observe que \mathbf{F}_x *no* genera un momento o tendencia a girar con respecto al eje x ya que esta fuerza es *paralela* al eje x . La línea de acción de \mathbf{F}_y pasa por el punto E , y entonces la magnitud del momento de \mathbf{F}_y con respecto al punto A sobre el eje x es $r_z F_y$. Por la regla de la mano derecha, esta componente actúa en la dirección \mathbf{i} negativa. Igualmente, \mathbf{F}_z aporta una componente de momento de $r_y F_z \mathbf{i}$. Así, $(M_O)_x = (r_y F_z - r_z F_y)$ como se muestra en la figura 4-8. Como ejercicio, establezca las componentes \mathbf{j} y \mathbf{k} de \mathbf{M}_O de esta manera y demuestre que la forma desarrollada del determinante, ecuación 4-8, representa el momento de \mathbf{F} con respecto al punto O . Una vez determinado \mathbf{M}_O , vea que siempre será *perpendicular* al plano sombreado que contiene los vectores \mathbf{r} y \mathbf{F} , figura 4-14b.

En el ejemplo 4.4 se mostrará que el cálculo del momento usando el producto cruz tiene una ventaja clara sobre la formulación escalar al resolver problemas en *tres dimensiones*. Esto se debe a que generalmente es más fácil establecer el vector de posición \mathbf{r} al elemento fuerza que determinar la distancia del brazo de momento d que debe ser dirigido *perpendicularmente* a la línea de acción de la fuerza.

Momento resultante de un sistema de fuerzas. Si un sistema de fuerzas actúa sobre un cuerpo, figura 4-15, el momento resultante de las fuerzas con respecto al punto O puede ser determinado mediante la adición vectorial que resulta de aplicaciones sucesivas de la ecuación 4-6. Esta resultante puede escribirse simbólicamente como

$$\mathbf{M}_{R_o} = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (4-9)$$

y se muestra en la figura 4-15.

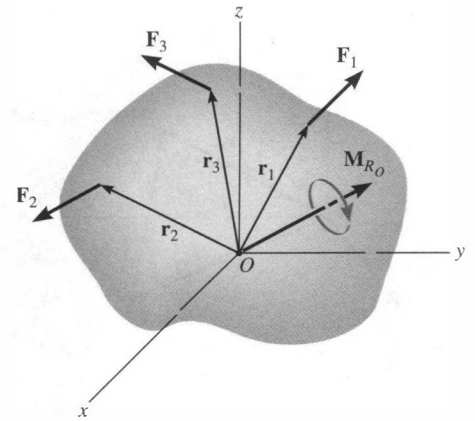
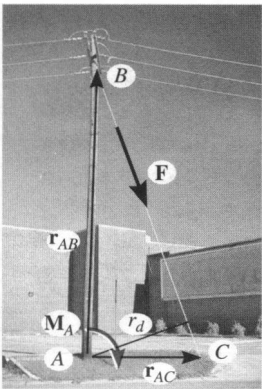


Fig. 4-15



Si jalamos el cable BC con una fuerza \mathbf{F} en *cualquier punto a lo largo del cable*, el momento de esta fuerza con respecto a la base del poste en A será siempre el *mismo*. Esto es una consecuencia del principio de transmisibilidad. Observe que el brazo de momento, o la distancia perpendicular desde A hasta el cable, es r_d , y entonces $M_A = r_d F$. En tres dimensiones, esta distancia es a menudo difícil de determinar, por lo que usamos el producto vectorial cruz para obtener el momento en una manera más directa. Por ejemplo, $\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_{AC} \times \mathbf{F}$. Tal como se requiere, estos dos vectores están dirigidos desde el punto A hasta un punto sobre la línea de acción de la fuerza.

EJEMPLO 4.4

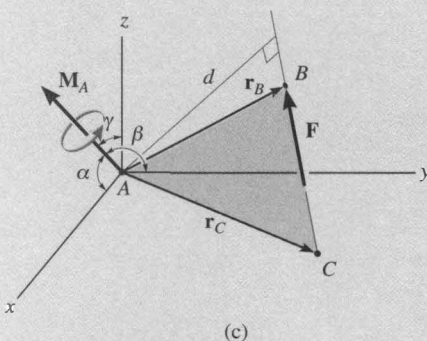
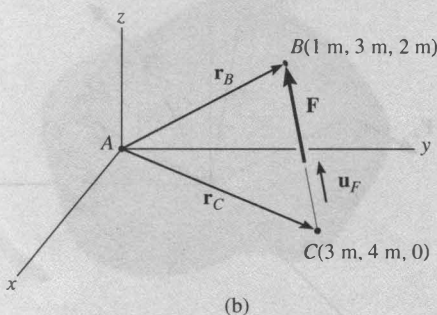
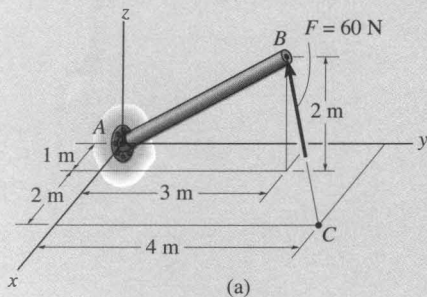


Fig. 4-16

El poste en la figura 4-16a está sometido a una fuerza de 60 N dirigida de C a B. Determine la magnitud del momento generado por esta fuerza con respecto al soporte en A.

Solución (Análisis vectorial)

Como se muestra en la figura 4-16b, cualquiera de los dos vectores de posición puede ser usado para encontrar la solución, ya que $\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}$ o $\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}$. Los vectores de posición están representados como

$$\mathbf{r}_B = \{1\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\} \text{ m} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_C = \{3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}\} \text{ m}$$

La fuerza tiene una magnitud de 60 N y dirección especificada por el vector unitario \mathbf{u}_F , dirigido de C a B. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (60 \text{ N})\mathbf{u}_F = (60 \text{ N}) \left[\frac{(1-3)\mathbf{i} + (3-4)\mathbf{j} + (2-0)\mathbf{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (2)^2}} \right] \\ &= \{-40\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 40\mathbf{k}\} \text{ N} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la formulación de determinante, ecuación 4-7, y siguiendo el esquema para el desarrollo de determinantes que se estableció en el pie de la página 120, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ -40 & -20 & 40 \end{vmatrix} \\ &= [3(40) - 2(-20)]\mathbf{i} - [1(40) - 2(-40)]\mathbf{j} + [1(-20) - 3(-40)]\mathbf{k} \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \mathbf{r}_C \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -40 & -20 & 40 \end{vmatrix} \\ &= [4(40) - 0(-20)]\mathbf{i} - [3(40) - 0(-40)]\mathbf{j} + [3(-20) - 4(-40)]\mathbf{k} \end{aligned}$$

En ambos casos,

$$\mathbf{M}_A = \{160\mathbf{i} - 120\mathbf{j} + 100\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Por tanto, la *magnitud* de \mathbf{M}_A es

$$M_A = \sqrt{(160)^2 + (-120)^2 + (100)^2} = 224 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Como se esperaba, \mathbf{M}_A actúa perpendicularmente al plano sombreado que contiene los vectores \mathbf{F} , \mathbf{r}_B y \mathbf{r}_C , figura 4-16c. (¿Cómo encontraría usted sus ángulos coordenados de dirección $\alpha = 44.3^\circ$, $\beta = 122^\circ$, $\gamma = 63.4^\circ$?) Observe la dificultad que puede surgir en obtener el brazo de momento d , donde $M_A = Fd$, si se tuviese que resolver este problema con el enfoque escalar.

EJEMPLO 4.5

Tres fuerzas actúan sobre la barra mostrada en la figura 4-17a. Determine el momento resultante que generan con respecto a O y calcule los ángulos coordenados de dirección del eje de momento.

Solución

Los vectores de posición están dirigidos desde el punto O hacia cada fuerza como se muestra en la figura 4-17b. Esos vectores son

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A &= \{5\mathbf{j}\} \text{ pies} \\ \mathbf{r}_B &= \{4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\} \text{ pies} \end{aligned}$$

El momento resultante con respecto a O es, por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{R_O} &= \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \\ &= \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_3 \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ -60 & 40 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 5 & -2 \\ 80 & 40 & -30 \end{vmatrix} \\ &= [5(20) - 40(0)]\mathbf{i} - [0\mathbf{j}] + [0(40) - (-60)(5)]\mathbf{k} + [0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}] \\ &\quad + [5(-30) - (40)(-2)]\mathbf{i} - [4(-30) - 80(-2)]\mathbf{j} + [4(40) - 80(5)]\mathbf{k} \\ &= \{30\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 60\mathbf{k}\} \text{ lb} \cdot \text{pie} \end{aligned}$$

Resp.

El eje de momento está dirigido a lo largo de la línea de acción de \mathbf{M}_{R_O} . Como la magnitud de este momento es

$$M_{R_O} = \sqrt{(30)^2 + (-40)^2 + (60)^2} = 78.10 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

el vector unitario que define la dirección del eje de momento es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{M}_{R_O}}{M_{R_O}} = \frac{30\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 60\mathbf{k}}{78.10} = 0.3841\mathbf{i} - 0.5121\mathbf{j} + 0.7682\mathbf{k}$$

Por tanto, los ángulos coordenados de dirección del eje de momento son

$$\cos \alpha = 0.3841; \quad \alpha = 67.4^\circ \quad \text{Resp.}$$

$$\cos \beta = -0.5121; \quad \beta = 121^\circ \quad \text{Resp.}$$

$$\cos \gamma = 0.7682; \quad \gamma = 39.8^\circ \quad \text{Resp.}$$

Estos resultados aparecen en la figura 4-17c. Tenga en cuenta que las tres fuerzas tienden a ocasionar que la barra gire con respecto a este eje en la manera que muestra la flecha curva sobre el vector momento.

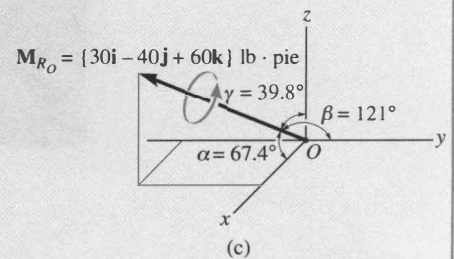
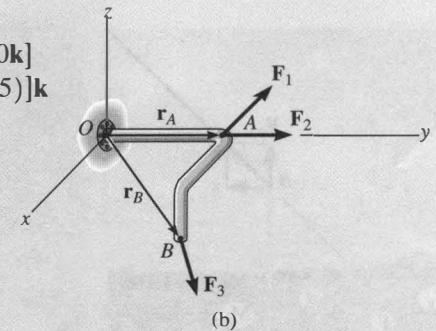
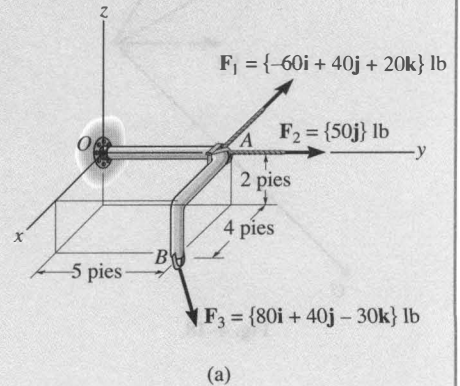


Fig. 4-17

4.4 Principio de momentos

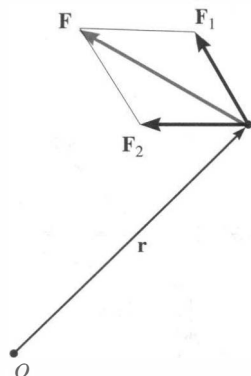
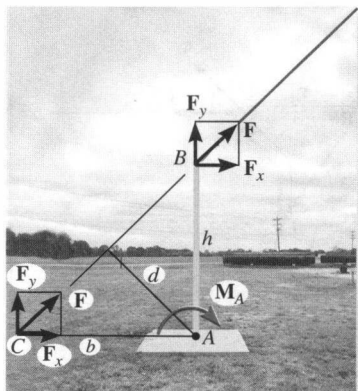


Fig. 4-18

Un concepto usado a menudo en mecánica es el *principio de momentos*, al cual se le llama a veces *teorema de Varignon* ya que fue originalmente desarrollado por el matemático francés Varignon (1654–1722). Este principio establece que *el momento de una fuerza con respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza con respecto al punto*. La prueba se obtiene directamente de la ley distributiva del producto cruz. Para mostrar esto, considere la fuerza \mathbf{F} y dos de sus componentes rectangulares, donde $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, figura 4-18. Tenemos

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Este concepto tiene importantes aplicaciones en la resolución de problemas y pruebas de los teoremas que siguen, ya que es a menudo más fácil determinar los momentos de las componentes de una fuerza que el momento de la propia fuerza.



La retenida ejerce una fuerza \mathbf{F} sobre el poste y genera así un momento con respecto a la base en A de $M_A = Fd$. Si la fuerza es reemplazada por sus dos componentes \mathbf{F}_x y \mathbf{F}_y en el punto B , donde el cable actúa sobre el poste, entonces la suma de los momentos de estas dos componentes con respecto a A dará el *mismo* momento resultante. En el cálculo, \mathbf{F}_y dará un momento cero con respecto a A y entonces $M_A = F_x h$. Ésta es una aplicación del *principio de momentos*. Además, podemos aplicar el *principio de transmisibilidad* y deslizar la fuerza hacia donde su línea de acción intersecta el terreno en C . En este caso \mathbf{F}_x dará un momento cero con respecto a A , y entonces $M_A = F_y b$.

PUNTOS IMPORTANTES

- El momento de una fuerza indica la tendencia de un cuerpo a girar con respecto a un eje que pasa por un punto específico O .
- Usando la regla de la mano derecha, el sentido de rotación queda indicado por los dedos y el pulgar es dirigido a lo largo del eje de momento, o línea de acción del momento.
- La magnitud del momento se determina mediante $M_O = Fd$, donde d es la distancia perpendicular o más corta desde el punto O hasta la línea de acción de la fuerza \mathbf{F} .
- En tres dimensiones, use el producto cruz para determinar el momento, es decir, $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Recuerde que \mathbf{r} está dirigido desde el punto O hacia cualquier punto sobre la línea de acción de \mathbf{F} .
- El principio de momentos establece que el momento de una fuerza con respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza con respecto al punto. Éste es un método muy conveniente para usarlo en dos dimensiones.

EJEMPLO 4.6

Una fuerza de 200 N actúa sobre la ménsula mostrada en la figura 4-19a. Determine el momento de la fuerza con respecto al punto A.

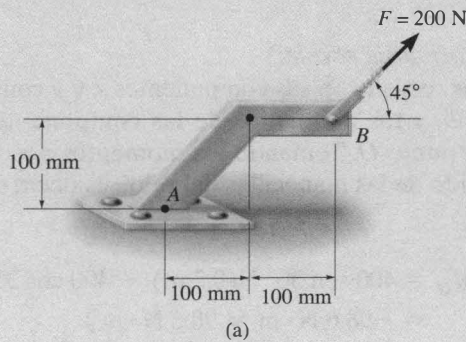


Fig. 4-19

Solución I

El brazo de momento d puede hallarse por trigonometría, usando la construcción mostrada en la figura 4-19b. A partir del triángulo rectángulo BCD ,

$$CB = d = 100 \cos 45^\circ = 70.71 \text{ mm} = 0.07071 \text{ m}$$

Entonces,

$$M_A = Fd = 200 \text{ N}(0.07071 \text{ m}) = 14.1 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$$

De acuerdo con la regla de la mano derecha, \mathbf{M}_A está dirigido en la dirección $+\mathbf{k}$ ya que la fuerza tiende a girar u orbitar en sentido *contrario al de las manecillas del reloj* con respecto al punto A. Por tanto, reportando el momento como un vector cartesiano, tenemos

$$\mathbf{M}_A = \{14.1\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Solución II

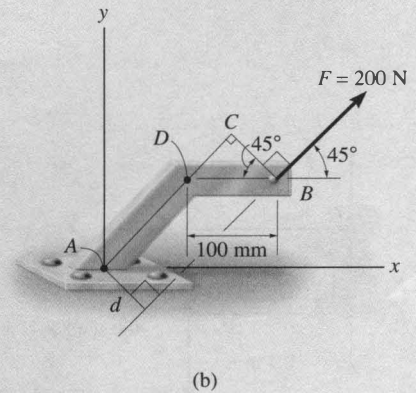
La fuerza de 200 N puede ser resuelta en componentes x y y , como se muestra en la figura 4-19c. De acuerdo con el principio de momentos, el momento de \mathbf{F} calculado con respecto al punto A es equivalente a la suma de los momentos producidos por las dos fuerzas componentes. Suponiendo positiva la rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj, es decir, en la dirección $+\mathbf{k}$, podemos aplicar la ecuación 4-2 ($M_A = \Sigma Fd$), en cuyo caso

$$\begin{aligned} \zeta + M_A &= (200 \sin 45^\circ \text{ N})(0.20 \text{ m}) - (200 \cos 45^\circ \text{ N})(0.10 \text{ m}) \\ &= 14.1 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow \end{aligned}$$

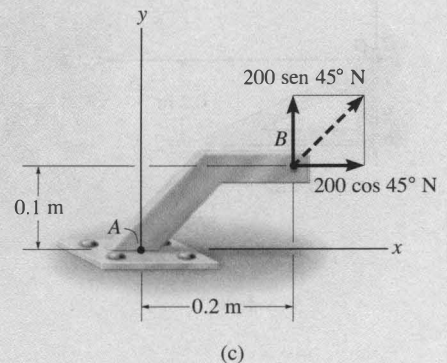
Entonces,

$$\mathbf{M}_A = \{14.1\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Por comparación, se ve que la solución II proporciona un *método* más *conveniente* para el análisis que la solución I ya que el brazo de momento para cada fuerza componente es más fácil de establecer.

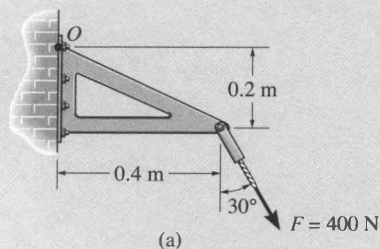


(b)



(c)

EJEMPLO 4.7



La fuerza \mathbf{F} actúa en el extremo de la ménsula mostrada en la figura 4-20a. Determine el momento de la fuerza con respecto al punto O .

Solución I (Análisis escalar)

La fuerza es resuelta en sus componentes x y y como se muestra en la figura 4-20b, y los momentos de las componentes se calculan con respecto al punto O . Tomando los momentos positivos como contrarios al sentido de las manecillas del reloj, es decir, en la dirección $+\mathbf{k}$, tenemos

$$\begin{aligned}\downarrow +M_O &= 400 \operatorname{sen} 30^\circ \text{ N}(0.2 \text{ m}) - 400 \operatorname{cos} 30^\circ \text{ N}(0.4 \text{ m}) \\ &= -98.6 \text{ N} \cdot \text{m} = 98.6 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow\end{aligned}$$

o bien

$$\mathbf{M}_O = \{-98.6\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Solución II (Análisis vectorial)

Usando un enfoque vectorial cartesiano, los vectores de fuerza y posición mostrados en la figura 4-20c pueden representarse como

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \{0.4\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j}\} \text{ m} \\ \mathbf{F} &= \{400 \operatorname{sen} 30^\circ \mathbf{i} - 400 \operatorname{cos} 30^\circ \mathbf{j}\} \text{ N} \\ &= \{200.0\mathbf{i} - 346.4\mathbf{j}\} \text{ N}\end{aligned}$$

Por tanto, el momento es

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.4 & -0.2 & 0 \\ 200.0 & -346.4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + [0.4(-346.4) - (-0.2)(200.0)]\mathbf{k} \\ &= \{-98.6\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

Por comparación, se ve que el análisis escalar (Solución I) es un método más conveniente que la solución II, ya que la dirección del momento y el brazo de momento para cada componente de fuerza son fáciles de establecer. Por tanto, generalmente se recomienda emplear este método para resolver problemas bidimensionales. Por otra parte, el análisis vectorial cartesiano es recomendado a menudo sólo para resolver problemas tridimensionales, donde los brazos de momento y componentes de fuerza son a menudo más difíciles de determinar.

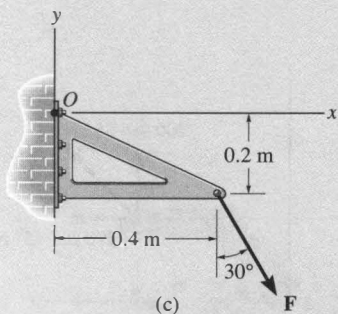
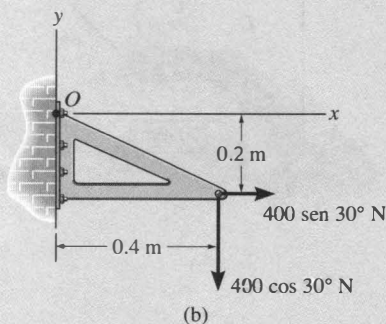


Fig. 4-20

PROBLEMAS

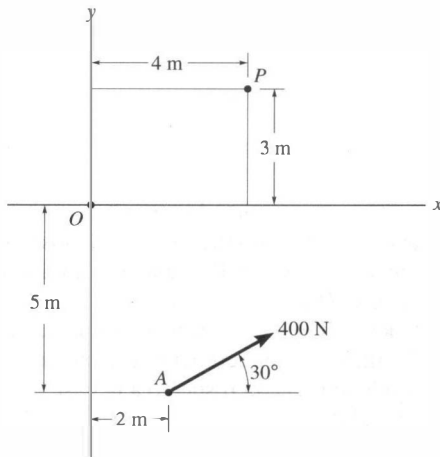
4-1. Si \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{D} son vectores dados, demuestre la ley distributiva para el producto cruz, es decir, que $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{D})$.

4-2. Demuestre la identidad del triple producto escalar, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$.

4-3. Dados los tres vectores no nulos \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} , demuestre que si $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0$, los tres vectores *deben* hallarse en el mismo plano.

*4-4. Determine la magnitud y el sentido direccional del momento de la fuerza presente en A con respecto al punto O .

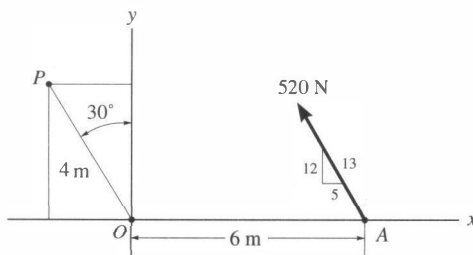
4-5. Determine la magnitud y el sentido direccional del momento de la fuerza presente en A con respecto al punto P .



Probs. 4-4/5

4-6. Determine la magnitud y el sentido direccional del momento de la fuerza presente en A con respecto al punto O .

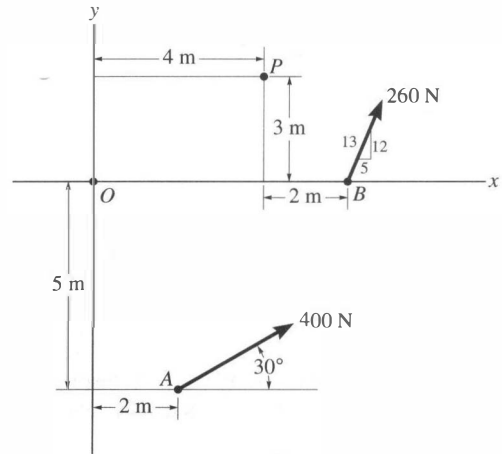
4-7. Determine la magnitud y el sentido direccional del momento de la fuerza presente en A con respecto al punto P .



Probs. 4-6/7

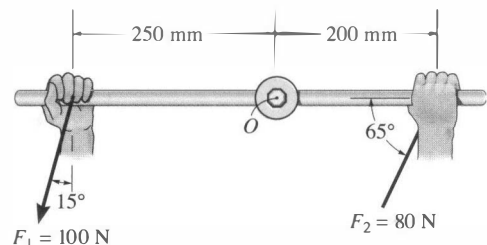
*4-8. Determine la magnitud y el sentido direccional del momento resultante de las fuerzas con respecto al punto O .

4-9. Determine la magnitud y el sentido direccional del momento resultante de las fuerzas con respecto al punto P .



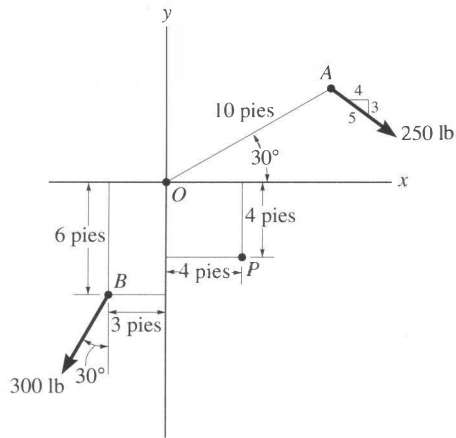
Probs. 4-8/9

4-10. La llave se usa para aflojar el perno. Determine el momento de cada fuerza con respecto al eje del perno que pasa por el punto O .



Prob. 4-10

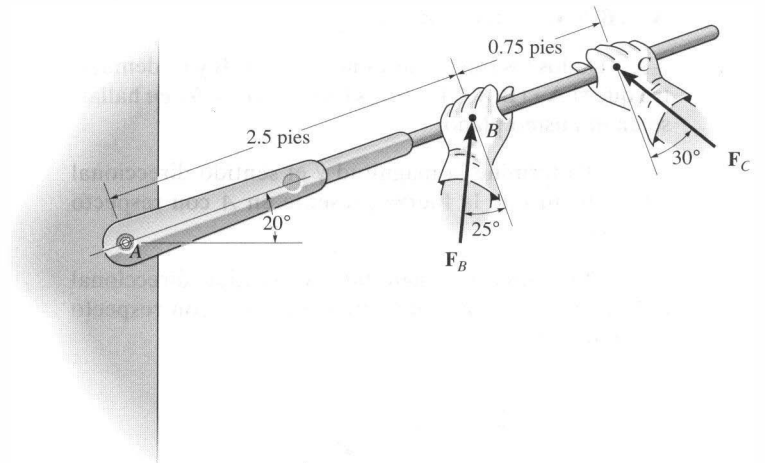
4-11. Determine la magnitud y el sentido direccional del momento resultante de las fuerzas con respecto al punto O .



Prob. 4-11

4-14. Determine el momento de cada fuerza con respecto al perno localizado en A . Considere $F_B = 40$ lb y $F_C = 50$ lb.

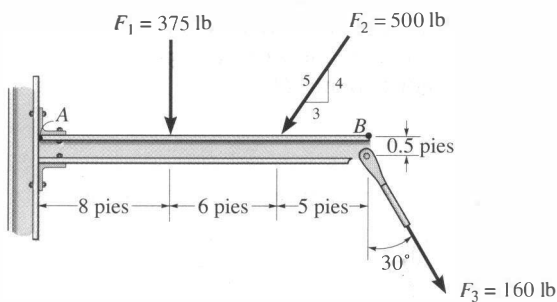
4-15. Si $F_B = 30$ lb y $F_C = 45$ lb, determine el momento resultante con respecto al perno localizado en A .



Probs. 4-14/15

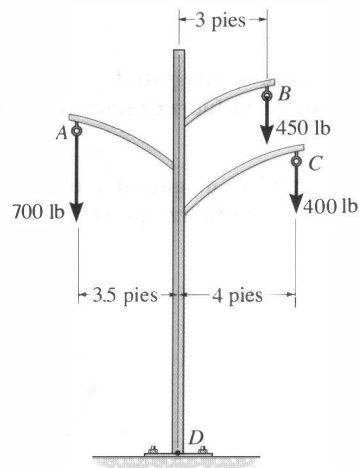
*4-12. Determine el momento con respecto al punto A de cada una de las tres fuerzas que actúan sobre la viga.

4-13. Determine el momento con respecto al punto B de cada una de las tres fuerzas que actúan sobre la viga.



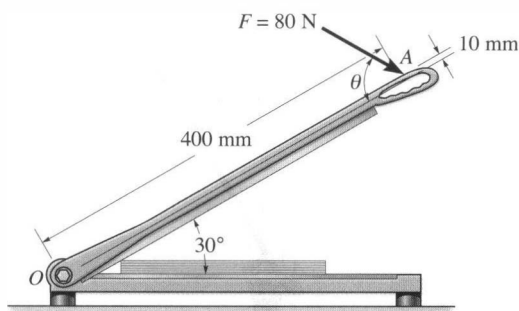
Probs. 4-12/13

*4-16. El poste soporta las tres líneas, cada línea ejerciendo una fuerza vertical sobre el poste debido a su peso, como se muestra. Determine el momento resultante en la base D debido a todas esas fuerzas. Si es posible que el viento o el hielo rompan las líneas, determine qué línea (o líneas) al ser removida genera una condición de momento máximo con respecto a la base. ¿Cuál es el momento resultante?



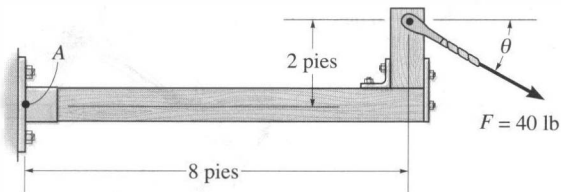
Prob. 4-16

4-17. Una fuerza de 80 N actúa sobre el mango del cortador de papel en el punto *A*. Determine el momento producido por esta fuerza con respecto a la articulación en *O*, si $\theta = 60^\circ$. ¿A qué ángulo θ debe aplicarse la fuerza para que el momento que produce con respecto al punto *O* sea máximo (en el sentido de las manecillas del reloj)? ¿Cuál es este momento máximo?



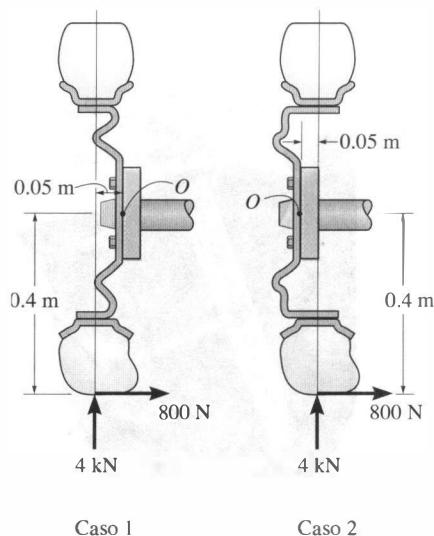
Prob. 4-17

4-18. Determine la dirección $\theta (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$ de la fuerza $F = 40$ lb para que produzca (a) el máximo momento con respecto al punto *A*, y (b) el mínimo momento con respecto al punto *A*. Calcule el momento en cada caso.



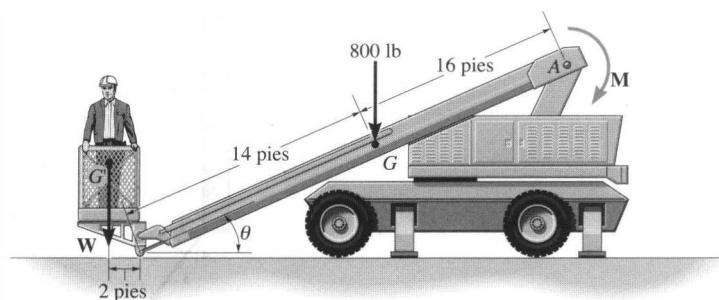
Prob. 4-18

4-19. El cubo de la rueda puede ser unido al eje con excentricidad negativa (izquierda) o positiva (derecha). Si el neumático está sometido a una carga normal y radial como se muestra, determine el momento resultante de esas cargas con respecto al eje o punto *O* en ambos casos.



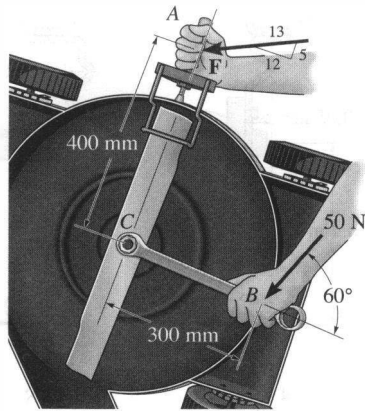
Prob. 4-19

***4-20.** El pescante tiene longitud de 30 pies, peso de 800 lb, y centro de masa en *G*. Si el momento máximo que puede ser desarrollado por el motor en *A* es $M = 20(10^3)$ lb · pie, determine la carga máxima *W*, con centro de masa en *G'*, que puede ser levantada. Considere $\theta = 30^\circ$.



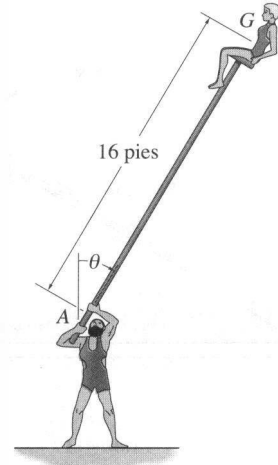
Prob. 4-20

4-21. La herramienta localizada en A se usa para mantener estacionaria la hoja de una podadora de césped de potencia mientras se afloja la tuerca con la llave. Si se aplica una fuerza de 50 N a la llave situada en B en la dirección mostrada, determine el momento que produce dicha fuerza con respecto a la tuerca localizada en C . ¿Cuál es la magnitud de la fuerza F en A que produce el momento opuesto con respecto a C ?



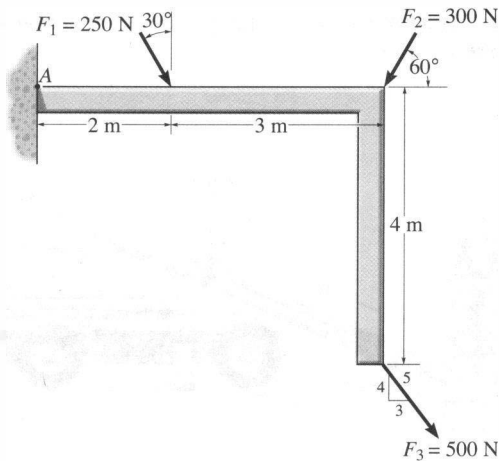
Prob. 4-21

4-23. Como parte de un acto acrobático, un hombre soporta una muchacha que pesa 120 lb y está sentada en una silla situada en la parte superior de un poste. Si el centro de gravedad de la chica está en G , y el máximo momento en sentido contrario al de las manecillas del reloj que el hombre puede ejercer sobre el poste en el punto A es de 250 lb · pie, determine el ángulo máximo de inclinación, θ , que no permitirá que la muchacha caiga, esto es, que su momento en el sentido de las manecillas del reloj con respecto a A no exceda de 250 lb · pie.



Prob. 4-23

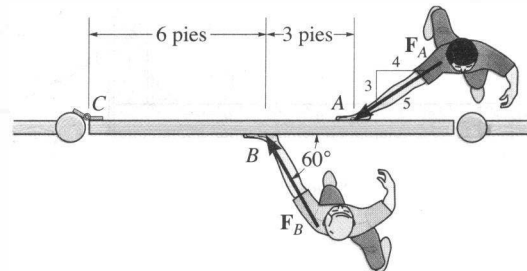
4-22. Determine el momento de cada una de las tres fuerzas con respecto al punto A . Resuelva el problema usando primero cada fuerza como un todo, y luego aplique el principio de momentos.



Prob. 4-22

***4-24.** Los dos jóvenes empujan la reja con fuerzas de $F_A = 30$ lb y $F_B = 50$ lb como se muestra. Determine el momento de cada fuerza con respecto a C . ¿En qué sentido rotará la reja, en el de las manecillas del reloj o al contrario? Ignore el espesor de la reja.

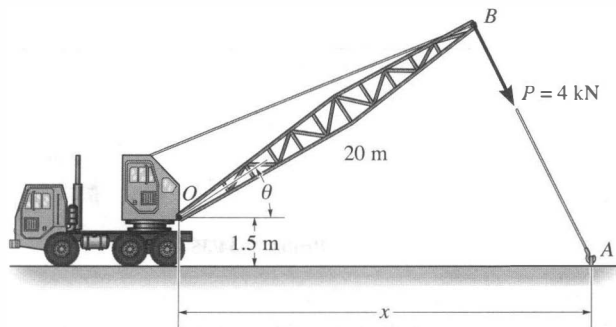
4-25. Dos jóvenes empujan la reja como se muestra. Si el joven situado en B ejerce una fuerza de $F_B = 30$ lb, determine la magnitud de la fuerza F_A que el joven ubicado en A debe ejercer para impedir que la reja gire. Ignore el espesor de la reja.



Probs. 4-24/25

4-26. El cable de remolque ejerce una fuerza de $P = 4$ kN en el extremo del aguilón de 20 m de longitud de la grúa. Si $\theta = 30^\circ$, determine la posición x del gancho localizado en A de modo que esta fuerza produzca un momento máximo con respecto al punto O . ¿Qué valor tiene este momento?

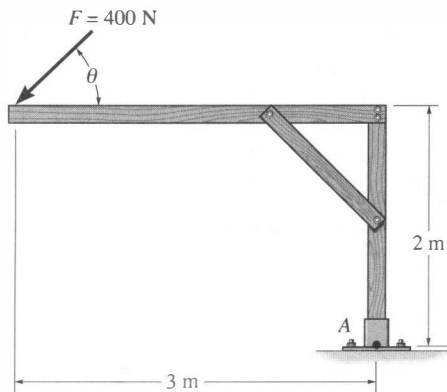
4-27. El cable de remolque ejerce una fuerza de $P = 4$ kN en el extremo del aguilón de 20 m de longitud de la grúa. Si $x = 25$ m, determine la posición θ del aguilón de modo que esta fuerza produzca un momento máximo con respecto al punto O . ¿Qué valor tiene este momento?



Probs. 4-26/27

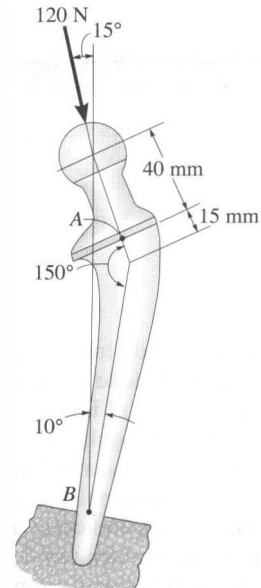
***4-28.** Determine la dirección θ para $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ de la fuerza F de manera que produzca (a) el momento máximo con respecto al punto A , y (b) el momento mínimo con respecto al punto A . Calcule el momento en cada caso.

4-29. Determine el momento de la fuerza F con respecto al punto A como función de θ . Grafique los resultados de M (ordenada) versus θ (abscisa) para $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.



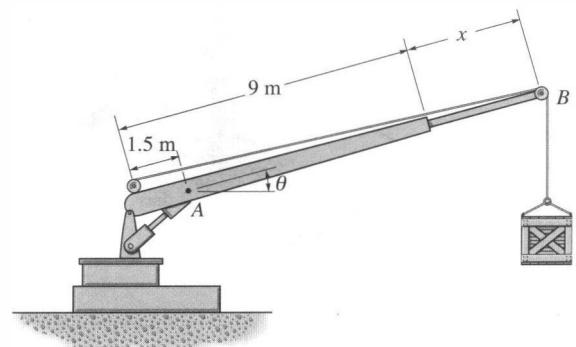
Probs. 4-28/29

4-30. La prótesis de cadera que se muestra está sometida a una fuerza de $F = 120$ N. Determine el momento de esta fuerza con respecto al cuello localizado en A y al tallo en B .



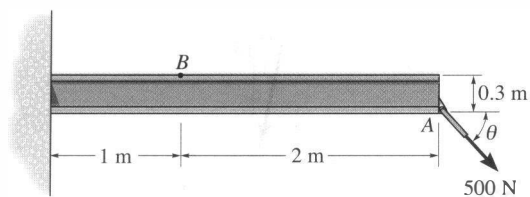
Prob. 4-30

4-31. La grúa puede ser ajustada a cualquier ángulo $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ y a cualquier extensión $0 \leq x \leq 5$ m. Para una masa suspendida de 120 kg, determine el momento desarrollado en A como una función de x y θ . ¿Qué valores de x y θ desarrollan el máximo momento posible en A ? Calcule este momento. Ignore el tamaño de la polea ubicada en B .



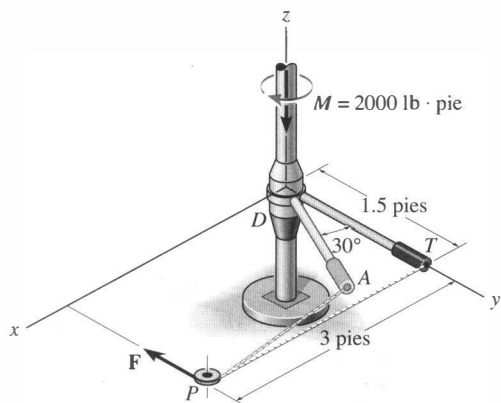
Prob. 4-31

*4-32. Determine el ángulo θ a que la fuerza de 500 N debe actuar en A para que el momento de esta fuerza con respecto al punto B sea igual a cero.



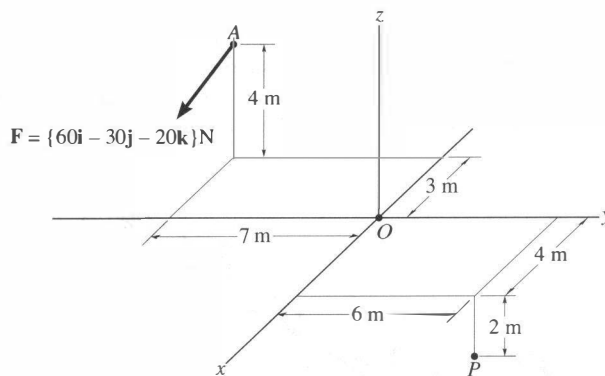
Prob. 4-32

4-33. Los segmentos de tubo D para un pozo petrolero son apretados una cantidad prescrita usando un juego de tenazas T , que agarran el tubo, y un cilindro hidráulico (no se muestra) para regular la fuerza F aplicada a las tenazas. Esta fuerza actúa a lo largo del cable que pasa alrededor de la pequeña polea situada en P . Si originalmente el cable es perpendicular a las tenazas como se muestra, determine la magnitud de la fuerza F que debe ser aplicada de manera que el momento alrededor del tubo sea de $M = 2000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$. Para mantener este mismo momento, ¿qué magnitud de F se requiere cuando las tenazas giran 30° hacia la posición punteada? Nota: El ángulo DAP no es de 90° en esta posición.



Prob. 4-33

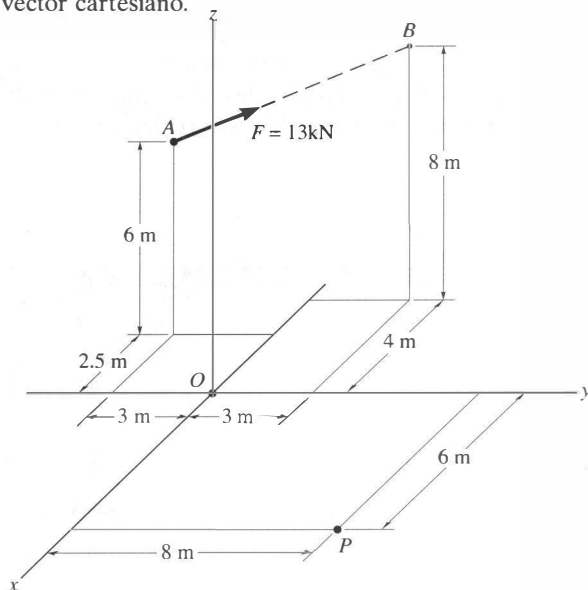
4-34. Determine el momento de la fuerza presente en A con respecto al punto O . Exprese el resultado como un vector cartesiano.



Probs. 4-34/35

*4-36. Determine el momento de la fuerza F presente en A con respecto al punto O . Exprese el resultado como un vector cartesiano.

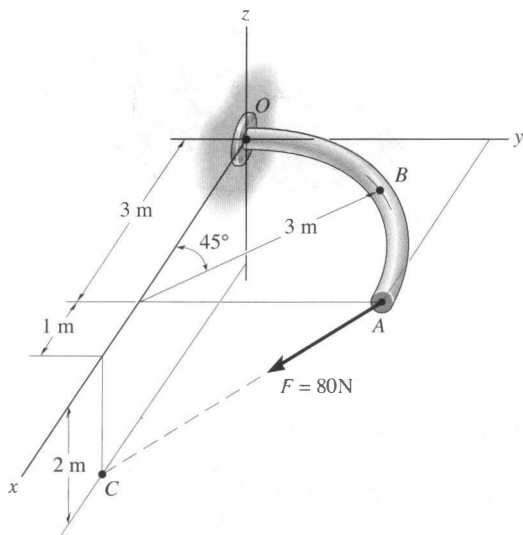
4-37. Determine el momento de la fuerza F presente en A con respecto al punto P . Exprese el resultado como un vector cartesiano.



Probs. 4-36/37

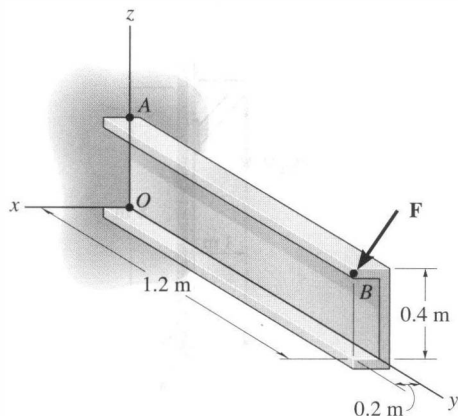
4-38. La barra curva se tiende en el plano x - y y tiene radio de 3 m. Si una fuerza $F = 80$ N actúa en su extremo como se muestra, determine el momento de esta fuerza con respecto al punto O .

4-39. La barra curva se tiende en el plano x - y y tiene radio de 3 m. Si una fuerza de $F = 80$ N actúa en su extremo como se muestra, determine el momento de esta fuerza con respecto al punto B .



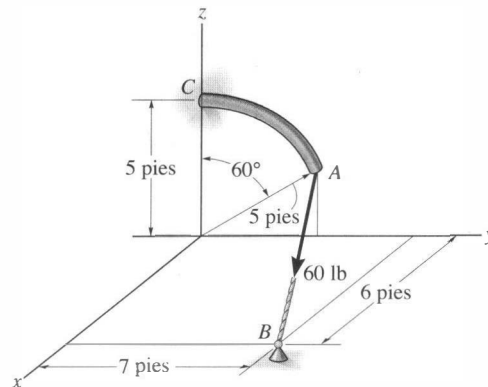
Probs. 4-38/39

*4-40. La fuerza $\mathbf{F} = \{600\mathbf{i} + 300\mathbf{j} - 600\mathbf{k}\}$ N actúa en el extremo de la viga. Determine el momento de la fuerza con respecto al punto A .



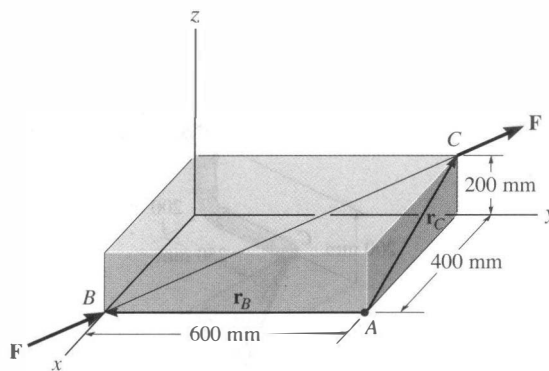
Prob. 4-40

4-41. La barra curva tiene un radio de 5 pies. Si una fuerza de 60 lb actúa en su extremo como se muestra, determine el momento de esta fuerza con respecto al punto C .



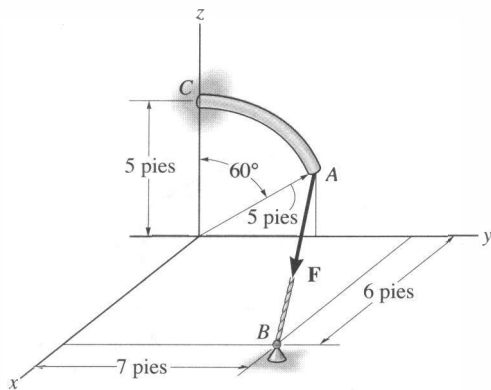
Prob. 4-41

4-42. Una fuerza \mathbf{F} con magnitud de $F = 100$ N actúa a lo largo de la diagonal del paralelepípedo. Determine el momento de \mathbf{F} con respecto al punto A , usando $\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}$ y $\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}$.



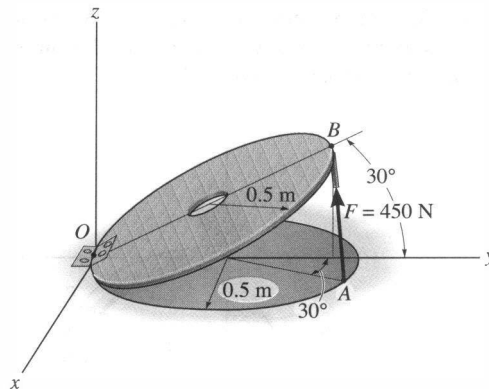
Prob. 4-42

4-43. Determine la mínima fuerza F que debe aplicarse a lo largo de la cuerda para ocasionar que la barra curva, con radio de 5 pies, falle en el soporte C . Esto requiere el desarrollo de un momento de $M = 80 \text{ lb} \cdot \text{pie}$ en C .



Prob. 4-43

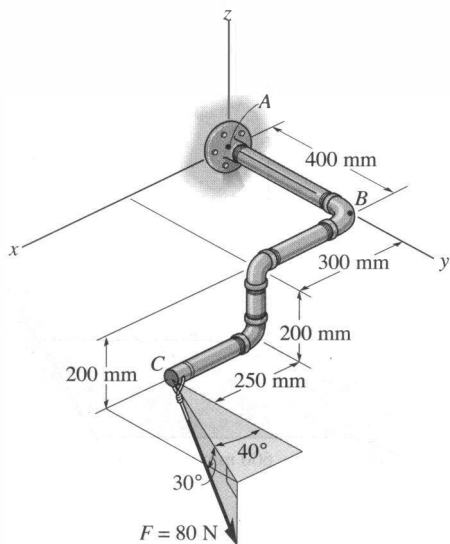
4-46. El puntal AB de la tapadera de 1 m de diámetro ejerce una fuerza de 450 N sobre el punto B . Determine el momento de esta fuerza con respecto al punto O .



Prob. 4-46

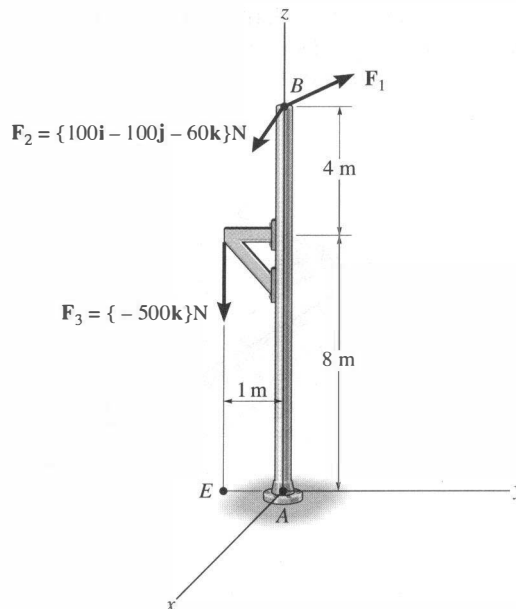
***4-44.** La tubería está sometida a la fuerza de 80 N. Determine el momento de esta fuerza con respecto al punto A .

4-45. La tubería está sometida a la fuerza de 80 N. Determine el momento de esta fuerza con respecto al punto B .



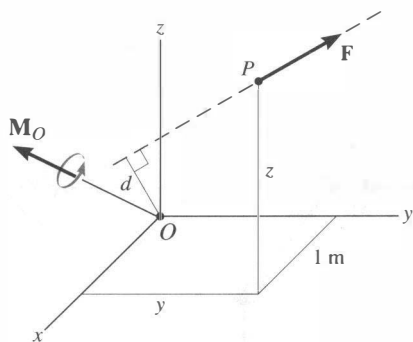
Probs. 4-44/45

4-47. Utilice el análisis vectorial cartesiano para determinar el momento resultante de las tres fuerzas con respecto a la base de la columna localizada en A . Considere $\mathbf{F}_1 = \{400\mathbf{i} + 300\mathbf{j} + 120\mathbf{k}\} \text{ N}$.



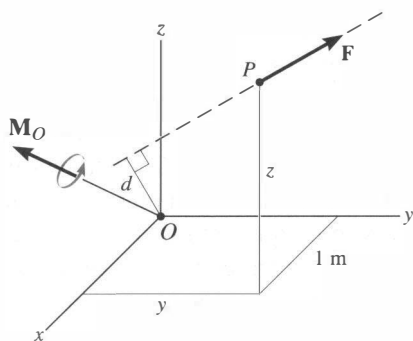
Prob. 4-47

*4-48. Una fuerza de $\mathbf{F} = \{6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\}$ kN produce un momento de $\mathbf{M}_O = \{4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 14\mathbf{k}\}$ kN · m con respecto al origen de coordenadas, o punto en O . Si la fuerza actúa en un punto que tiene una coordenada $x = 1$ m, determine las coordenadas y y z .



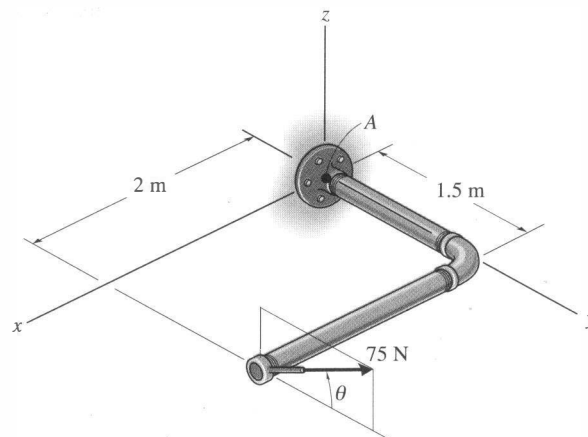
Prob. 4-48

4-49. La fuerza $\mathbf{F} = \{6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 10\mathbf{k}\}$ N produce un momento con respecto al punto O de $\mathbf{M}_O = \{-14\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\}$ N · m. Si esta fuerza pasa por un punto que tiene una coordenada x de 1 m, determine las coordenadas y y z del punto. Además, teniendo en cuenta que $M_O = Fd$, encuentre la distancia perpendicular d desde el punto O hasta la línea de acción de \mathbf{F} .



Prob. 4-49

■ 4-50. Usando un collarín anular, la fuerza de 75 N puede actuar en el plano vertical según varios ángulos θ . Determine la magnitud del momento que produce esta fuerza con respecto al punto A , grafique el resultado de M (ordenada) versus θ (abscisa) para $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, y especifique los ángulos que dan los momentos máximo y mínimo.



Prob. 4-50

4.5 Momento de una fuerza con respecto a un eje específico

Recuerde que cuando se calcula el momento de una fuerza con respecto a un punto, el momento y su eje son *siempre* perpendiculares al plano que contiene la fuerza y el brazo de momento. En algunos problemas es importante encontrar la *componente* de este momento a lo largo de un *eje específico* que pasa por el punto. Para resolver esto puede usarse un análisis escalar o vectorial.

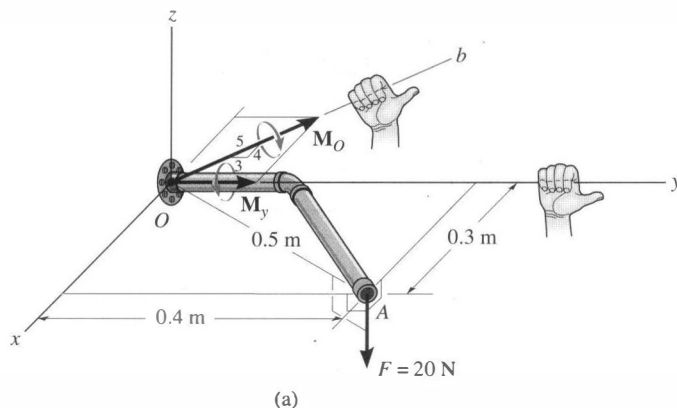


Fig. 4-21

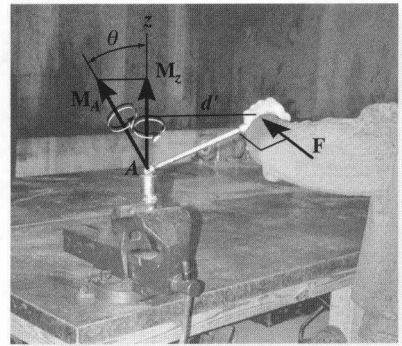
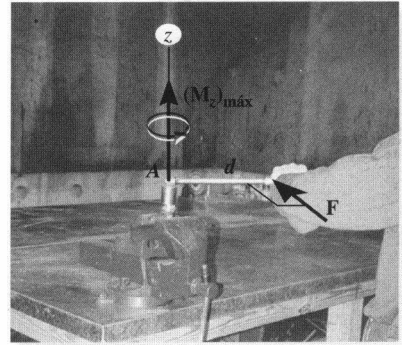
Análisis escalar. Como ejemplo numérico de este problema, considere la tubería mostrada en la figura 4-21a, la cual se encuentra en el plano horizontal y está sometida a la fuerza vertical de $F = 20 \text{ N}$ aplicada en el punto A. El momento de esta fuerza con respecto al punto O tiene una *magnitud* de $M_O = (20 \text{ N})(0.5 \text{ m}) = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$, y una *dirección* definida por la regla de la mano derecha, como se muestra en la figura 4-21a. Este momento tiende a girar la tubería con respecto al eje Ob. Sin embargo, por razones prácticas, puede ser necesario determinar la *componente* de \mathbf{M}_O con respecto al eje y, \mathbf{M}_y , ya que esta componente tiende a destornillar la tubería del soporte localizado en O. A partir de la figura 4-21a, \mathbf{M}_y tiene magnitud de $M_y = \frac{3}{5}(10 \text{ N} \cdot \text{m}) = 6 \text{ N} \cdot \text{m}$ y un sentido de dirección mostrado por la resolución del vector. En vez de efectuar el proceso de *dos pasos* de encontrar primero el momento de la fuerza con respecto al punto O y luego resolver el momento a lo largo del eje y, también es posible resolver este problema *directamente*. Para hacerlo así, es necesario determinar la distancia perpendicular o distancia del brazo de momento desde la línea de acción de \mathbf{F} hasta el eje y. En la figura 4-21a vemos que esta distancia es de 0.3 m. Así, la *magnitud* del momento de la fuerza con respecto al eje y es de nuevo $M_y = 0.3(20 \text{ N}) = 6 \text{ N} \cdot \text{m}$, y la *dirección* se determina mediante la regla de la mano derecha como se muestra.

En general, entonces, si la línea de acción de una fuerza \mathbf{F} es perpendicular a cualquier eje específico aa , la magnitud del momento de \mathbf{F} con respecto al eje puede ser determinada mediante la ecuación

$$M_a = Fd_a \quad (4-10)$$

Aquí, d_a es la *distancia perpendicular o más corta* desde la línea de acción de la fuerza hasta el eje. La dirección se determina con el pulgar de la mano derecha cuando los dedos se enrollan de acuerdo con la dirección de la rotación producida por la fuerza. En particular, vea que una *fuerza no contribuirá con un momento con respecto a un eje específico si la línea de acción de la fuerza es paralela al eje o pasa por el eje.*

Si una fuerza horizontal \mathbf{F} es aplicada al mango de la llave, ésta tiende a girar el enchufe localizado en A alrededor del eje z . Este efecto es causado por el momento de \mathbf{F} con respecto al eje z . El *momento máximo* se determina cuando la llave está en el plano horizontal de manera que se obtiene un pleno apalancamiento del mango, es decir, $(M_z)_{\text{máx}} = Fd$. Si el mango no está en la posición horizontal, entonces el momento con respecto al eje z se determina por medio de $M_z = Fd'$, donde d' es la distancia perpendicular desde la línea de acción de la fuerza hasta el eje. Este momento también puede ser determinado encontrando primero el momento de \mathbf{F} con respecto a A , $M_A = Fd$, y calculando luego la proyección o componente de este momento a lo largo de z , es decir, $M_z = M_A \cos \theta$.



Análisis vectorial. La solución previa, que se efectúa en dos pasos, de encontrar primero el momento de la fuerza con respecto a un punto sobre el eje y calcular luego la componente proyectada del momento con respecto al eje, también puede efectuarse mediante análisis vectorial, figura 4-21*b*. Aquí, el momento con respecto al punto O se determina primero con $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} = (0.3\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) \times (-20\mathbf{k}) = \{-8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}\} \text{ N} \cdot \text{m}$. La componente o proyección de este momento a lo largo del eje y es determinada entonces con el producto punto (Sección 2.9). Como el vector unitario para este eje (o línea) es $\mathbf{u}_a = \mathbf{j}$, entonces $M_y = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u}_a = (-8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} = 6 \text{ N} \cdot \text{m}$. Este resultado, por supuesto, es el esperado, ya que representa la componente \mathbf{j} de \mathbf{M}_O .

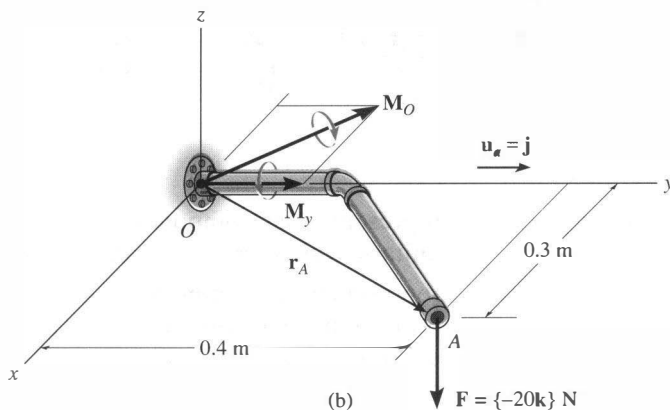


Fig. 4-21

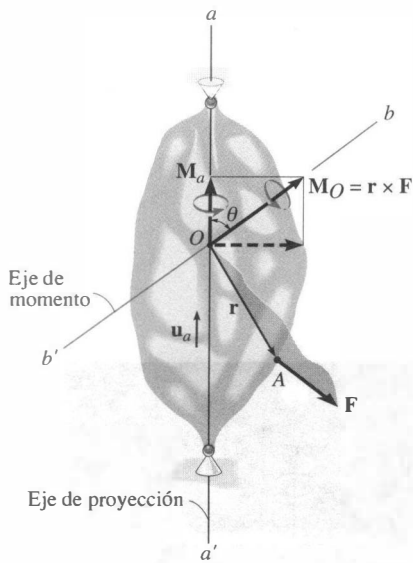


Fig. 4-22

Un análisis vectorial como éste es conveniente, de manera particular, para encontrar el momento de una fuerza con respecto a un eje cuando las componentes de fuerza o los brazos de momento apropiados son difíciles de determinar. Por esta razón, el proceso anterior de dos pasos será generalizado ahora y aplicado a un cuerpo de forma arbitraria. Para hacer esto, considere el cuerpo que aparece en la figura 4-22, el cual está sometido a la fuerza \mathbf{F} que actúa en el punto A . Aquí queremos determinar el efecto de \mathbf{F} en su tendencia a girar el cuerpo alrededor del eje aa' . Esta tendencia a girar es medida por la componente de momento \mathbf{M}_a . Para determinar \mathbf{M}_a calculamos primero el momento de \mathbf{F} con respecto a cualquier *punto arbitrario* O que se encuentre sobre el eje aa' . En este caso, \mathbf{M}_O es expresado por el producto cruz $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, donde \mathbf{r} está dirigido desde O hasta A . Aquí, \mathbf{M}_O actúa a lo largo del eje de momento bb' , y la componente o proyección de \mathbf{M}_O sobre el eje aa' es entonces \mathbf{M}_a . La *magnitud* de \mathbf{M}_a es determinada por el producto punto, $M_a = M_O \cos \theta = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u}_a$ donde \mathbf{u}_a es un vector unitario que define la dirección del eje aa' . Combinando esos dos pasos en una expresión general, tenemos $M_a = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{u}_a$. Como el producto punto es conmutativo, podemos escribir también

$$M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

En álgebra vectorial, esta combinación de los productos punto y cruz que dan el escalar M_a se denomina *triple producto escalar*. Si los ejes x, y, z están establecidos y las componentes cartesianas de cada uno de los vectores pueden ser determinadas, entonces el triple producto escalar puede escribirse en forma de determinante como

$$M_a = (u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

o simplemente

$$M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (4-11)$$

donde

u_x, u_y, u_z representan las componentes x, y, z del vector unitario que define la dirección del eje aa'

r_x, r_y, r_z representan las componentes x, y, z del vector posición trazado desde *cualquier punto* O sobre el eje aa' hacia *cualquier punto* A sobre la línea de acción de la fuerza

F_x, F_y, F_z representan las componentes x, y, z del vector fuerza.

Cuando M_a sea evaluado con la ecuación 4-11, dará un escalar positivo o negativo. El signo de este escalar indica el sentido de dirección de \mathbf{M}_a a lo largo del eje aa' . Si es positivo, entonces \mathbf{M}_a tendrá el mismo sentido que \mathbf{u}_a , mientras que si es negativo, \mathbf{M}_a actuará en sentido opuesto a \mathbf{u}_a .

Una vez determinado M_a , podemos expresar a \mathbf{M}_a como un vector cartesiano, a saber,

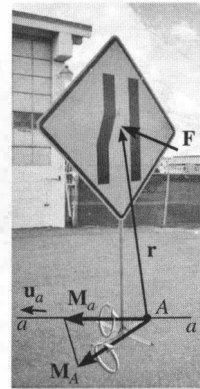
$$\mathbf{M}_a = M_a \mathbf{u}_a = [\mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})] \mathbf{u}_a \quad (4-12)$$

Finalmente, si el momento resultante de una serie de fuerzas va a ser calculado con respecto al eje aa' , entonces las componentes de momento de cada fuerza se suman entre sí *algebraicamente*, ya que cada componente se encuentra a lo largo del mismo eje. Así, la magnitud de \mathbf{M}_a es

$$M_a = \Sigma[\mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})] = \mathbf{u}_a \cdot \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

Los ejemplos que siguen ilustran una aplicación numérica de los conceptos anteriores.

Al soplar sobre la cara de esta señal de tránsito, el viento crea una fuerza resultante \mathbf{F} que tiende a voltear la señal debido al momento \mathbf{M}_A generado con respecto al eje $a-a$. El momento de \mathbf{F} con respecto a un punto A que se encuentra sobre el eje es $\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. La proyección de este momento a lo largo del eje cuya dirección es definida por el vector unitario \mathbf{u}_a es $M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$. Si el momento hubiese sido calculado usando métodos escalares, entonces la distancia perpendicular desde la línea de acción de la fuerza hasta el eje $a-a$ tendría que haber sido determinada, lo que en este caso hubiera representado una tarea más difícil.



PUNTOS IMPORTANTES

- El momento de una fuerza con respecto a un eje específico puede ser determinado siempre que las distancias d_a tanto desde la línea de acción de la fuerza y como desde el eje puedan ser determinadas. $M_a = Fd_a$.
- Si se usa el análisis vectorial, $M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$, donde \mathbf{u}_a define la dirección del eje y \mathbf{r} está dirigido desde cualquier punto sobre el eje hacia cualquier punto sobre la línea de acción de la fuerza.
- Si M_a es calculado como un escalar negativo, entonces el sentido de dirección de \mathbf{M}_a es opuesto a \mathbf{u}_a .
- El momento \mathbf{M}_a expresado como un vector cartesiano es determinado a partir de $\mathbf{M}_a = M_a \mathbf{u}_a$.

EJEMPLO 4.8

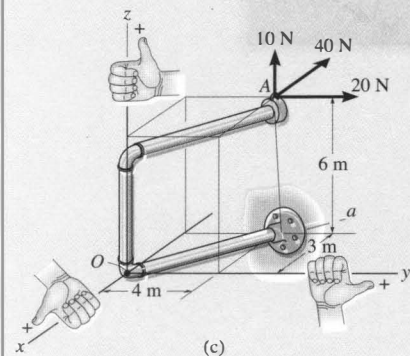
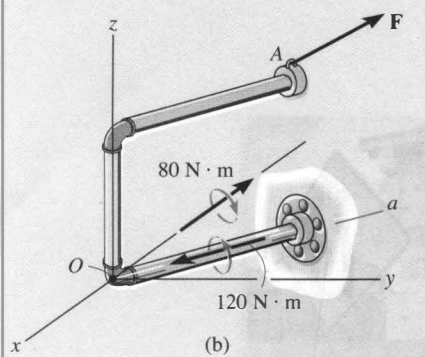
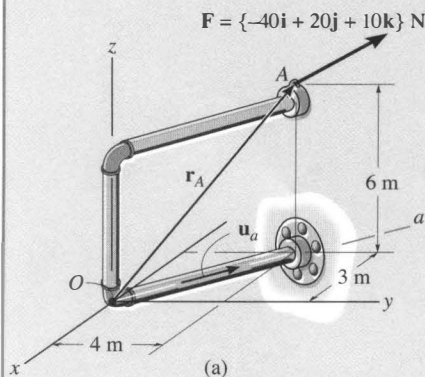


Fig. 4-23

La fuerza $\mathbf{F} = \{-40\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 10\mathbf{k}\}$ N actúa en el punto A mostrado en la figura 4-23a. Determine los momentos de esta fuerza con respecto a los ejes x y a .

Solución I (Análisis vectorial)

Podemos resolver este problema usando el vector posición \mathbf{r}_A . ¿Por qué? Como $\mathbf{r}_A = \{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\}$ m y $\mathbf{u}_x = \mathbf{i}$, entonces al aplicar la ecuación 4-11,

$$M_x = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \\ -40 & 20 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 1[4(10) - 6(20)] - 0[(-3)(10) - 6(-40)] + 0[(-3)(20) - 4(-40)]$$

$$= -80 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

El signo negativo indica que el sentido de M_x es opuesto a \mathbf{i} .

Podemos calcular también M_a usando \mathbf{r}_A porque \mathbf{r}_A se extiende desde un punto sobre el eje a hasta la fuerza. También, $\mathbf{u}_a = -\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$. Entonces,

$$M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -3 & 4 & 6 \\ -40 & 20 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{3}{5}[4(10) - 6(20)] - \frac{4}{5}[(-3)(10) - 6(-40)] + 0[(-3)(20) - 4(-40)]$$

$$= -120 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

¿Qué indica el signo negativo?

Las componentes de momento se muestran en la figura 4-23b.

Solución II (Análisis escalar)

Como las componentes de fuerza y los brazos de momento son fáciles de determinar para poder calcular M_x , puede usarse un análisis escalar para resolver este problema. Con referencia a la figura 4-23c, sólo las fuerzas de 10 y 20 N aportan momentos con respecto al eje x . (La línea de acción de la fuerza de 40 N es paralela a este eje y , por tanto, su momento con respecto al eje x es cero). Usando la regla de la mano derecha, la suma algebraica de las componentes de momento con respecto al eje x es entonces

$$M_x = (10 \text{ N})(4 \text{ m}) - (20 \text{ N})(6 \text{ m}) = -80 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Aunque no se requieren aquí, observe que

$$M_y = (10 \text{ N})(3 \text{ m}) - (40 \text{ N})(6 \text{ m}) = -210 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = (40 \text{ N})(4 \text{ m}) - (20 \text{ N})(3 \text{ m}) = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Si hubiese que determinar M_a usando este método escalar, se requeriría un esfuerzo mucho mayor ya que las componentes de las fuerzas de 40 y 20 N *no son perpendiculares* a la dirección del eje a . El análisis vectorial produce una solución más directa.

EJEMPLO 4.9

La barra mostrada en la figura 4–24a está sostenida por dos ménsulas situadas una en A y la otra en B . Determine el momento \mathbf{M}_{AB} producido por $\mathbf{F} = \{-600\mathbf{i} + 200\mathbf{j} - 300\mathbf{k}\}$ N, que tiende a girar la barra con respecto al eje AB .

Solución

Para encontrar la solución será considerado un análisis vectorial usando $M_{AB} = \mathbf{u}_B \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$, ya que el brazo de momento o distancia perpendicular desde la línea de acción de \mathbf{F} hasta el eje AB es difícil de determinar. Cada uno de los términos presentes en la ecuación será identificado ahora.

El vector unitario \mathbf{u}_B define la dirección del eje AB de la barra, figura 4–24b, donde

$$\mathbf{u}_B = \frac{\mathbf{r}_B}{r_B} = \frac{0.4\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j}}{\sqrt{(0.4)^2 + (0.2)^2}} = 0.894\mathbf{i} + 0.447\mathbf{j}$$

El vector \mathbf{r} está dirigido desde *cualquier punto* sobre el eje AB hacia *cualquier punto* sobre la línea de acción de la fuerza. Por ejemplo, los vectores posición \mathbf{r}_C y \mathbf{r}_D son los adecuados, figura 4–24b. (Aunque no se muestran, \mathbf{r}_{BC} o \mathbf{r}_{BD} también pueden ser usados). En aras de la sencillez, seleccionamos \mathbf{r}_D , donde

$$\mathbf{r}_D = \{0.2\mathbf{j}\} \text{ m}$$

La fuerza es

$$\mathbf{F} = \{-600\mathbf{i} + 200\mathbf{j} - 300\mathbf{k}\} \text{ N}$$

Al sustituir estos vectores en la forma de determinante, y desarrollándolo, tenemos

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \mathbf{u}_B \cdot (\mathbf{r}_D \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 0.894 & 0.447 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -600 & 200 & -300 \end{vmatrix} \\ &= 0.894[0.2(-300) - 0(200)] - 0.447[0(-300) - 0(-600)] + \\ &\quad 0[0(200) - 0.2(-600)] \\ &= -53.67 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

El signo negativo indica que el sentido de \mathbf{M}_{AB} es opuesto al de \mathbf{u}_B .

Al expresar \mathbf{M}_{AB} como un vector cartesiano resulta,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{AB} &= M_{AB}\mathbf{u}_B = (-53.67 \text{ N} \cdot \text{m})(0.894\mathbf{i} + 0.447\mathbf{j}) \\ &= \{-48.0\mathbf{i} - 24.0\mathbf{j}\} \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Resp.

El resultado se muestra en la figura 4–24b.

Observe que si el eje AB se define usando un vector unitario dirigido de B hacia A , entonces $-\mathbf{u}_B$ tendría que haber sido aplicado en la formulación anterior. Esto conduciría a $M_{AB} = +53.67 \text{ N} \cdot \text{m}$. En consecuencia, $\mathbf{M}_{AB} = M_{AB}(-\mathbf{u}_B)$, y el resultado anterior sería determinado de nuevo.

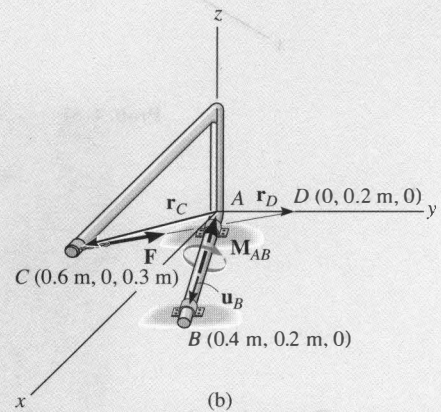
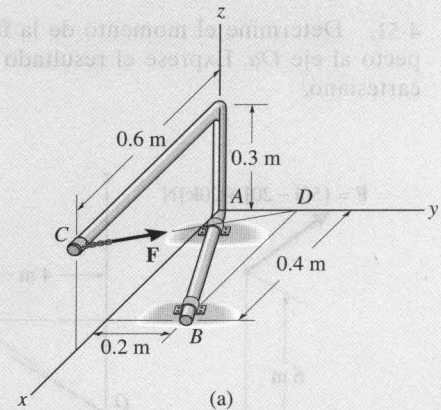
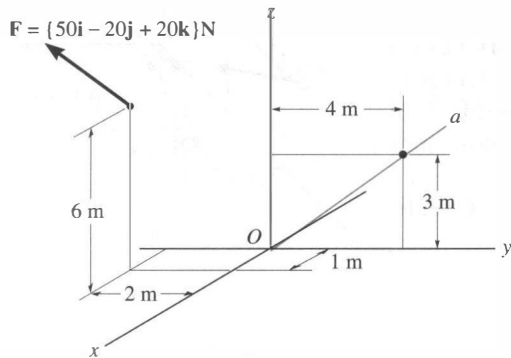


Fig. 4–24

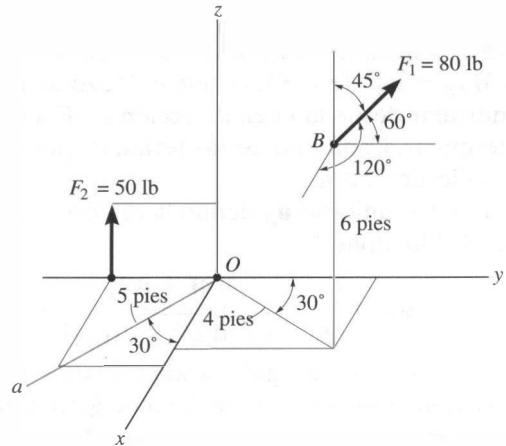
PROBLEMAS

4-51. Determine el momento de la fuerza \mathbf{F} con respecto al eje Oa . Expresé el resultado como un vector cartesiano.



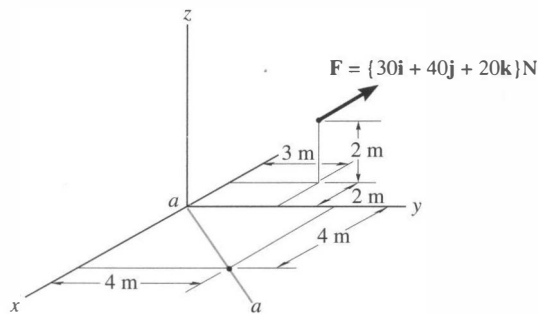
Prob. 4-51

4-53. Determine el momento resultante de las dos fuerzas con respecto al eje Oa . Expresé el resultado como un vector cartesiano.



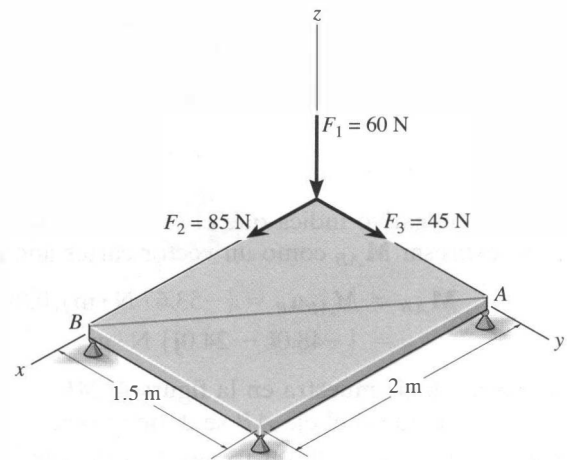
Prob. 4-53

***4-52.** Determine el momento de la fuerza \mathbf{F} con respecto al eje aa . Expresé el resultado como un vector cartesiano.



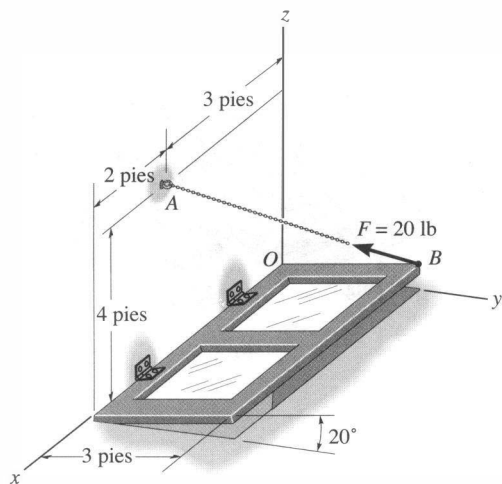
Prob. 4-52

4-54. Determine la magnitud del momento de cada una de las tres fuerzas con respecto al eje AB . Resuelva el problema (a) usando un enfoque de vector cartesiano, y (b) mediante un enfoque escalar.



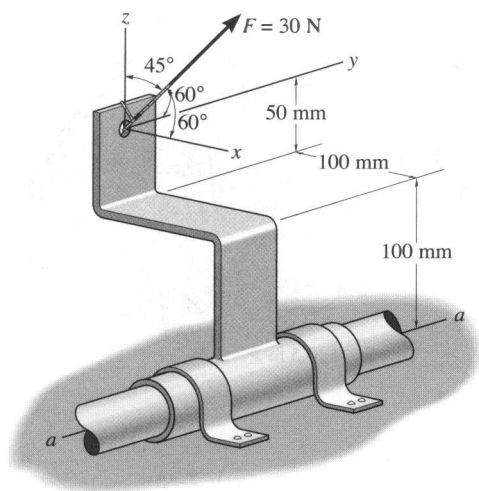
Prob. 4-54

4-55. La cadena AB ejerce una fuerza de 20 lb sobre la puerta localizada en B . Determine la magnitud del momento de esta fuerza a lo largo del eje abisagrado x de la puerta.



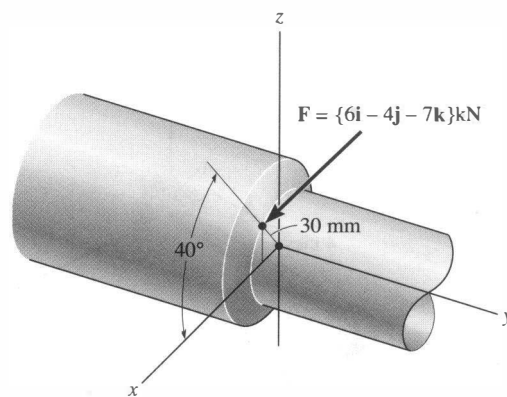
Prob. 4-55

*4-56. La fuerza de $F = 30$ N actúa sobre la ménsula como se muestra. Determine el momento de la fuerza con respecto al eje $a-a$ del tubo. Determine también los ángulos coordenados de dirección de F para producir el momento máximo con respecto al eje $a-a$. ¿Qué valor tiene este momento?



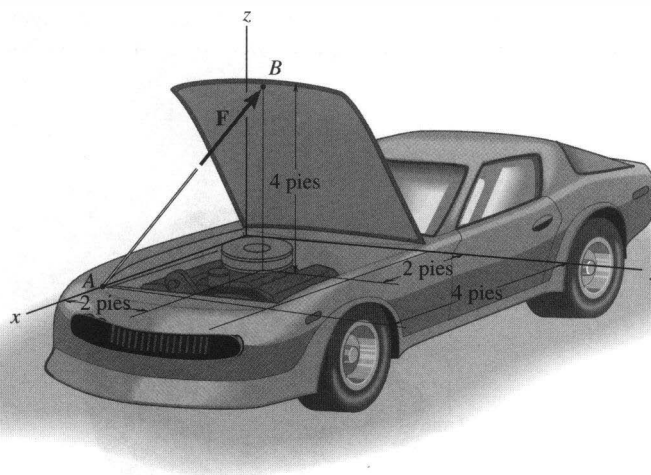
Prob. 4-56

4-57. La herramienta de corte situada sobre el torno ejerce una fuerza F sobre la flecha en la dirección mostrada. Determine el momento de esta fuerza con respecto al eje y de la flecha.



Prob. 4-57

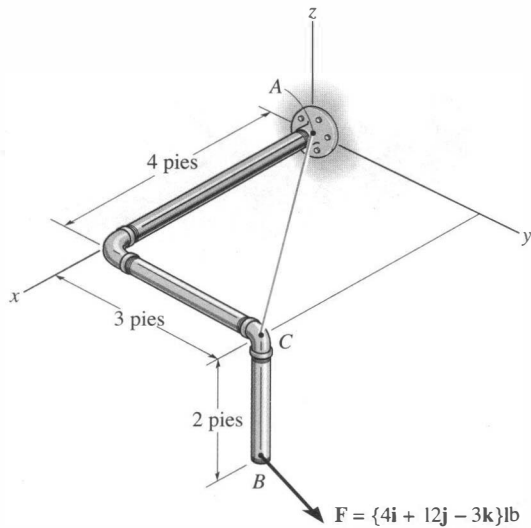
4-58. La capota del automóvil está soportada por el puntal AB que ejerce una fuerza de $F = 24$ lb sobre la capota. Determine el momento de esta fuerza con respecto al eje y y articulado.



Prob. 4-58

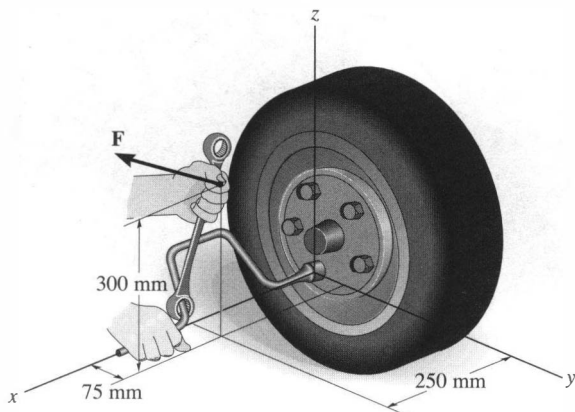
4-59. Determine la magnitud de los momentos de la fuerza \mathbf{F} con respecto a los ejes x , y , z . Resuelva el problema (a) usando un enfoque vectorial cartesiano, y (b) mediante un enfoque escalar.

*4-60. Determine el momento de la fuerza \mathbf{F} con respecto a un eje que pasa por A y C . Exprese el resultado como un vector cartesiano.



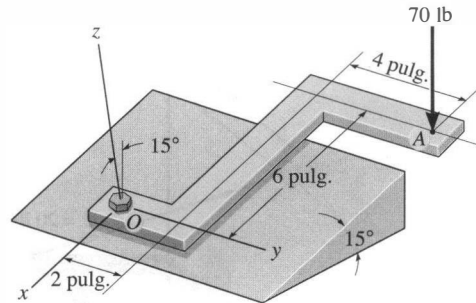
Probs. 4-59/60

4-61. Las dos llaves mostradas se usan en combinación para quitar la tuerca del cubo de la rueda. Si la fuerza aplicada sobre el extremo de la llave de cubo es $\mathbf{F} = \{4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\} \text{ N}$, determine la magnitud del momento de esta fuerza con respecto al eje x que es efectivo en destornillar la tuerca.



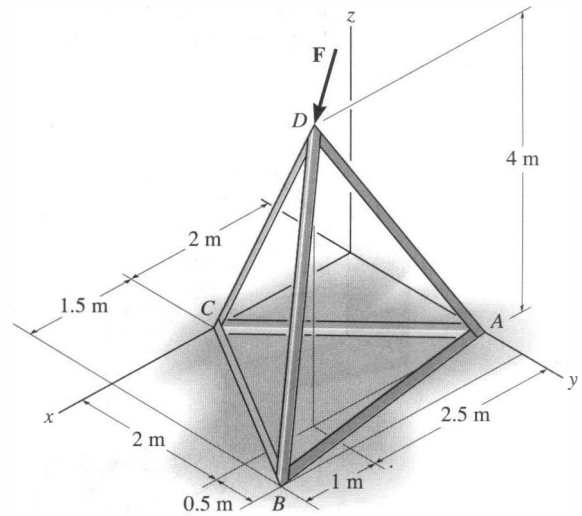
Prob. 4-61

4-62. Una fuerza de 70 lb actúa verticalmente sobre la pieza en forma de Z. Determine la magnitud del momento de esta fuerza con respecto al eje del perno (eje z).



Prob. 4-62

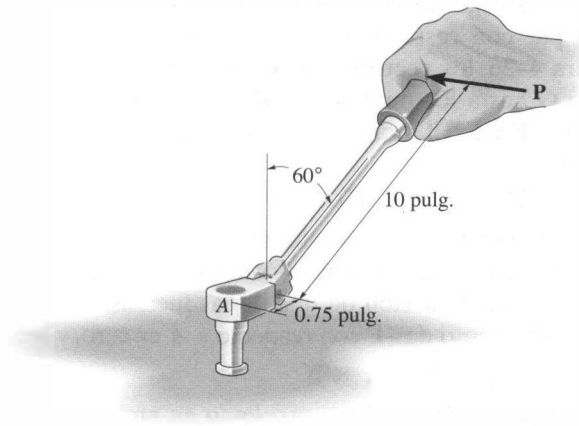
4-63. Determine la magnitud del momento de la fuerza $\mathbf{F} = \{50\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 80\mathbf{k}\} \text{ N}$ con respecto a la línea base CA del trípode.



Prob. 4-63

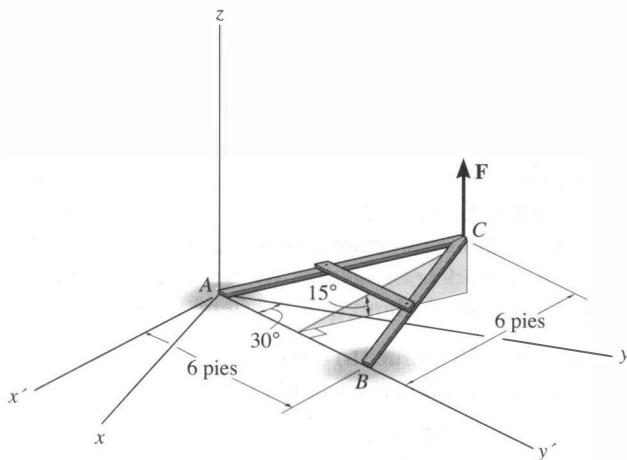
*4-64. La llave está sometida a una fuerza $P = 16$ lb aplicada perpendicularmente a su mango como se muestra. Determine el momento o la torca impartidos a lo largo del eje vertical del perno localizado en A .

4-65. Si una torca o un momento de $80 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$ son requeridos para aflojar el perno localizado en A , determine la fuerza P que debe aplicarse perpendicularmente al mango de la llave.



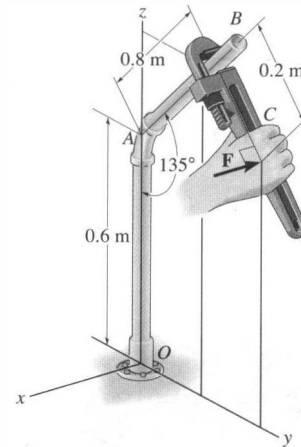
Probs. 4-64/65

4-66. El marco en forma de A está siendo levantado a una posición perpendicular empleando la fuerza vertical de $F = 80$ lb. Determine el momento de esta fuerza con respecto al eje y cuando el marco está en la posición mostrada.



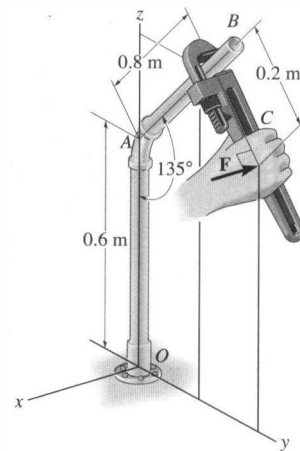
Prob. 4-66

4-67. Una fuerza horizontal de $\mathbf{F} = \{-50\mathbf{i}\}$ N es aplicada perpendicularmente al mango de la llave. Determine el momento que ejerce esta fuerza a lo largo del eje OA (eje z) de la tubería. Tanto la llave como la tubería, $OABC$, se encuentran en el plano $y-z$. *Sugerencia:* Use un análisis escalar.



Prob. 4-67

*4-68. Determine la magnitud de la fuerza horizontal $\mathbf{F} = -F\mathbf{i}$ que actúa sobre el mango de la llave si produce una componente de momento a lo largo del eje OA (eje z) de la tubería de $\mathbf{M}_z = \{4\mathbf{k}\}$ N \cdot m. Tanto la llave como la tubería, $OABC$, se encuentran en el plano $y-z$. *Sugerencia:* Use un análisis escalar.



Prob. 4-68

4.6 Momento de un par

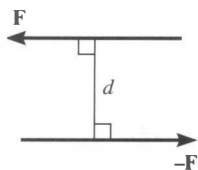


Fig. 4-25

Un *par* se define como dos fuerzas paralelas que tienen la misma magnitud, con direcciones opuestas, y están separadas por una distancia perpendicular d , figura 4-25. Como la fuerza resultante es cero, el único efecto de un par es producir una rotación o tendencia a rotar en una dirección específica.

El momento producido por un par se denomina *momento de par*. Podemos determinar su valor encontrando la suma de los momentos de ambas fuerzas del par con respecto a *cualquier* punto arbitrario. Por ejemplo, en la figura 4-26, los vectores de posición \mathbf{r}_A y \mathbf{r}_B están dirigidos desde el punto O hasta los puntos A y B que se encuentran sobre la línea de acción de $-F$ y F . El momento del par calculado con respecto a O es, por tanto,

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times (-\mathbf{F}) + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}$$

En vez de sumar los momentos de ambas fuerzas para determinar el momento del par, es más fácil tomar momentos con respecto a un punto que se encuentre sobre la línea de acción de una de las fuerzas. Si se elige el punto A , entonces el momento de $-F$ con respecto a A es cero, y tenemos

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{4-13}$$

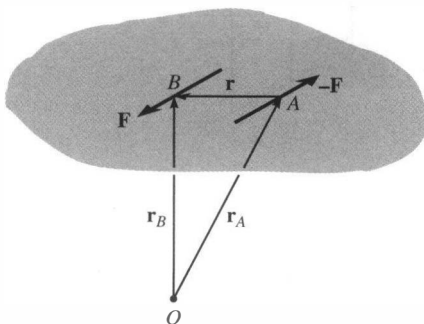


Fig. 4-26

El hecho de que obtenemos el *mismo resultado* en ambos casos puede ser demostrado al advertir que en el primer caso podemos escribir $\mathbf{M} = (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{F}$; y por la regla del triángulo de la adición vectorial, $\mathbf{r}_A + \mathbf{r} = \mathbf{r}_B$ o $\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, de modo que al sustituir obtenemos la ecuación 4-13. Este resultado indica que un momento de par es un *vector libre*, es decir, puede actuar en *cualquier punto* ya que \mathbf{M} depende *sólo* del vector posición \mathbf{r} dirigido *entre* las fuerzas y *no* de los vectores de posición \mathbf{r}_A y \mathbf{r}_B , dirigidos desde el punto arbitrario O hasta las fuerzas. Este concepto es, por tanto, diferente al momento de una fuerza, el cual requiere un punto definido (o eje) con respecto al cual los momentos son determinados.

Formulación escalar. El momento de un par, \mathbf{M} , figura 4-27, es definido poseyendo una *magnitud* de

$$M = Fd \tag{4-14}$$

donde F es la magnitud de una de las fuerzas y d la distancia perpendicular o brazo de momento entre las fuerzas. La *dirección* y el sentido del momento de par son determinados mediante la regla de la mano derecha, donde el pulgar indica la dirección cuando los dedos son enrollados con el sentido de rotación causado por las dos fuerzas. En todos los casos, \mathbf{M} actúa perpendicularmente al plano que contiene esas fuerzas.

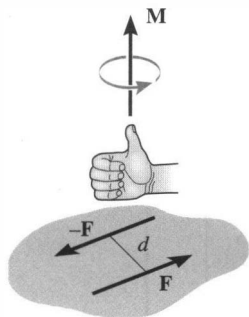


Fig. 4-27

Formulación vectorial. El momento de un par puede expresarse también mediante el vector producto cruz usando la ecuación 4-13, es decir,

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{4-15}$$

La aplicación de esta ecuación se recuerda fácilmente si se piensa en tomar los momentos de ambas fuerzas con respecto a un punto que se encuentre sobre la línea de acción de una de las fuerzas. Por ejemplo, si los momentos se toman con respecto al punto A en la figura 4-26, el momento

de $-\mathbf{F}$ es *cero* con respecto a este punto, y el momento de \mathbf{F} se define a partir de la ecuación 4-15. Por tanto, en la formulación, \mathbf{r} se multiplica vectorialmente (producto cruz) por la fuerza \mathbf{F} a la cual está dirigida.

Pares equivalentes. Se dice que dos pares son equivalentes si producen el mismo momento. Como el momento producido por un par es siempre perpendicular al plano que contiene las fuerzas del par, es necesario que las fuerzas de pares iguales se encuentren en el mismo plano o en planos que sean *paralelos* entre sí. De esta manera, la dirección de cada momento de par será la misma, esto es, perpendicular a los planos paralelos.

Momento del par resultante. Como los momentos de par son vectores libres, pueden aplicarse en cualquier punto P sobre un cuerpo y ser sumados vectorialmente. Por ejemplo, los dos pares que actúan sobre planos diferentes del cuerpo mostrado en la figura 4-28a pueden ser reemplazados por sus correspondientes momentos de par \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 , figura 4-28b, y luego esos vectores libres pueden ser desplazados al *punto arbitrario* P y sumarse para obtener el momento de par resultante $\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$, mostrado en la figura 4-28c.

Si más de dos momentos de par actúan sobre el cuerpo, podemos generalizar este concepto y escribir el vector resultante como

$$\mathbf{M}_R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (4-16)$$

Estos conceptos son ilustrados numéricamente en los ejemplos que siguen. En general, los problemas en dos dimensiones deben resolverse usando un análisis escalar ya que los brazos de momento y las componentes de fuerza son fáciles de calcular.

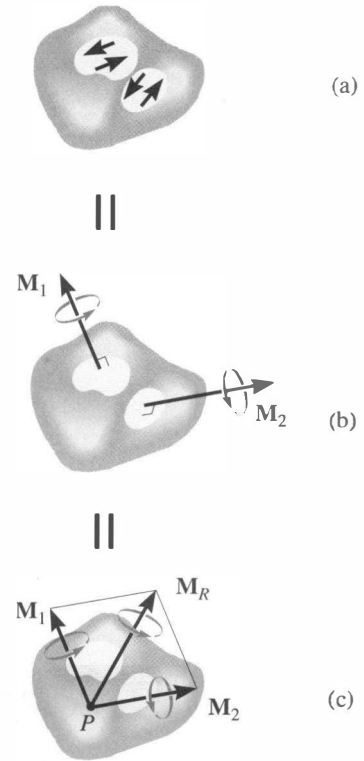
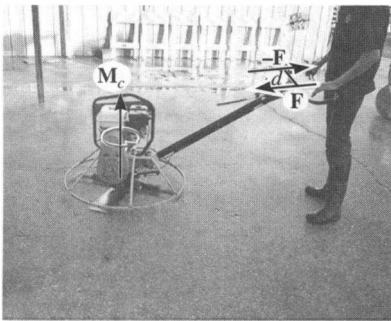
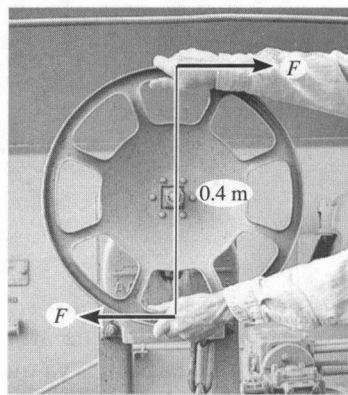


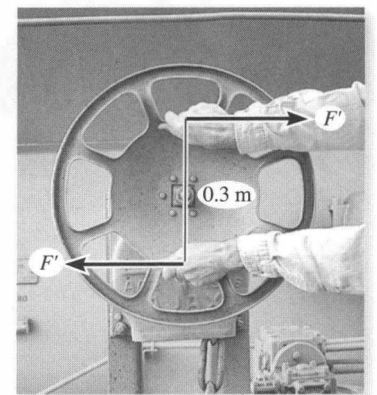
Fig. 4-28



Las fuerzas de fricción del piso que actúan sobre las hojas de la máquina pulidora de concreto generan en ésta un momento de par \mathbf{M}_c que tiende a girarla. Un momento de par igual pero opuesto debe ser aplicado por las manos del operador para impedir la rotación. Aquí, el momento de par, $M_c = Fd$, es aplicado sobre la manija, aunque podría hacerse en cualquier otro punto sobre la máquina.



Para girar la flecha conectada al centro de la rueda es necesario un momento de $12 \text{ N} \cdot \text{m}$. Para ello resulta eficiente aplicar un par ya que este efecto produce una rotación pura. Las fuerzas del par pueden volverse tan pequeñas como sea posible colocando las manos sobre el *borde* de la rueda, donde la separación es de 0.4 m . En este caso, $12 \text{ N} \cdot \text{m} = F(0.4 \text{ m})$, $F = 30 \text{ N}$. Un momento de par equivalente de $12 \text{ N} \cdot \text{m}$ puede ser producido al sujetar la rueda dentro del cubo interno, aunque ahí son necesarias fuerzas mucho más grandes. Si la distancia entre las manos es de 0.3 m , entonces $12 \text{ N} \cdot \text{m} = F'(0.3)$, $F' = 40 \text{ N}$. Vea también que si la rueda estuviese conectada a la flecha en un punto que no fuese su centro, aún giraría al aplicar las fuerzas ya que el momento de par de $12 \text{ N} \cdot \text{m}$ es un *vector libre*.



PUNTOS IMPORTANTES

- Un momento de par es producido por dos fuerzas no colineales que son iguales pero opuestas. Su efecto es producir una rotación pura, o tendencia a girar en una dirección específica.
- Un momento de par es un vector libre, y como resultado, causa el mismo efecto de rotación sobre un cuerpo independientemente de dónde sea aplicado al cuerpo.
- El momento de las dos fuerzas del par puede ser calculado con respecto a *cualquier punto*. Por conveniencia, a menudo ese punto es seleccionado sobre la línea de acción de una de las fuerzas para eliminar el momento de esta fuerza con respecto al punto.
- En tres dimensiones, el momento del par a menudo es determinado usando la formulación vectorial, $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, donde \mathbf{r} está dirigido desde *cualquier punto* sobre la línea de acción de una de las fuerzas hasta *cualquier punto* sobre la línea de acción de la otra fuerza \mathbf{F} .
- Un momento de par resultante es simplemente la suma vectorial de todos los momentos de par del sistema.

EJEMPLO 4.10

Un par actúa sobre los dientes del engrane como se muestra en la figura 4-29a. Reemplácelo por un par equivalente de un par de fuerzas que actúe a través de los puntos A y B .

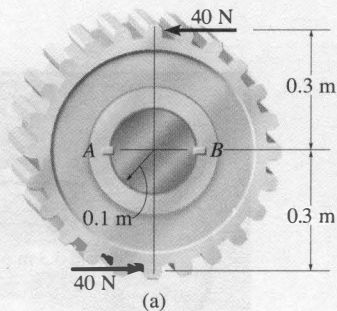
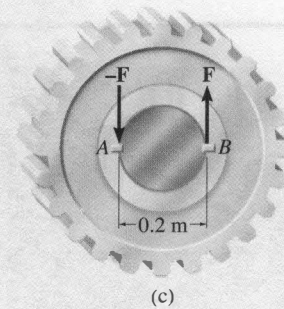
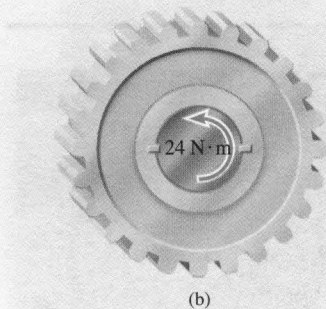


Fig. 4-29



Solución (Análisis escalar)

El par tiene magnitud de $M = Fd = 40(0.6) = 24 \text{ N} \cdot \text{m}$, y dirección hacia fuera de la página ya que las fuerzas tienden a girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj. \mathbf{M} es un vector libre, por lo que puede colocarse en cualquier punto sobre el engrane, figura 4-29b. Para conservar la rotación de \mathbf{M} en sentido contrario al de las manecillas del reloj, fuerzas *verticales* actuando a través de los puntos A y B deben dirigirse como se muestra en la figura 4-29c. La magnitud de cada fuerza es

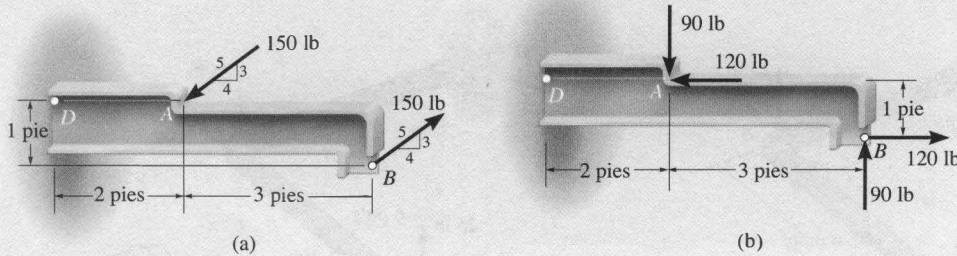
$$M = Fd \quad 24 \text{ N} \cdot \text{m} = F(0.2 \text{ m})$$

$$F = 120 \text{ N}$$

Resp.

EJEMPLO 4.11

Determine el momento del par que actúa sobre el miembro mostrado en la figura 4-30a.

**Solución (Análisis escalar)**

Aquí es algo difícil determinar la distancia perpendicular entre las fuerzas y calcular el momento de par como $M = Fd$. En vez de ello, podemos resolver cada fuerza en sus componentes horizontal y vertical, $F_x = \frac{4}{5}(150 \text{ lb}) = 120 \text{ lb}$ y $F_y = \frac{3}{5}(150 \text{ lb}) = 90 \text{ lb}$, figura 4-30b, y aplicar luego el principio de momentos. El momento de par puede ser determinado con respecto a *cualquier punto*. Por ejemplo, si se elige el punto D , para las cuatro fuerzas tenemos,

$$\begin{aligned} \downarrow +M &= 120 \text{ lb}(0 \text{ pies}) - 90 \text{ lb}(2 \text{ pies}) + 90 \text{ lb}(5 \text{ pies}) + 120 \text{ lb}(1 \text{ pie}) \\ &= 390 \text{ lb} \cdot \text{pie} \quad \uparrow \end{aligned}$$

Resp.

Sin embargo, es más fácil determinar los momentos con respecto a los puntos A o B para *eliminar* el momento de las fuerzas que actúan en el punto de momento. Para el punto A , figura 4-30b, tenemos

$$\begin{aligned} \downarrow +M &= 90 \text{ lb}(3 \text{ pies}) + 120 \text{ lb}(1 \text{ pie}) \\ &= 390 \text{ lb} \cdot \text{pie} \quad \uparrow \end{aligned}$$

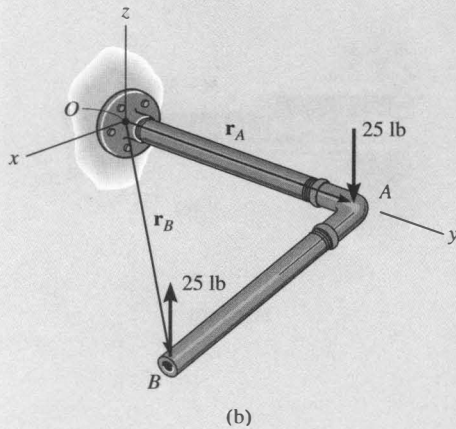
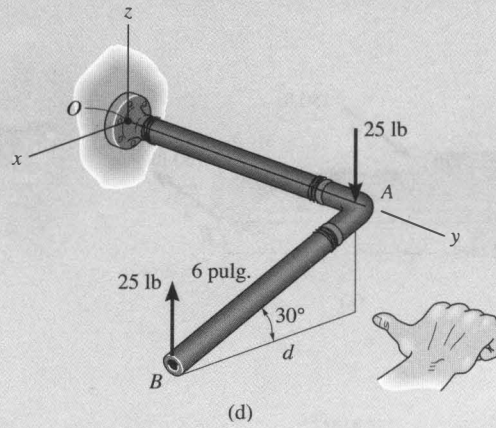
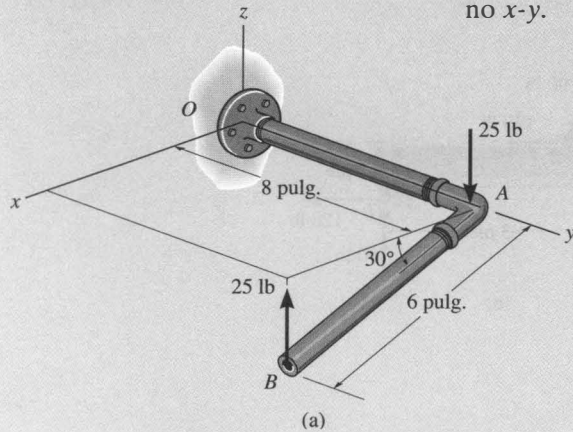
Resp.

Muestre que se obtiene el mismo resultado cuando los momentos se suman con respecto al punto B . Observe también que el par mostrado en la figura 4-30a puede ser reemplazado por *dos* pares en la figura 4-30b. Usando $M = Fd$, un par tiene un momento de $M_1 = 90 \text{ lb}(3 \text{ pies}) = 270 \text{ lb} \cdot \text{pie}$, y el otro tiene un momento de $M_2 = 120 \text{ lb}(1 \text{ pie}) = 120 \text{ lb} \cdot \text{pie}$. Por la regla de la mano derecha, ambos momentos de par tienen un sentido contrario al de las manecillas del reloj y por ello están dirigidos hacia fuera de la página. Como esos pares son vectores libres, pueden ser desplazados a cualquier punto y sumados, lo que da $M = 270 \text{ lb} \cdot \text{pie} + 120 \text{ lb} \cdot \text{pie} = 390 \text{ lb} \cdot \text{pie}$, que es el mismo resultado determinado líneas arriba. \mathbf{M} es un vector libre y puede, por tanto, actuar en cualquier punto sobre el cuerpo, figura 4-30c. Vea también que el efecto externo, como las reacciones en los soportes sobre el miembro, serán las *mismas* si el miembro soporta al par, figura 4-30a, o al momento de par, figura 4-30c.

Fig. 4-30

EJEMPLO 4.12

Determine el momento del par que actúa sobre el tubo mostrado en la figura 4-31a. El segmento AB está dirigido 30° por debajo del plano x - y .

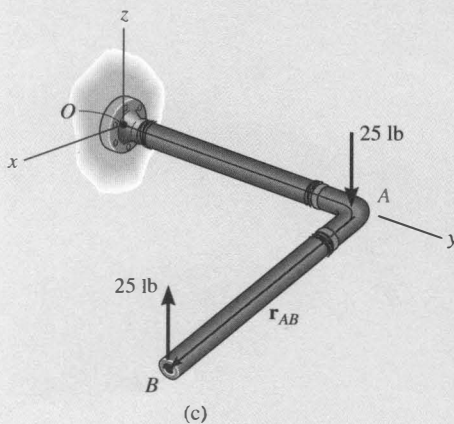

Solución I (Análisis vectorial)

El momento de las dos fuerzas de par puede encontrarse con respecto a *cualquier punto*. Si es considerado el punto O , figura 4-31b, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r}_A \times (-25\mathbf{k}) + \mathbf{r}_B \times (25\mathbf{k}) \\ &= (8\mathbf{j}) \times (-25\mathbf{k}) + (6 \cos 30^\circ \mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 6 \sin 30^\circ \mathbf{k}) \times (25\mathbf{k}) \\ &= -200\mathbf{i} - 129.9\mathbf{j} + 200\mathbf{i} \\ &= \{-130\mathbf{j}\} \text{ lb} \cdot \text{pulg.} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Es *más fácil* tomar momentos de las fuerzas del par con respecto a un punto que esté sobre la línea de acción de una de las fuerzas, por ejemplo, el punto A , figura 4-31c. En este caso, el momento de la fuerza A es cero, por lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r}_{AB} \times (25\mathbf{k}) \\ &= (6 \cos 30^\circ \mathbf{i} - 6 \sin 30^\circ \mathbf{k}) \times (25\mathbf{k}) \\ &= \{-130\mathbf{j}\} \text{ lb} \cdot \text{pulg.} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$


Solución II (Análisis escalar)

Aunque este problema está mostrado en tres dimensiones, la geometría es suficientemente simple como para usar la ecuación escalar $M = Fd$. La distancia perpendicular entre las líneas de acción de las fuerzas es $d = 6 \cos 30^\circ = 5.20$ pulg, figura 4-31d. Por tanto, tomando momentos de las fuerzas con respecto a cualquier punto A o B resulta

$$M = Fd = 25 \text{ lb}(5.20 \text{ pulg.}) = 129.9 \text{ lb} \cdot \text{pulg.}$$

Aplicando la regla de la mano derecha, \mathbf{M} actúa en la dirección $-\mathbf{j}$. Entonces,

$$\mathbf{M} = \{-130\mathbf{j}\} \text{ lb} \cdot \text{pulg.} \quad \text{Resp.}$$

Fig. 4-31

EJEMPLO 4.13

Reemplace los dos pares que actúan sobre la columna tubular en la figura 4-32a por un momento de par resultante.

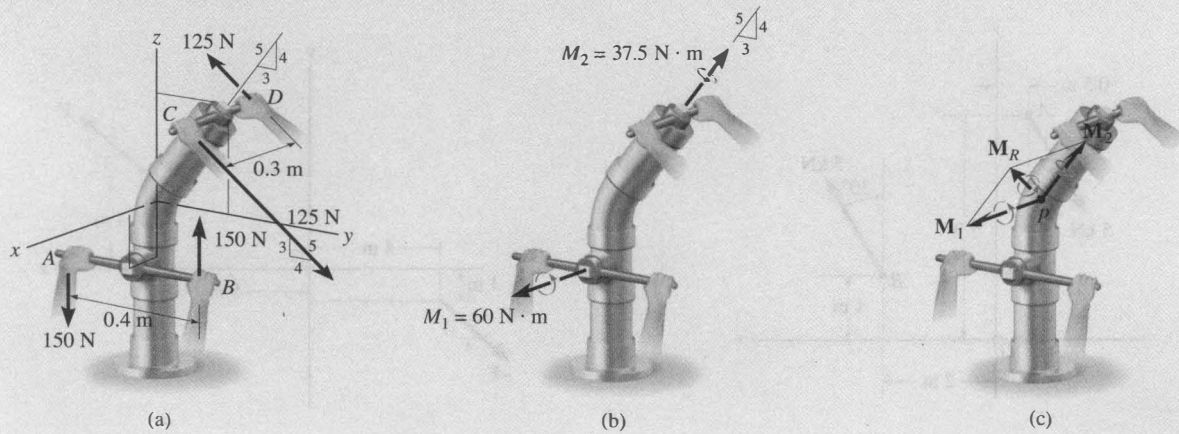


Fig. 4-32

Solución (Análisis vectorial)

El momento de par \mathbf{M}_1 , desarrollado por las fuerzas presentes en A y B , puede ser fácilmente determinado con la formulación escalar.

$$M_1 = Fd = 150 \text{ N}(0.4 \text{ m}) = 60 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Por la regla de la mano derecha, \mathbf{M}_1 actúa en la dirección $+\mathbf{i}$, figura 4-32b. Por tanto,

$$\mathbf{M}_1 = \{60\mathbf{i}\} \text{ N} \cdot \text{m}$$

El análisis vectorial será usado para determinar \mathbf{M}_2 , causado por las fuerzas en C y D . Si los momentos son calculados con respecto al punto D , figura 4-32a, $\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_{DC} \times \mathbf{F}_C$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2 &= \mathbf{r}_{DC} \times \mathbf{F}_C = (0.3\mathbf{i}) \times [125(\frac{4}{5})\mathbf{j} - 125(\frac{3}{5})\mathbf{k}] \\ &= (0.3\mathbf{i}) \times [100\mathbf{j} - 75\mathbf{k}] = 30(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) - 22.5(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\ &= \{22.5\mathbf{j} + 30\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

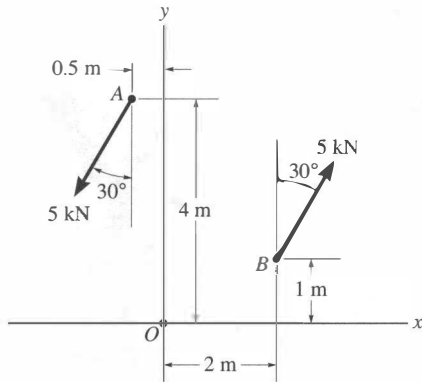
Trate de establecer \mathbf{M}_2 usando una formulación escalar, figura 4-32b.

Como \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 son vectores libres, pueden ser desplazados hacia un punto arbitrario P y sumados vectorialmente, figura 4-32c. El momento de par resultante es

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \{60\mathbf{i} + 22.5\mathbf{j} + 30\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

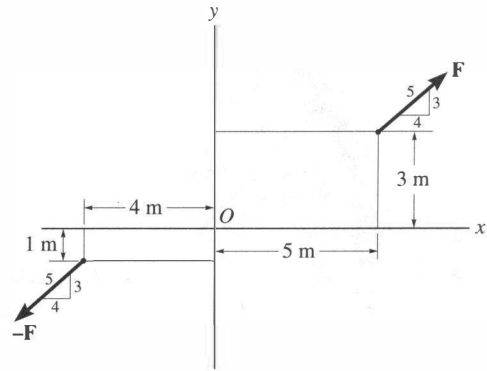
PROBLEMAS

4-69. Determine la magnitud y el sentido del momento del par.



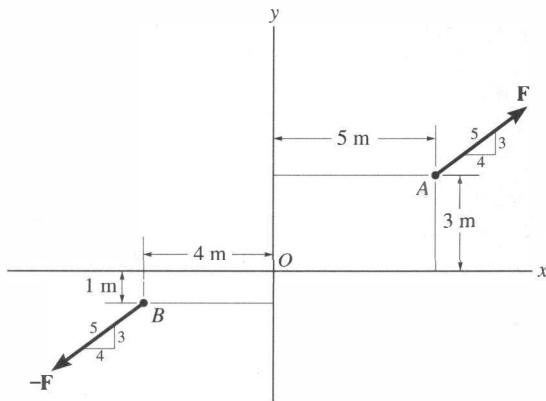
Prob. 4-69

4-71. Determine la magnitud y el sentido del momento del par. Cada fuerza tiene una magnitud de $F = 8$ kN.



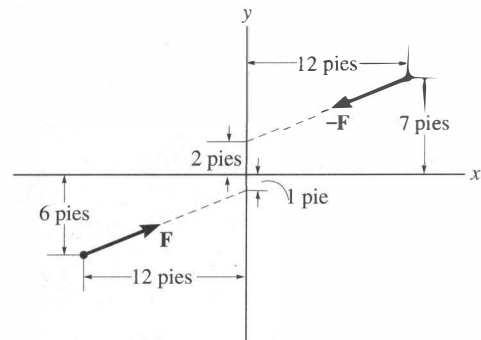
Prob. 4-71

4-70. Si el momento del par tiene una magnitud de 250 N · m, determine la magnitud F de las fuerzas del par.



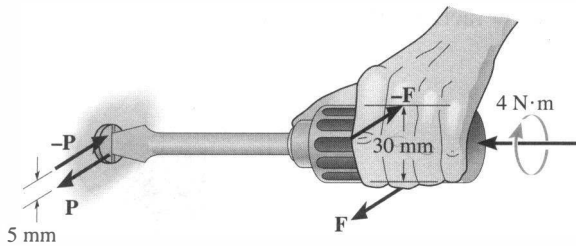
Prob. 4-70

*4-72. Si el momento del par tiene una magnitud de 300 lb · pie, determine la magnitud F de las fuerzas del par.



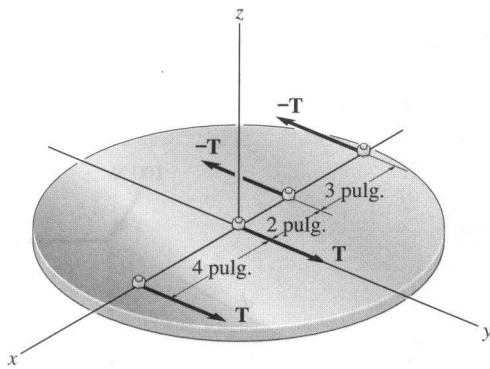
Prob. 4-72

4-73. Un par torsionante de $4 \text{ N} \cdot \text{m}$ es aplicado al mango del destornillador. Resuelva este momento de par en dos fuerzas de par F ejercidas sobre el mango, y P ejercidas sobre la hoja.



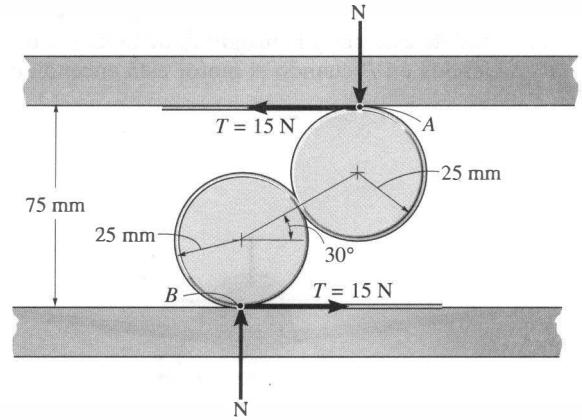
Prob. 4-73

4-74. El momento del par resultante producido por los dos pares que actúan sobre el disco es $M_R = \{10\mathbf{k}\}$ kip · pulg. Determine la magnitud de la fuerza T .



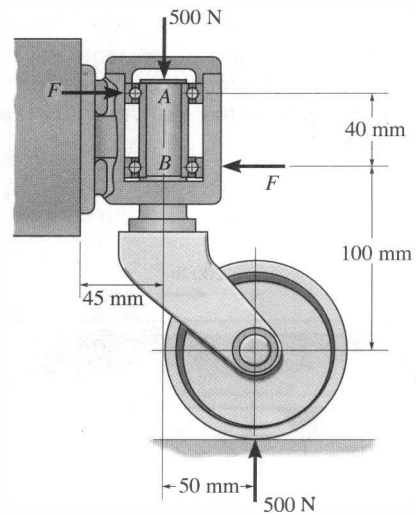
Prob. 4-74

4-75. Un dispositivo llamado rolamita es usado de varias maneras para reemplazar el movimiento deslizante por movimiento rodante. Si la banda, la cual se enrolla entre los rodillos, está sometida a una tensión de 15 N , determine las fuerzas reactivas N de las placas superior e inferior sobre los rodillos de modo que el par resultante que actúa sobre los rodillos sea igual a cero.



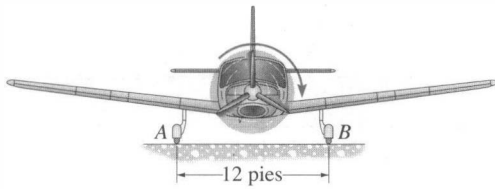
Prob. 4-75

*4-76. La rueda orientable está sometida a los dos pares. Determine las fuerzas F que producen las chumaceras sobre el eje de manera que el momento de par resultante sobre la rueda sea cero.



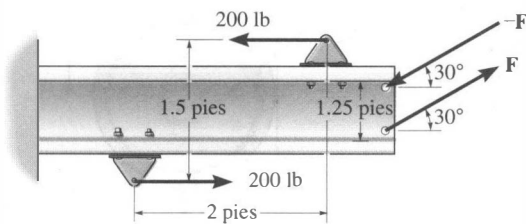
Prob. 4-76

4-77. Cuando el motor del aeroplano está encendido, la reacción vertical que el terreno ejerce sobre la rueda en A es de 650 lb. Sin embargo, cuando el motor está apagado, las reacciones verticales en A y B son cada una de 575 lb. La diferencia en las mediciones en A es causada por un par que actúa sobre la hélice cuando el motor está encendido. Este par tiende a voltear el aeroplano en sentido contrario al de las manecillas del reloj, que es opuesto a la rotación normal de la hélice. Determine la magnitud de este par y la magnitud de la fuerza de reacción ejercida en B cuando el motor está encendido.



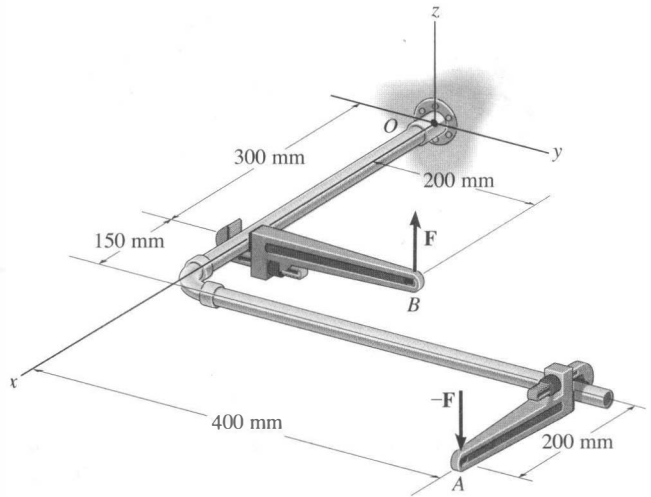
Prob. 4-77

4-78. Dos pares actúan sobre la viga. Determine la magnitud de F de modo que el momento del par resultante sea de $450 \text{ lb} \cdot \text{pie}$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj. ¿En qué punto de la viga actúa el momento del par resultante?



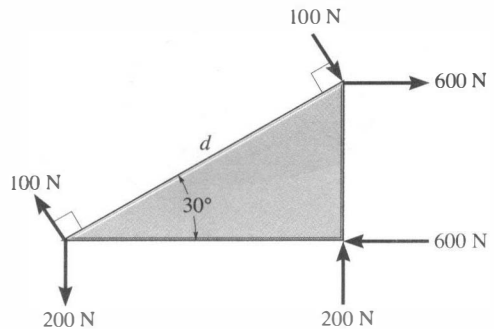
Prob. 4-78

4-79. Expresé el momento del par que actúa sobre la tubería en forma vectorial cartesiana. Resuelva el problema (a) usando la ecuación 4-13, y (b) sumando el momento de cada fuerza con respecto al punto O . Considere $F = \{25k\} \text{ N}$.



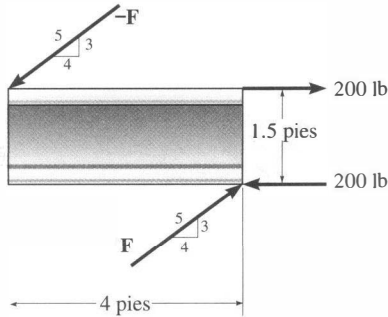
Probs. 4-79/80

4-81. Los extremos de la placa triangular están sometidos a tres pares. Determine la dimensión d de la placa de manera que el par resultante sea de $350 \text{ N} \cdot \text{m}$ en el sentido de las manecillas del reloj.



Prob. 4-81

4-82. Dos pares actúan sobre la viga como se muestra. Determine la magnitud de F de manera que el momento de par resultante sea de $300 \text{ lb} \cdot \text{pie}$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj. ¿Dónde actúa el par resultante sobre la viga?

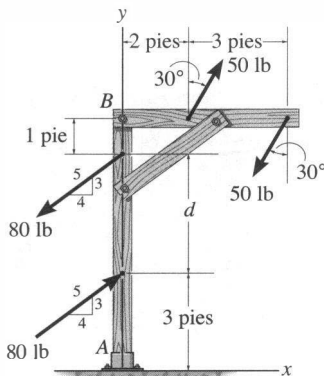


Prob. 4-82

4-83. Dos pares actúan sobre la estructura. Si el momento del par resultante debe ser cero, determine la distancia d entre las fuerzas del par de 80 lb .

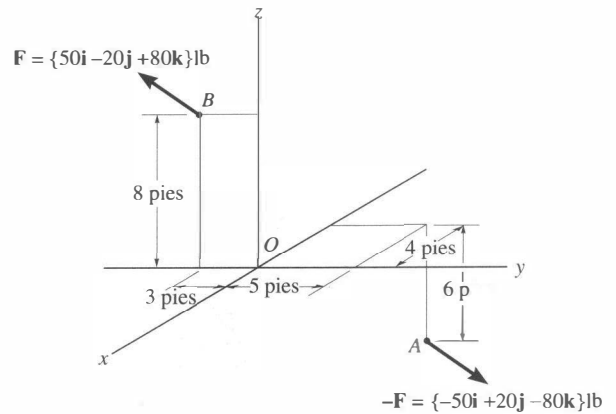
***4-84.** Dos pares actúan sobre la estructura. Si $d = 4$ pies, determine el momento de par resultante. Calcule el resultado resolviendo cada fuerza en componentes x y y y (a) encontrando el momento de cada par (Ecuación 4-13), y (b) sumando los momentos de todas las componentes de fuerza con respecto al punto A .

4-85. Dos pares actúan sobre la estructura. Si $d = 4$ pies, determine el momento de par resultante. Calcule el resultado resolviendo cada fuerza en componentes x y y y (a) encontrando el momento de cada par (Ecuación 4-13), y (b) sumando los momentos de todas las componentes de fuerza con respecto al punto B .



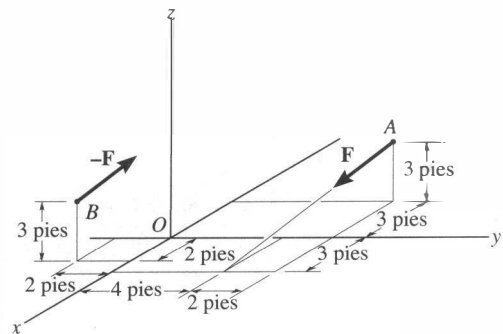
Probs. 4-83/84/85

4-86. Determine el momento del par. Exprese el resultado como un vector cartesiano.



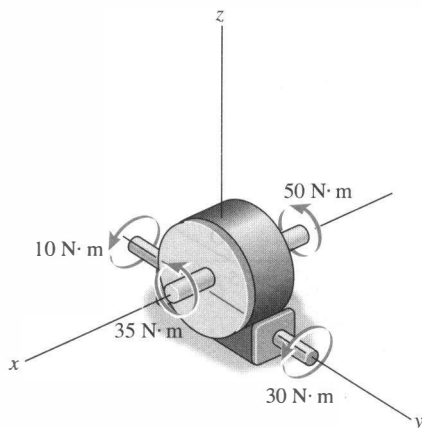
Prob. 4-86

4-87. Determine el momento del par. Exprese el resultado como un vector cartesiano. Cada fuerza tiene una magnitud de $F = 120 \text{ lb}$.



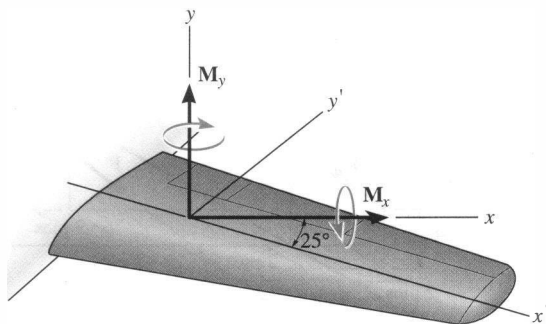
Prob. 4-87

*4-88. El reductor de engranes está sometido a los cuatro momentos de par. Determine la magnitud del momento de par resultante y sus ángulos coordenados de dirección.



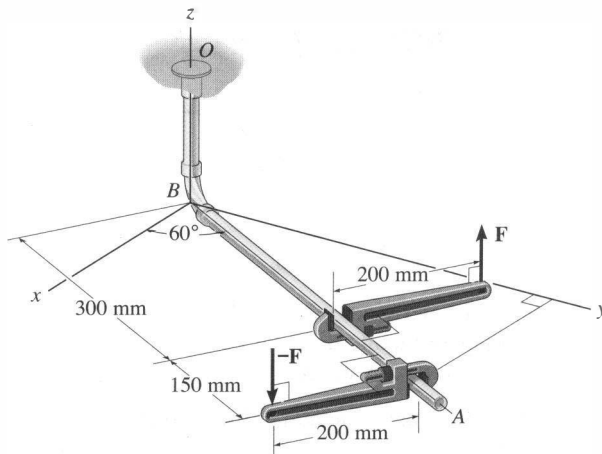
Prob. 4-88

4-89. La viga principal a lo largo del ala de un aeroplano está desplazada a un ángulo de 25° . A partir de los cálculos de carga se ha determinado que la viga está sometida a momentos de par $M_x = 17 \text{ kip} \cdot \text{pie}$ y $M_y = 25 \text{ kip} \cdot \text{pie}$. Determine los momentos de par resultantes producidos con respecto a los ejes x' y y' . Los ejes se encuentran todos en el mismo plano horizontal.



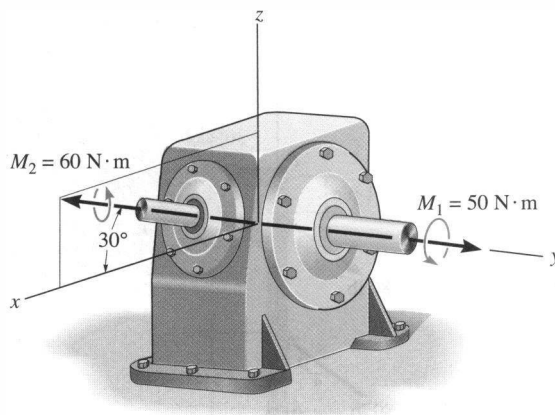
Prob. 4-89

4-90. Si $\mathbf{F} = \{100\mathbf{k}\}$ N, determine el momento de par que actúa sobre la tubería. Expresé el resultado como un vector cartesiano. El miembro BA está en el plano x - y .



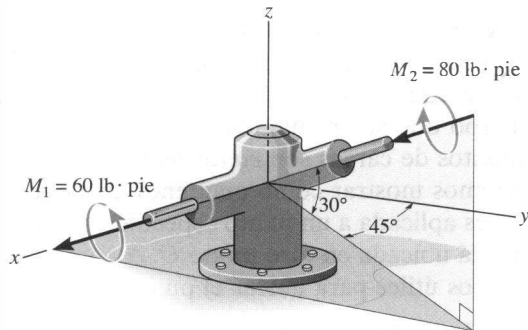
Probs. 4-90/91

*4-92. El reductor de engranes está sometido a los momentos de par mostrados. Determine el momento de par resultante y especifique su magnitud y los ángulos coordenados de dirección.



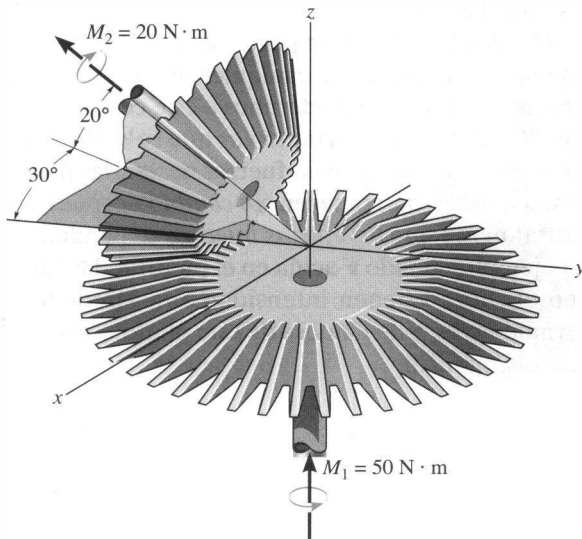
Prob. 4-92

4-93. El reductor de engranes está sometido a los momentos de par mostrados. Determine el momento de par resultante y especifique su magnitud y los ángulos coordenados de dirección.



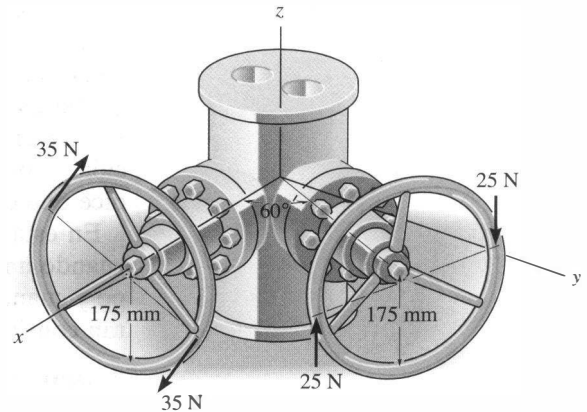
Prob. 4-93

4-94. Los engranes acoplados están sometidos a los momentos de par mostrados. Determine la magnitud del momento de par resultante y especifique sus ángulos coordenados de dirección.



Prob. 4-94

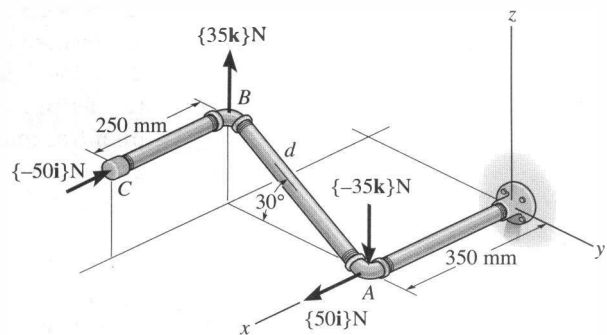
4-95. Un par actúa sobre cada uno de los manubrios de la válvula minidual. Determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección del momento de par resultante.



Prob. 4-95

*4-96. Determine el momento de par resultante de los dos pares que actúan sobre la tubería. La distancia de A a B es $d = 400$ mm. Expresé el resultado como un vector cartesiano.

4-97. Determine la distancia d entre A y B de modo que el momento de par resultante tenga una magnitud $M_R = 20$ N · m.



Probs. 4-96/97

4.7 Sistema equivalente

Una fuerza tiene el efecto de trasladar y girar un cuerpo, y la medida en que lo hace depende de dónde y cómo es aplicada la fuerza. En la próxima sección analizaremos el método usado para *simplificar* un sistema de fuerzas y momentos de par que actúan sobre un cuerpo a una sola fuerza resultante y un momento de par actuando en un punto específico O . Sin embargo, para hacer esto es necesario que el sistema de fuerza y el momento de par produzcan los *mismos* efectos “externos” de traslación y rotación del cuerpo que sus resultantes. Cuando esto ocurre, se dice que esos dos conjuntos de cargas son *equivalentes*.

En esta sección queremos mostrar cómo mantener esta equivalencia cuando una sola fuerza es aplicada a un punto específico sobre un cuerpo y cuando la fuerza está ubicada en otro punto O . A continuación serán considerados dos casos útiles para ubicar el punto O .

El punto O está sobre la línea de acción de la fuerza. Considere el cuerpo mostrado en la figura 4-33a, el cual está sometido a la fuerza \mathbf{F} aplicada en el punto A . Para aplicar la fuerza en el punto O sin alterar los efectos externos sobre el cuerpo, aplicaremos primero fuerzas iguales pero opuestas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ en O , como se muestra en la figura 4-33b. Las dos fuerzas indicadas mediante la raya que las atraviesa pueden ser canceladas, dejando la fuerza en el punto O como se requiere, figura 4-33c. Usando este procedimiento de construcción, se ha mantenido un *sistema equivalente* entre cada uno de los diagramas, como se muestra con los signos de igual. Sin embargo, observe que la fuerza ha sido simplemente “transmitida” a lo largo de su línea de acción, del punto A , figura 4-33a, al punto O , figura 4-33c. En otras palabras, la fuerza puede ser considerada como un *vector deslizante* ya que puede actuar en cualquier punto O a lo largo de su línea de acción. En la sección 4.3 nos referimos a este concepto como el *principio de transmisibilidad*. Es importante ver que sólo los *efectos externos*, como el movimiento del cuerpo o las fuerzas necesarias para soportar el cuerpo si es estacionario, permanecen *sin cambio* después que \mathbf{F} se ha desplazado. Naturalmente que los *efectos internos* dependen de dónde se localice \mathbf{F} . Por ejemplo, cuando \mathbf{F} actúa en el punto A , las fuerzas internas presentes en el cuerpo tienen intensidad alta alrededor de A ; mientras que el movimiento de \mathbf{F} alejándose de este punto ocasionará que esas fuerzas internas disminuyan.

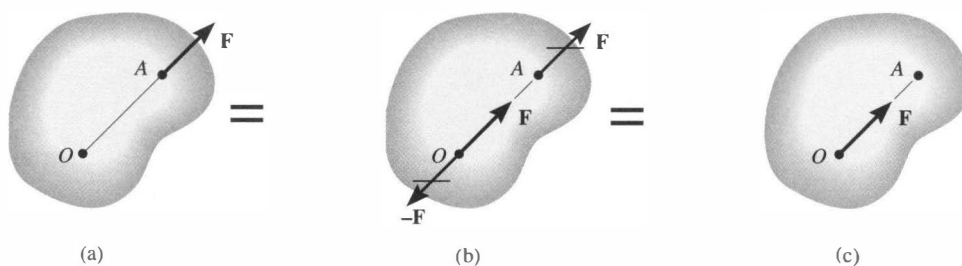


Fig. 4-33

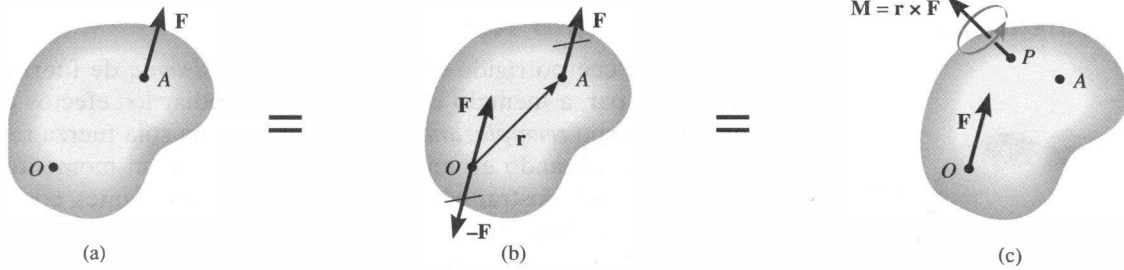
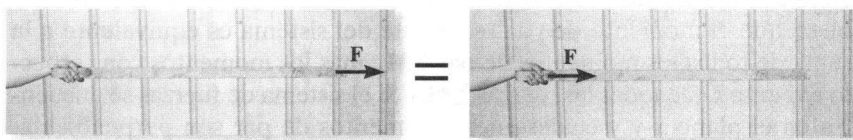


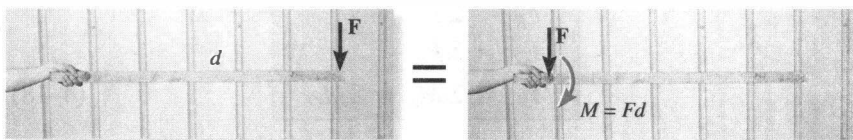
Fig. 4-34

El punto O no está sobre la línea de acción de la fuerza. Este caso se muestra en la figura 4-34a, donde \mathbf{F} va a desplazarse hacia el punto O sin alterar los efectos externos sobre el cuerpo. Siguiendo el mismo procedimiento que antes, primero aplicamos fuerzas iguales pero opuestas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ en el punto O , figura 4-34b. Aquí las dos fuerzas señaladas mediante una raya transversal forman un par que tiene un momento perpendicular a \mathbf{F} y es definido por el producto cruz $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Como el momento de par es un *vector libre*, puede ser aplicado en *cualquier punto* P sobre el cuerpo como se muestra en la figura 4-34c. En adición a este momento de par, \mathbf{F} actúa ahora en el punto O como se requiere.

Para resumir esos conceptos, cuando el punto sobre el cuerpo esté *sobre la línea de acción de la fuerza*, simplemente transmita o deslice la fuerza a lo largo de su línea de acción al punto. Cuando el punto no esté sobre la línea de acción de la fuerza, traslade la fuerza al punto y sume un momento de par en cualquier lugar al cuerpo. Este momento de par se encuentra tomando el momento de la fuerza con respecto al punto. Cuando se observen estas reglas, se producirán efectos externos equivalentes.



Considere los efectos sobre la mano cuando una barra de peso insignificante soporta una fuerza \mathbf{F} en su extremo. Cuando la fuerza se aplica horizontalmente, es percibida en el mango, independientemente de dónde esté aplicada a lo largo de su línea de acción. Esto es una consecuencia del principio de transmisibilidad.



Cuando la fuerza se aplica verticalmente, ocasiona que se perciba una fuerza \mathbf{F} hacia abajo en el mango y un momento de par en el sentido de las manecillas del reloj de $M = Fd$. Esos mismos efectos son percibidos si \mathbf{F} se aplica en el mango y \mathbf{M} en cualquier lugar sobre la barra. En ambos casos los sistemas son equivalentes.

4.8 Resultantes de un sistema de una fuerza y un par

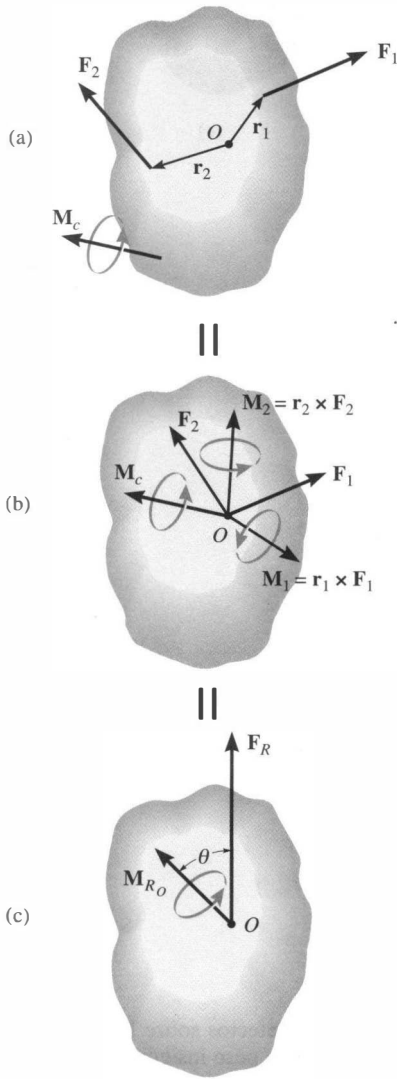


Fig. 4-35

Cuando un cuerpo rígido está sometido a un *sistema* de fuerzas y momentos de par, a menudo es más sencillo estudiar los efectos externos sobre el cuerpo *reemplazando* el sistema por una sola fuerza resultante equivalente actuando en un punto específico O y un momento de par resultante. Para mostrar cómo determinar esas resultantes, consideraremos el cuerpo rígido que aparece en la figura 4-35a y usaremos los conceptos analizados en la sección previa. Como el punto O no está sobre la línea de acción de las fuerzas, un efecto equivalente es producido si las fuerzas son desplazadas hacia el punto O y los correspondientes momentos de par $\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$ y $\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ son aplicados al cuerpo. Además, el momento de par \mathbf{M}_c simplemente es desplazado al punto O ya que es un vector libre. Estos resultados se muestran en la figura 4-35b. Por suma vectorial, la fuerza resultante es $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, y el momento de par resultante es $\mathbf{M}_{R_O} = \mathbf{M}_c + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$, figura 4-35c. Como se mantiene la equivalencia entre los diagramas en la figura 4-35, cada sistema de fuerza y par ocasionará los *mismos efectos externos*, es decir, las mismas traslación y rotación del cuerpo. Observe que tanto la magnitud como la dirección de \mathbf{F}_R son independientes de la ubicación del punto O ; sin embargo, \mathbf{M}_{R_O} depende de esta ubicación ya que los momentos \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 son determinados usando los vectores de posición \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 . Observe también que \mathbf{M}_{R_O} es un vector libre y puede actuar en *cualquier punto* sobre el cuerpo, aunque el punto O generalmente es seleccionado como su punto de aplicación.

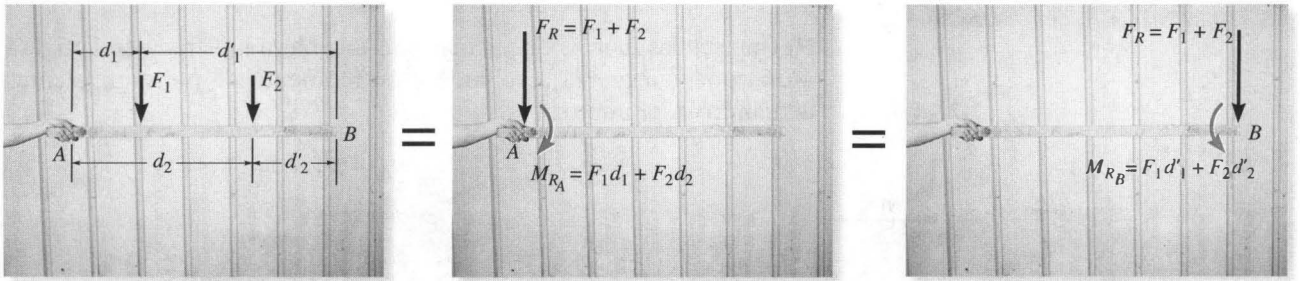
El método anterior, de simplificar cualquier sistema de fuerza y momento de par a una fuerza resultante que actúe en el punto O y un momento de par resultante, puede ser generalizado y representado mediante la aplicación de las dos ecuaciones siguientes.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_R &= \Sigma \mathbf{F} \\ \mathbf{M}_{R_O} &= \Sigma \mathbf{M}_c + \Sigma \mathbf{M}_O \end{aligned} \tag{4-17}$$

La primera ecuación establece que la fuerza resultante del sistema es equivalente a la suma de todas las fuerzas; y la segunda ecuación establece que el momento de par resultante del sistema es equivalente a la suma de todos los momentos de par $\Sigma \mathbf{M}_c$, más los momentos con respecto al punto O de todas las fuerzas $\Sigma \mathbf{M}_O$. Si el sistema de fuerzas se encuentra en el plano x - y y cualesquiera momentos de par son perpendiculares a este plano, que está a lo largo del eje z , entonces las ecuaciones anteriores se reducen a las siguientes tres ecuaciones escalares.

$$\begin{aligned} F_{R_x} &= \Sigma F_x \\ F_{R_y} &= \Sigma F_y \\ M_{R_O} &= \Sigma M_c + \Sigma M_O \end{aligned} \tag{4-18}$$

Observe que la fuerza resultante \mathbf{F}_R es equivalente a la suma vectorial de sus dos componentes \mathbf{F}_{R_x} y \mathbf{F}_{R_y} .



Si las dos fuerzas que actúan sobre la barra son reemplazadas por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes en el punto A , o por la fuerza resultante y un momento de par equivalentes en el punto B , entonces, en cada caso la mano debe proporcionar la misma resistencia a la traslación y la rotación para mantener la barra en la posición horizontal. En otras palabras, los efectos externos sobre la barra son los *mismos* en cada caso.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Los siguientes puntos deberán tenerse presentes al aplicar las ecuaciones 4-17 o 4-18.

- Establezca los ejes coordenados con el origen localizado en el punto O y los ejes teniendo una orientación seleccionada.

Suma de fuerzas.

- Si el sistema de fuerzas es *coplanar*, resuelva cada fuerza en sus componentes x y y . Si una componente está dirigida a lo largo de los ejes x o y positivos, representa un escalar positivo, mientras que si está dirigida a lo largo de los ejes x o y negativos, es un escalar negativo.
- En tres dimensiones, represente cada fuerza como un vector cartesiano antes de sumar las fuerzas.

Suma de momentos.

- Al determinar los momentos de un sistema de fuerzas *coplanar* con respecto al punto O , por lo general es conveniente aplicar el principio de momentos, es decir, determinar los momentos de las componentes de cada fuerza en vez del momento de la fuerza misma.
- En tres dimensiones, use el producto cruz para determinar el momento de cada fuerza con respecto al punto. Aquí los vectores de posición se extienden desde el punto O hasta cualquier punto sobre la línea de acción de cada fuerza.

EJEMPLO 4.14

Reemplace las fuerzas que actúan sobre la pieza mostrada en la figura 4-36a por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes actuando en el punto A.

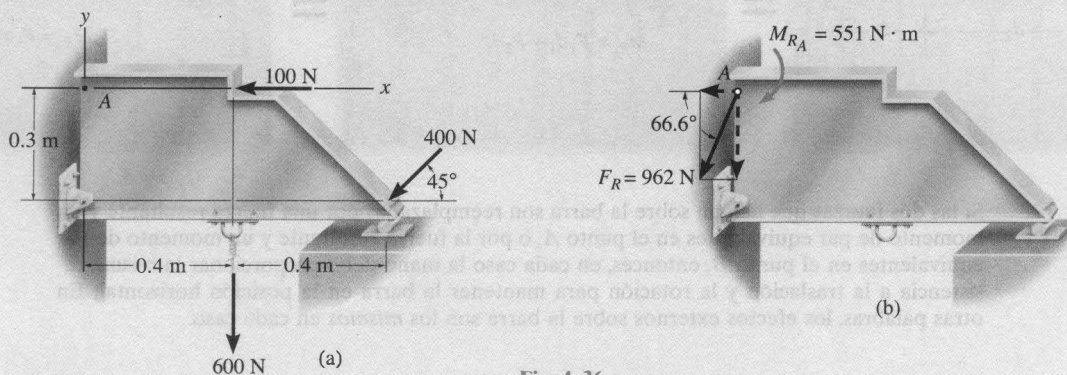


Fig. 4-36

Solución (Análisis escalar)

El principio de momentos se aplicará a la fuerza de 400 N, para lo cual serán considerados los momentos de sus dos componentes rectangulares.

Suma de fuerzas. La fuerza resultante tiene componentes x y y de

$$\begin{aligned} \pm \rightarrow F_{R_x} &= \Sigma F_x; & F_{R_x} &= -100 \text{ N} - 400 \cos 45^\circ \text{ N} = -382.8 \text{ N} = 382.8 \text{ N} \leftarrow \\ + \uparrow F_{R_y} &= \Sigma F_y; & F_{R_y} &= -600 \text{ N} - 400 \sin 45^\circ \text{ N} = -882.8 \text{ N} = 882.8 \text{ N} \downarrow \end{aligned}$$

Como se muestra en la figura 4-36b, F_R tiene una magnitud de

$$F_R = \sqrt{(F_{R_x})^2 + (F_{R_y})^2} = \sqrt{(382.8)^2 + (882.8)^2} = 962 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

y una dirección de

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_{R_y}}{F_{R_x}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{882.8}{382.8}\right) = 66.6^\circ \quad \theta \nearrow \quad \text{Resp.}$$

Suma de momentos. El momento del par resultante M_{R_A} se determina sumando los momentos de las fuerzas con respecto al punto A. Suponiendo que los momentos positivos actúan en sentido contrario al de las manecillas del reloj, esto es, en la dirección $+\mathbf{k}$, tenemos

$$\begin{aligned} \downarrow + M_{R_A} &= \Sigma M_A; \\ M_{R_A} &= 100 \text{ N}(0) - 600 \text{ N}(0.4 \text{ m}) - (400 \sin 45^\circ \text{ N})(0.8 \text{ m}) \\ &\quad - (400 \cos 45^\circ \text{ N})(0.3 \text{ m}) \\ &= -551 \text{ N} \cdot \text{m} = 551 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

En conclusión, cuando M_{R_A} y F_R actúen sobre la pieza localizada en el punto A, figura 4-36b, producirán el mismo efecto externo o reacciones en los soportes que las producidas por el sistema de fuerzas en la figura 4-36a.

EJEMPLO 4.15

Un miembro estructural está sometido al momento de un par \mathbf{M} y a las fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 como se muestra en la figura 4-37a. Reemplace este sistema por una fuerza resultante equivalente y el momento de un par actuando en su base, en el punto O .

Solución (Análisis vectorial)

Los aspectos tridimensionales del problema pueden simplificarse usando un análisis vectorial cartesiano. Al expresar las fuerzas y el momento de par como vectores cartesianos tenemos

$$\mathbf{F}_1 = \{-800\mathbf{k}\} \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= (300 \text{ N})\mathbf{u}_{CB} = (300 \text{ N})\left(\frac{\mathbf{r}_{CB}}{r_{CB}}\right) \\ &= 300 \left[\frac{-0.15\mathbf{i} + 0.1\mathbf{j}}{\sqrt{(-0.15)^2 + (0.1)^2}} \right] = \{-249.6\mathbf{i} + 166.4\mathbf{j}\} \text{ N} \end{aligned}$$

$$\mathbf{M} = -500\left(\frac{4}{5}\right)\mathbf{j} + 500\left(\frac{3}{5}\right)\mathbf{k} = \{-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Suma de fuerzas.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_R &= \Sigma \mathbf{F}; & \mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -800\mathbf{k} - 249.6\mathbf{i} + 166.4\mathbf{j} \\ & & &= \{-249.6\mathbf{i} + 166.4\mathbf{j} - 800\mathbf{k}\} \text{ N} \end{aligned}$$

Resp.

Suma de momentos.

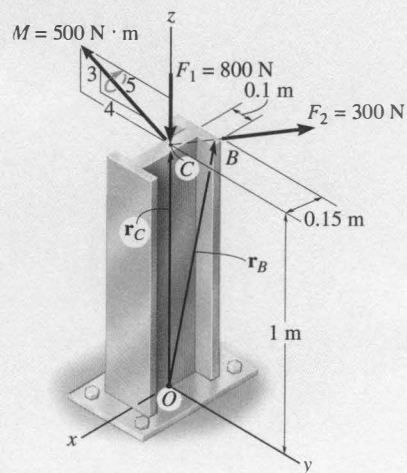
$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma \mathbf{M}_C + \Sigma \mathbf{M}_O$$

$$\mathbf{M}_{R_O} = \mathbf{M} + \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_2$$

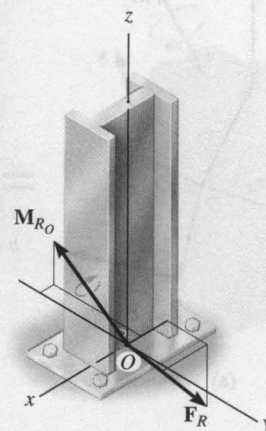
$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{R_O} &= (-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}) + (1\mathbf{k}) \times (-800\mathbf{k}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0.15 & 0.1 & 1 \\ -249.6 & 166.4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}) + (\mathbf{0}) + (-166.4\mathbf{i} - 249.6\mathbf{j}) \\ &= \{-166\mathbf{i} - 650\mathbf{j} + 300\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Resp.

Los resultados se muestran en la figura 4-37b.



(a)



(b)

Fig. 4-37

4.9 Reducción adicional de un sistema de una fuerza y un par

Simplificación a una sola fuerza resultante. Considere ahora un caso especial en el cual el sistema de fuerzas y momentos de par que actúan sobre un cuerpo rígido, figura 4-38a, se reduce en el punto O a una fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F}$ y a un momento de par resultante $\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma \mathbf{M}_O$, los cuales son perpendiculares entre sí, figura 4-38b. Cuando esto ocurre, podemos simplificar adicionalmente el sistema de fuerza y momento de par desplazando \mathbf{F}_R a otro punto P , localizado sobre o fuera del cuerpo de manera que ningún momento de par resultante tenga que ser aplicado al cuerpo, figura 4-38c. En otras palabras, si el sistema de fuerza y momento de par en la figura 4-38a se reduce a un sistema resultante en el punto O , sólo la fuerza resultante tendrá que ser aplicada al cuerpo, figura 4-38c.

La localización del punto P , medida desde el punto O , siempre puede ser determinada si se conocen \mathbf{F}_R y \mathbf{M}_{R_O} , figura 4-38b. Como se muestra en la figura 4-38c, P debe encontrarse sobre el eje bb , que es perpendicular a la línea de acción de \mathbf{F}_R y al eje aa . Este punto se elige de manera que la distancia d satisfaga la ecuación escalar $M_{R_O} = F_R d$ o $d = M_{R_O} / F_R$. Con \mathbf{F}_R así localizada, producirá los mismos efectos externos sobre el cuerpo que el sistema de fuerza y momento de par mostrados en la figura 4-38a, o que la fuerza y momento de par resultantes en la figura 4-38b.

Si un sistema de fuerzas es concurrente, coplanar, o paralelo, siempre puede ser reducido, como en el caso anterior, a una sola fuerza resultante \mathbf{F}_R actuando a través de él. Esto es porque en cada uno de esos casos \mathbf{F}_R y \mathbf{M}_{R_O} serán siempre perpendiculares entre sí cuando el sistema de fuerzas es simplificado en *cualquier* punto O .

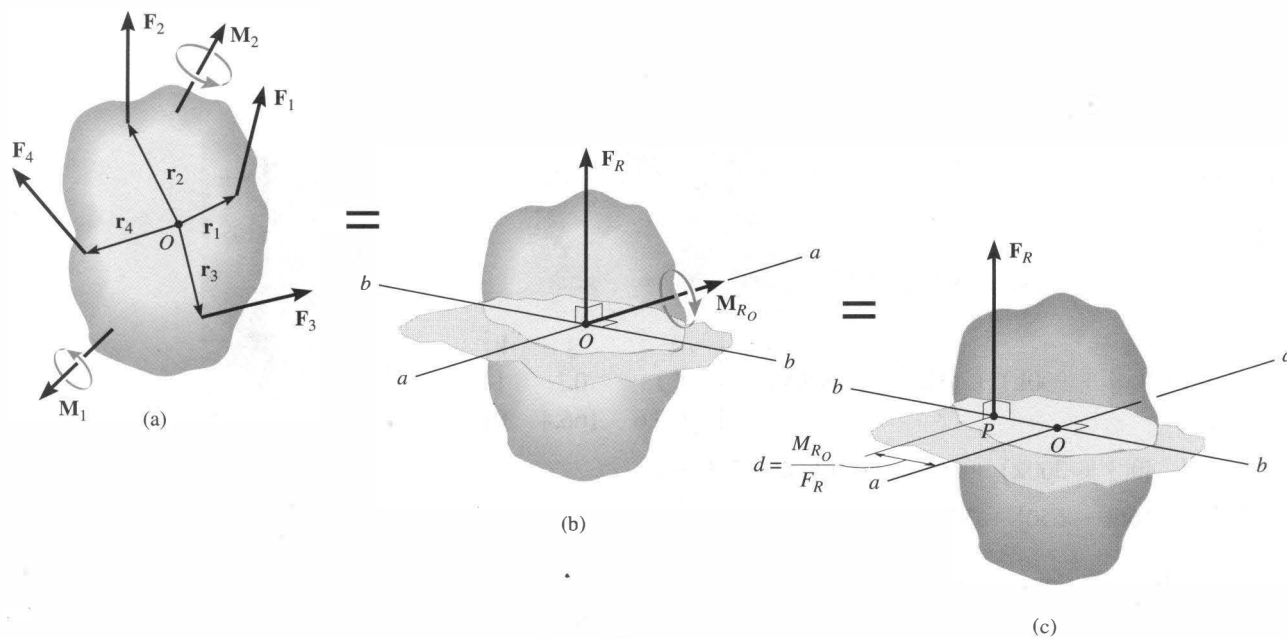


Fig. 4-38

Sistemas de fuerzas concurrentes. Un sistema de fuerzas concurrentes ha sido tratado con todo detalle en el capítulo 2. Naturalmente, todas las fuerzas actúan en un punto para el cual no hay momento de par resultante, por lo que automáticamente el punto P es especificado, figura 4-39.

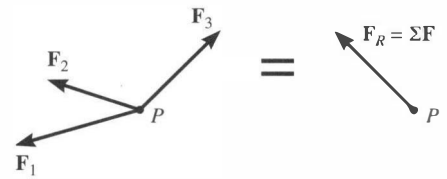


Fig. 4-39

Sistemas de fuerzas coplanares. Los sistemas de fuerzas coplanares, que pueden incluir momentos de par dirigidos perpendicularmente al plano de las fuerzas como se muestra en la figura 4-40a, pueden ser reducidos a una sola fuerza resultante, porque cuando cada fuerza en el sistema se desplaza hacia cualquier punto O en el plano x - y , produce un momento de par que es perpendicular al plano, es decir, en la dirección $\pm k$. El momento resultante $\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma \mathbf{M} + \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ es entonces perpendicular a la fuerza resultante \mathbf{F}_R , figura 4-40b; así, \mathbf{F}_R puede ser colocada a una distancia d de O para generar este mismo momento \mathbf{M}_{R_O} con respecto a O , figura 4-40c.

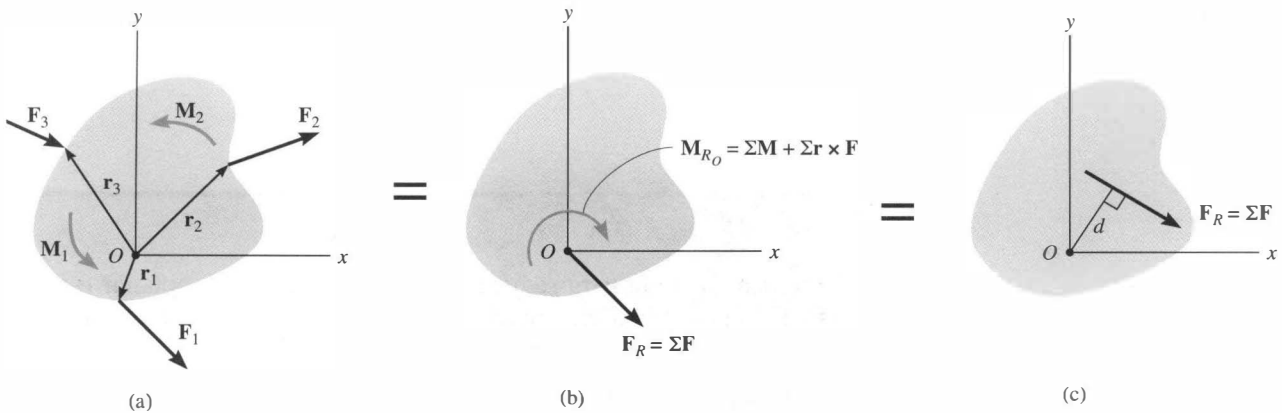


Fig. 4-40

Sistemas de fuerzas paralelas. Los sistemas de fuerzas paralelas, que pueden incluir momentos de par que son perpendiculares a las fuerzas, como se muestra en la figura 4-41a, pueden reducirse a una sola fuerza resultante porque cuando cada fuerza se desplaza hacia cualquier punto O en el plano x - y , produce un momento de par que tiene componentes sólo con respecto a los ejes x y y . El momento resultante $\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma \mathbf{M}_O + \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ es entonces perpendicular a la fuerza resultante \mathbf{F}_R , figura 4-41b; así, \mathbf{F}_R puede desplazarse a un punto a una distancia d de manera que produzca el mismo momento con respecto a O .

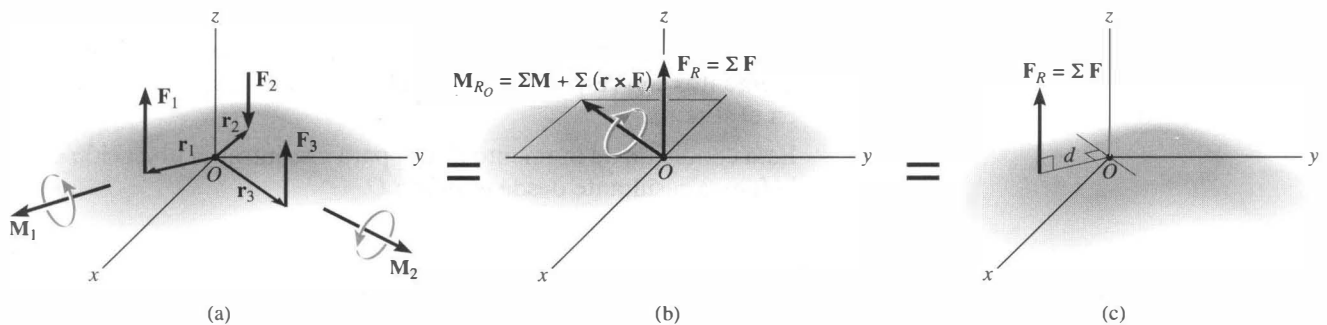
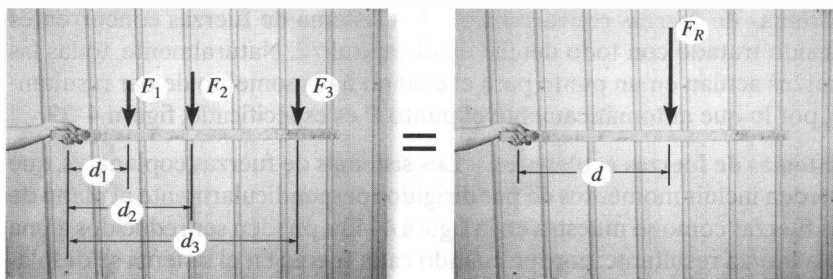


Fig. 4-41



Las tres fuerzas paralelas que actúan sobre la barra pueden ser reemplazadas por una sola fuerza resultante F_R actuando a una distancia d del mango. Para que sean equivalentes, requerimos que la fuerza resultante sea igual a la suma de las fuerzas, $F_R = F_1 + F_2 + F_3$, y para encontrar la distancia d , el momento de la fuerza resultante con respecto al mango debe ser igual al momento de todas las fuerzas con respecto al mango, $F_R d = F_1 d_1 + F_2 d_2 + F_3 d_3$.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

La técnica usada para reducir un sistema de fuerzas coplanar o paralelo a una sola fuerza resultante sigue un procedimiento similar al delineado en la sección previa.

- Establezca los ejes x , y , z y localice la fuerza resultante F_R alejada una distancia arbitraria del origen de coordenadas.

Suma de fuerzas.

- La fuerza resultante es igual a la suma de todas las fuerzas en el sistema.
- Para un sistema coplanar de fuerzas, resuelva cada fuerza en sus componentes x y y . Las componentes positivas están dirigidas a lo largo de los ejes x y y positivos, y las componentes negativas están dirigidas a lo largo de los ejes x y y negativos.

Suma de momentos.

- El momento de la fuerza resultante con respecto al punto O es igual a la suma de todos los momentos de par en el sistema, más los momentos con respecto al punto O de todas las fuerzas presentes en el sistema.
- Esta condición de momento se usa para encontrar la ubicación de la fuerza resultante desde el punto O .

Reducción a una llave. En el caso general, el sistema de fuerzas y momento de par que actúa sobre un cuerpo, figura 4-35a, se reducirá a una sola fuerza resultante \mathbf{F}_R y a un momento de par \mathbf{M}_{R_O} en O que *no* son perpendiculares, sino que \mathbf{F}_R actuará a un ángulo θ a partir de \mathbf{M}_{R_O} , figura 4-35c. Sin embargo, como se muestra en la figura 4-42a, \mathbf{M}_{R_O} puede resolverse en dos componentes: una perpendicular, \mathbf{M}_\perp , y la otra paralela \mathbf{M}_\parallel , a la línea de acción de \mathbf{F}_R . Como en la argumentación previa, la componente perpendicular \mathbf{M}_\perp puede ser *eliminada* desplazando \mathbf{F}_R al punto P , como se muestra en la figura 4-42b. Este punto se encuentra sobre el eje bb , que es perpendicular a \mathbf{M}_{R_O} y a \mathbf{F}_R . Para mantener una equivalencia de carga, la distancia de O a P es $d = M_\perp/F_R$. Además, cuando \mathbf{F}_R es aplicada en P , el momento de \mathbf{F}_R que tiende a girar al cuerpo *con respecto a* O es en la *misma dirección* que \mathbf{M}_\perp , figura 4-42a. Finalmente, como \mathbf{M}_\parallel es un vector libre, puede ser desplazado hacia P de manera que sea colineal con \mathbf{F}_R , figura 4-42c. A esta combinación de una fuerza colineal y un momento de par se le denomina *llave*. El *eje de la llave* tiene la misma línea de acción que la fuerza. Por tanto, la llave tiende a ocasionar una traslación y una rotación, ambas con respecto a este eje. Comparando la figura 4-42a con la figura 4-42c, se ve que un sistema general de fuerza y momento de par actuando sobre un cuerpo puede ser reducido a una llave. El eje de la llave y el punto por el cual pasa este eje siempre pueden ser determinados.

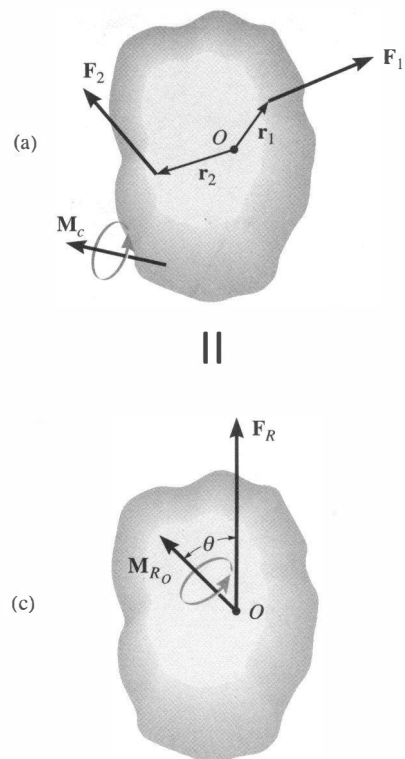


Fig. 4-35, (Repetido)

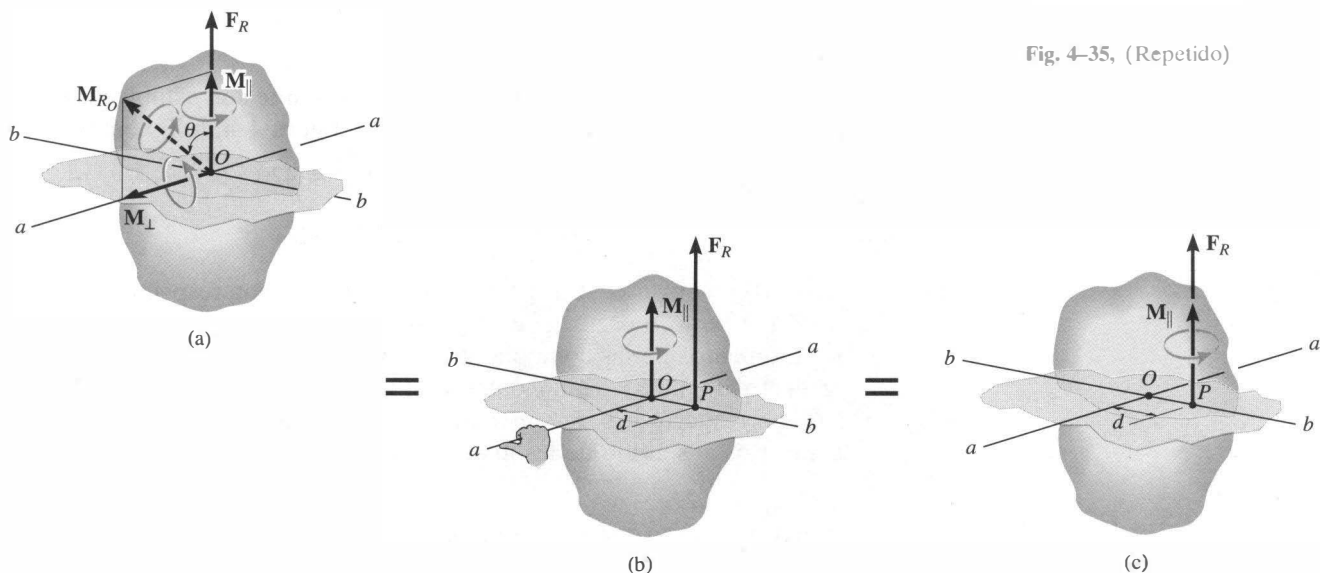


Fig. 4-42

EJEMPLO 4.16

La viga AE que se muestra en la figura 4-43a está sometida a un sistema de fuerzas coplanarias. Determine la magnitud, la dirección y la ubicación sobre la viga de una fuerza resultante que sea equivalente al sistema dado de fuerzas medido desde E .

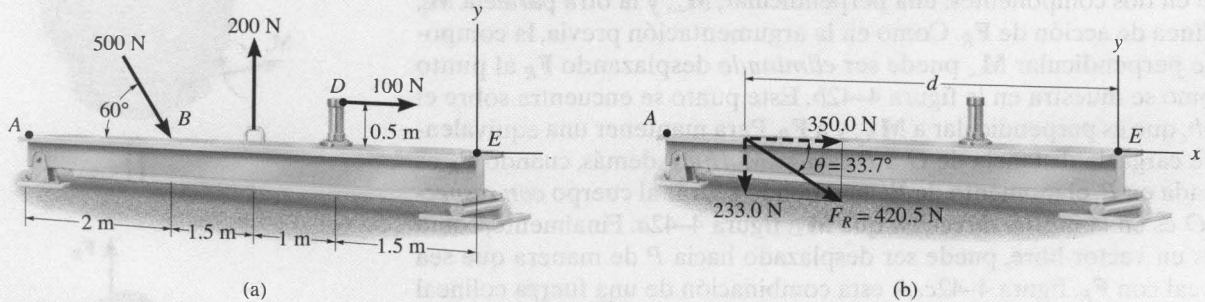


Fig. 4-43

Solución

El origen de coordenadas se localiza en el punto E como se muestra en la figura 4-43a.

Suma de fuerzas. Resolviendo la fuerza de 500 N en las componentes x y y y sumando las componentes de fuerza resulta

$$\begin{aligned} \rightarrow F_{R_x} &= \Sigma F_x; F_{R_x} = 500 \cos 60^\circ \text{ N} + 100 \text{ N} = 350.0 \text{ N} \rightarrow \\ +\uparrow F_{R_y} &= \Sigma F_y; F_{R_y} = -500 \sin 60^\circ \text{ N} + 200 \text{ N} = -233.0 \text{ N} \\ &= 233.0 \text{ N} \downarrow \end{aligned}$$

La magnitud y la dirección de la fuerza resultante son establecidas a partir de la suma vectorial mostrada en la figura 4-43b. Tenemos

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{(350.0)^2 + (233.0)^2} = 420.5 \text{ N} && \text{Resp.} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{233.0}{350.0}\right) = 33.7^\circ \swarrow_{\theta} && \text{Resp.} \end{aligned}$$

Suma de momentos. Los momentos se sumarán con respecto al punto E . Por tanto, a partir de las figuras 4-43a y 4-43b, requerimos que los momentos de las componentes de \mathbf{F}_R (o el momento de \mathbf{F}_R) con respecto al punto E sean iguales a los momentos del sistema de fuerzas con respecto a E . Si suponemos que los momentos positivos son contrarios al sentido de las manecillas del reloj, tenemos

$$\begin{aligned} \downarrow +M_{R_E} &= \Sigma M_E \\ 233.0 \text{ N}(d) + 350.0 \text{ N}(0) &= (500 \sin 60^\circ \text{ N})(4 \text{ m}) + (500 \cos 60^\circ \text{ N})(0) \\ &\quad - (100 \text{ N})(0.5 \text{ m}) - (200 \text{ N})(2.5 \text{ m}) \\ d &= \frac{1182.1}{233.0} = 5.07 \text{ m} && \text{Resp.} \end{aligned}$$

Observe que al usar una convención de signos en el sentido de las manecillas del reloj se obtendría este mismo resultado. Como d es positiva, \mathbf{F}_R actúa a la izquierda de E , como se muestra. Trate de resolver este problema sumando momentos con respecto al punto A y muestre que $d' = 0.927 \text{ m}$, medida a la derecha de A .

EJEMPLO 4.17

La grúa mostrada en la figura 4-44a está sometida a tres fuerzas coplanares. Reemplace esta carga por una fuerza resultante equivalente y especifique en qué punto la línea de acción de la resultante interseca la columna AB y el pescante BC .

Solución

Suma de fuerzas. Al resolver la fuerza de 250 lb en sus componentes x y y y sumar las componentes de fuerza resulta

$$\begin{aligned} \rightarrow F_{R_x} &= \Sigma F_x; F_{R_x} = -250 \text{ lb} \left(\frac{3}{5}\right) - 175 \text{ lb} = -325 \text{ lb} = 325 \text{ lb} \leftarrow \\ +\uparrow F_{R_y} &= \Sigma F_y; F_{R_y} = -250 \text{ lb} \left(\frac{4}{5}\right) - 60 \text{ lb} = -260 \text{ lb} = 260 \text{ lb} \downarrow \end{aligned}$$

Como se ve por la suma vectorial en la figura 4-44b,

$$F_R = \sqrt{(325)^2 + (260)^2} = 416 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{260}{325}\right) = 38.7^\circ \quad \text{Resp.}$$

Suma de momentos. Los momentos los sumaremos con respecto al punto arbitrario A . Suponiendo que la línea de acción de F_R interseca a AB , figura 4-44b, requerimos que el momento de las componentes de F_R en la figura 4-44b con respecto a A sea igual a los momentos del sistema de fuerza presente en la figura 4-44a con respecto a A ; es decir,

$$\begin{aligned} \downarrow + M_{R_A} &= \Sigma M_A; \quad 325 \text{ lb}(y) + 260 \text{ lb}(0) \\ &= 175 \text{ lb}(5 \text{ pies}) - 60 \text{ lb}(3 \text{ pies}) + 250 \text{ lb} \left(\frac{3}{5}\right)(11 \text{ pies}) - 250 \text{ lb} \left(\frac{4}{5}\right)(8 \text{ pies}) \\ & \quad y = 2.29 \text{ pies} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Por el principio de transmisibilidad, también puede considerarse que F_R interseca a BC , figura 4-44b, en cuyo caso tenemos

$$\begin{aligned} \downarrow + M_{R_A} &= \Sigma M_A; \quad 325 \text{ lb}(11 \text{ pies}) - 260 \text{ lb}(x) \\ &= 175 \text{ lb}(5 \text{ pies}) - 60 \text{ lb}(3 \text{ pies}) + 250 \text{ lb} \left(\frac{3}{5}\right)(11 \text{ pies}) - 250 \text{ lb} \left(\frac{4}{5}\right)(8 \text{ pies}) \\ & \quad x = 10.9 \text{ pies} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Asimismo, podemos resolver para estas posiciones suponiendo que F_R actúa en el punto arbitrario (x, y) sobre su línea de acción, figura 4-44b. Sumando momentos con respecto al punto A resulta

$$\begin{aligned} \downarrow + M_{R_A} &= \Sigma M_A; \quad 325 \text{ lb}(y) - 260 \text{ lb}(x) \\ &= 175 \text{ lb}(5 \text{ pies}) - 60 \text{ lb}(3 \text{ pies}) + 250 \text{ lb} \left(\frac{3}{5}\right)(11 \text{ pies}) - 250 \text{ lb} \left(\frac{4}{5}\right)(8 \text{ pies}) \\ & \quad 325y - 260x = 745 \end{aligned}$$

que es la ecuación de la línea discontinua más oscura b . Para encontrar los puntos de intersección con la grúa a lo largo de AB , se establece $x = 0$, luego $y = 2.29$ pies, y a lo largo de BC hacemos $y = 11$ pies y luego $x = 10.9$ pies.

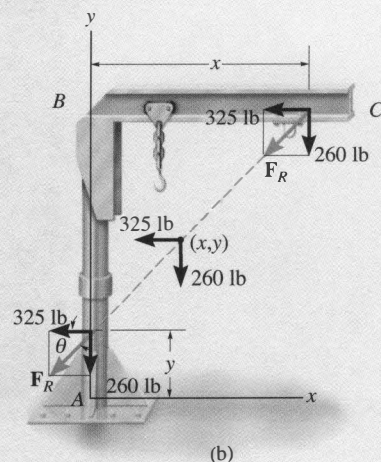
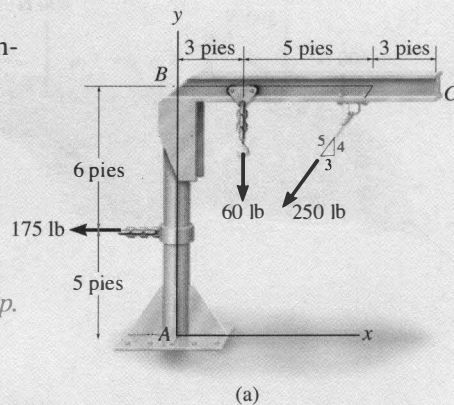


Fig. 4-44

EJEMPLO 4.18

La losa que aparece en la figura 4-45a está sometida a cuatro fuerzas paralelas. Determine la magnitud y la dirección de una fuerza resultante equivalente al sistema dado de fuerzas y localice su punto de aplicación sobre la losa.

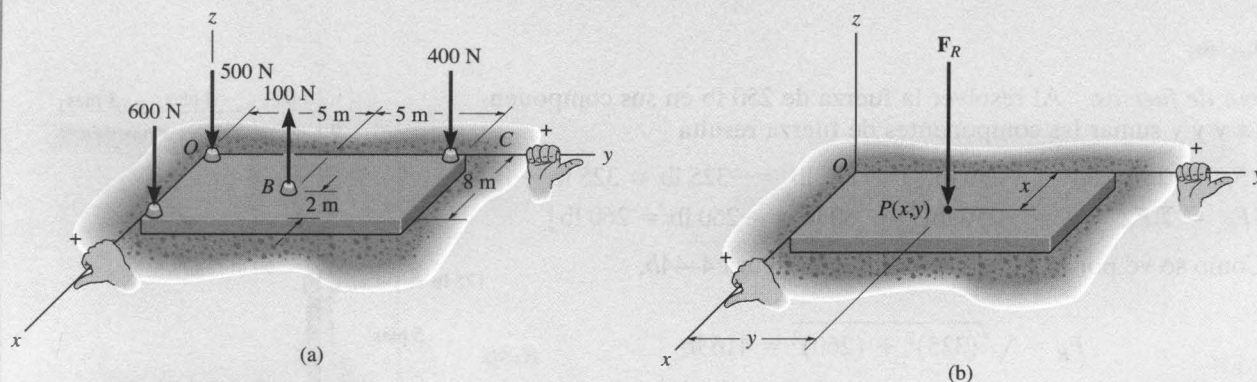


Fig. 4-45

Solución (Análisis escalar)

Suma de fuerzas. A partir de la figura 4-45a, la fuerza resultante es

$$+\uparrow F_R = \Sigma F; F_R = -600 \text{ N} + 100 \text{ N} - 400 \text{ N} - 500 \text{ N} \\ = -1400 \text{ N} = 1400 \text{ N} \downarrow$$

Resp.

Suma de momentos. Requerimos que el momento con respecto al eje x de la fuerza resultante, figura 4-45b, sea igual a la suma de los momentos con respecto al eje x de todas las fuerzas presentes en el sistema, figura 4-45a. Los brazos de momento son determinados con las coordenadas y , en vista de que esas coordenadas representan las *distancias perpendiculares* desde el eje x hasta las líneas de acción de las fuerzas. Usando la regla de la mano derecha, donde los momentos positivos actúan en la dirección $+\mathbf{i}$, tenemos

$$M_{R_x} = \Sigma M_x; \\ -(1400 \text{ N})y = 600 \text{ N}(0) + 100 \text{ N}(5 \text{ m}) - 400 \text{ N}(10 \text{ m}) + 500 \text{ N}(0) \\ -1400y = -3500 \quad y = 2.50 \text{ m}$$

Resp.

De manera similar, suponiendo que los momentos positivos actúan en la dirección $+\mathbf{j}$, puede escribirse una ecuación de momentos con respecto al eje y usando brazos de momento definidos mediante las coordenadas x de cada fuerza.

$$M_{R_y} = \Sigma M_y; \\ (1400 \text{ N})x = 600 \text{ N}(8 \text{ m}) - 100 \text{ N}(6 \text{ m}) + 400 \text{ N}(0) + 500 \text{ N}(0) \\ 1400x = 4200 \quad x = 3.00 \text{ m}$$

Resp.

Por tanto, una fuerza de $F_R = 1400 \text{ N}$ colocada en el punto $P(3.00 \text{ m}, 2.50 \text{ m})$ sobre la losa, figura 4-45b, es equivalente al sistema de fuerzas paralelas que actúa sobre la losa en la figura 4-45a.

EJEMPLO 4.19

Tres fuerzas paralelas actúan sobre el borde de la placa circular de cubierta en la figura 4-46a. Determine la magnitud y la dirección de una fuerza resultante equivalente al sistema dado de fuerzas y localice su punto de aplicación, P , sobre la placa.

Solución (Análisis vectorial)

Suma de fuerzas. A partir de la figura 4-46a, la fuerza resultante \mathbf{F}_R es

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F}; \quad \mathbf{F}_R = -300\mathbf{k} - 200\mathbf{k} - 150\mathbf{k} \\ = \{-650\mathbf{k}\} \text{ lb}$$

Resp.

Suma de momentos. Si elegimos el punto O como referencia para calcular momentos y suponemos que \mathbf{F}_R actúa en un punto $P(x, y)$, figura 4-46b, requerimos que

$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma \mathbf{M}_O; \\ \mathbf{r} \times \mathbf{F}_R = \mathbf{r}_A \times (-300\mathbf{k}) + \mathbf{r}_B \times (-200\mathbf{k}) + \mathbf{r}_C \times (-150\mathbf{k}) \\ (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times (-650\mathbf{k}) = (8\mathbf{i}) \times (-300\mathbf{k}) + (-8\mathbf{j}) \times (-200\mathbf{k}) \\ + (-8 \sin 45^\circ \mathbf{i} + 8 \cos 45^\circ \mathbf{j}) \times (-150\mathbf{k}) \\ 650x\mathbf{j} - 650y\mathbf{i} = 2400\mathbf{j} + 1600\mathbf{i} - 848.5\mathbf{j} - 848.5\mathbf{i}$$

Al igualar las correspondientes componentes \mathbf{i} y \mathbf{j} resulta

$$650x = 2400 - 848.5 \quad (1)$$

$$-650y = 1600 - 848.5 \quad (2)$$

Al resolver estas ecuaciones, obtenemos las coordenadas del punto P ,

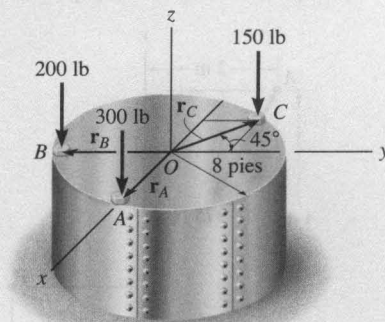
$$x = 2.39 \text{ pies} \quad y = -1.16 \text{ pies} \quad \text{Resp.}$$

El signo negativo indica que fue erróneo suponer una posición $+y$ para \mathbf{F}_R como se muestra en la figura 4-46b.

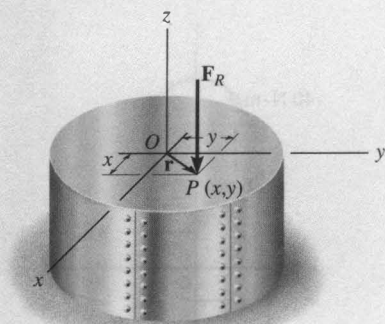
También es posible establecer las ecuaciones 1 y 2 directamente sumando momentos con respecto a los ejes y y x . Usando la regla de la mano derecha tenemos

$$M_{R_y} = \Sigma M_y; \quad 650x = 300 \text{ lb} (8 \text{ pies}) - 150 \text{ lb} (8 \sin 45^\circ \text{ pies})$$

$$M_{R_x} = \Sigma M_x; \quad -650y = 200 \text{ lb} (8 \text{ pies}) - 150 \text{ lb} (8 \cos 45^\circ \text{ pies})$$



(a)



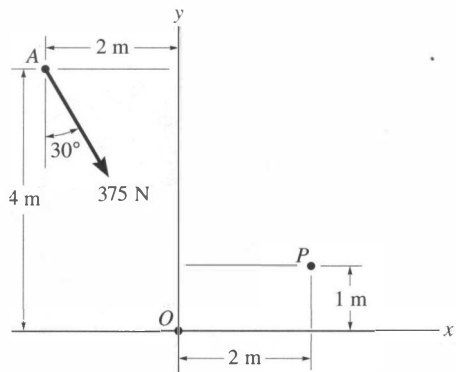
(b)

Fig. 4-46

PROBLEMAS

4-98. Reemplace la fuerza presente en A por una fuerza equivalente y el momento de un par en el punto O .

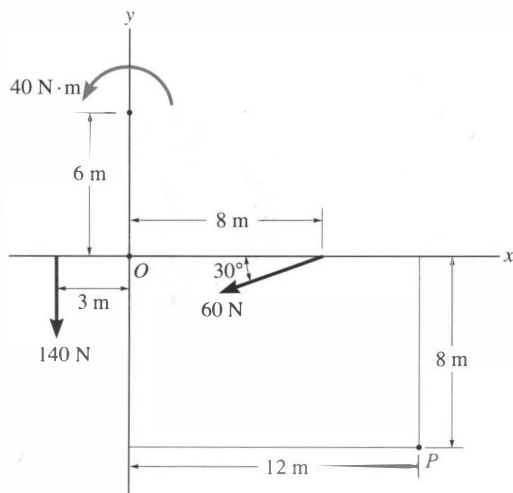
4-99. Reemplace la fuerza en A por una fuerza equivalente y el momento de un par en el punto P .



Probs. 4-98/99

***4-100.** Reemplace el sistema de fuerza y momento de un par por una fuerza y el momento de un par equivalentes actuando en el punto O .

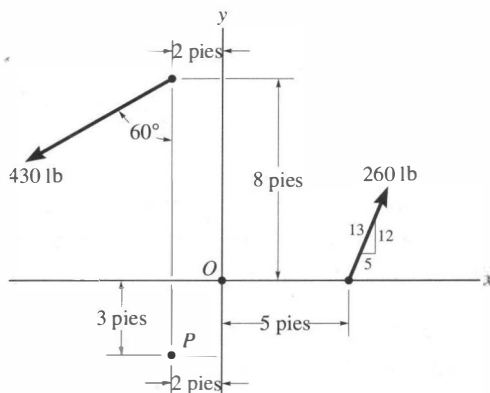
4-101. Reemplace el sistema de fuerza y momento de un par por una fuerza y el momento de un par equivalentes actuando en el punto P .



Probs. 4-100/101

4-102. Reemplace el sistema de fuerzas por una fuerza y el momento de un par equivalentes en el punto O .

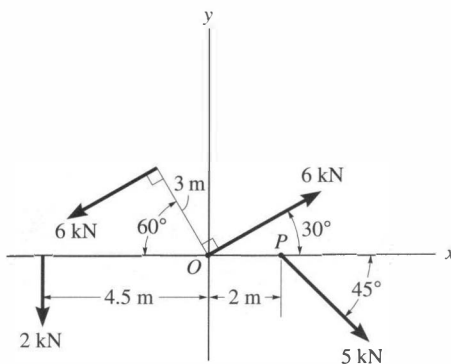
4-103. Reemplace el sistema de fuerzas por una fuerza y el momento de un par equivalentes en el punto P .



Probs. 4-102/103

***4-104.** Reemplace el sistema de fuerza y par por una fuerza y momento de un par equivalentes actuando en el punto O .

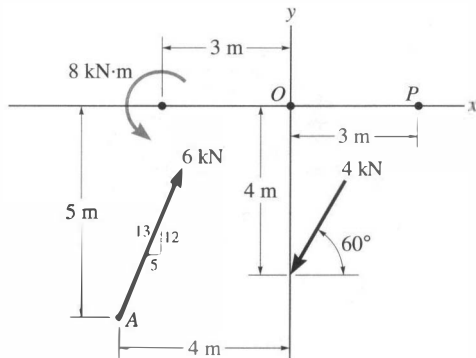
4-105. Reemplace el sistema de fuerza y par por una fuerza y momento de un par equivalentes actuando en el punto P .



Probs. 4-104/105

4-106. Reemplace el sistema de fuerza y par por una fuerza y momento de un par equivalentes en el punto O .

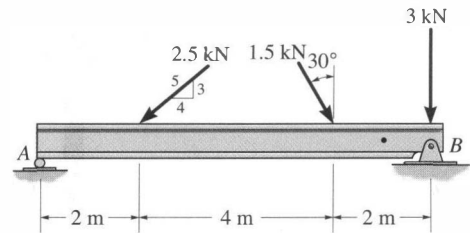
4-107. Reemplace el sistema de fuerza y par por una fuerza y momento de un par equivalentes en el punto P .



Probs. 4-106/107

4-110. Reemplace el sistema de fuerzas actuando sobre la viga por una fuerza y momento de un par equivalentes en el punto A .

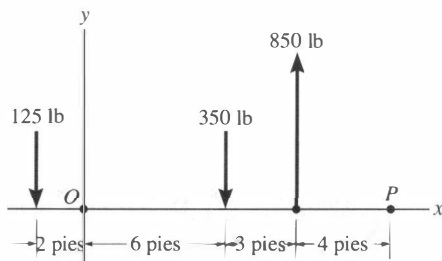
4-111. Reemplace el sistema de fuerzas actuando sobre la viga por una fuerza y momento de un par equivalentes en el punto B .



Probs. 4-110/111

*4-108. Reemplace el sistema de fuerzas por una sola fuerza resultante y especifique su punto de aplicación, medido a lo largo del eje x desde el punto O .

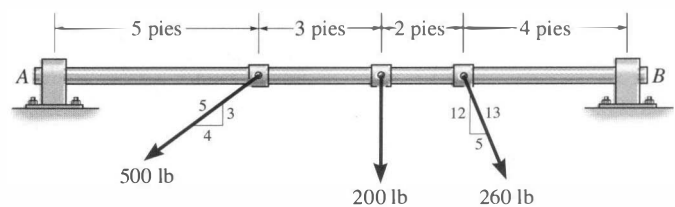
4-109. Reemplace el sistema de fuerzas por una sola fuerza resultante y especifique su punto de aplicación, medido a lo largo del eje x desde el punto P .



Probs. 4-108/109

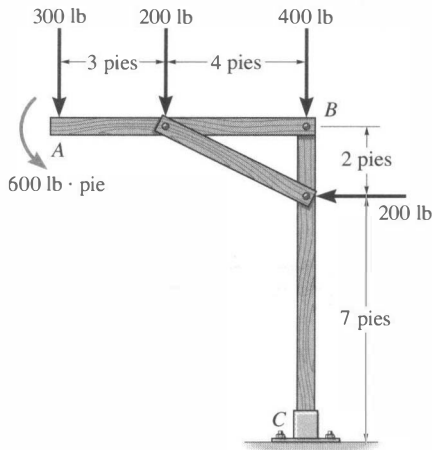
*4-112. Reemplace las tres fuerzas que actúan sobre la flecha por una sola fuerza resultante. Especifique dónde actúa la fuerza, medida desde el extremo A .

4-113. Reemplace las tres fuerzas que actúan sobre la flecha por una sola fuerza resultante. Especifique dónde actúa la fuerza, medida desde el extremo B .



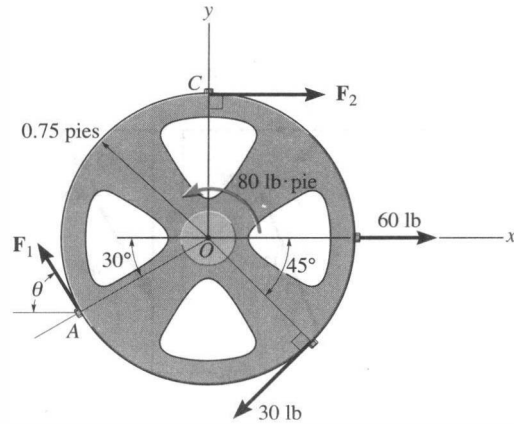
Probs. 4-112/113

4-114. Reemplace la carga sobre el marco por una sola fuerza resultante. Especifique dónde interseca su línea de acción, medida desde A , al miembro AB .



Prob. 4-114

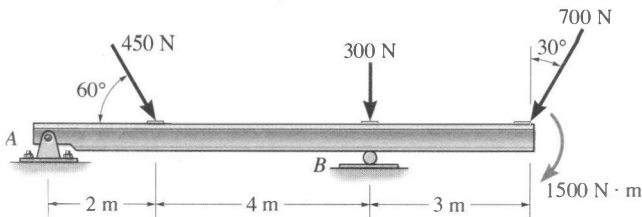
4-117. Determine las magnitudes de F_1 y F_2 y la dirección de F_1 de modo que la carga produzca una fuerza y un momento de par resultantes igual a cero sobre la rueda.



Prob. 4-117

4-115. Reemplace la carga que actúa sobre la viga por una sola fuerza resultante. Especifique dónde actúa la fuerza, medida desde el extremo A .

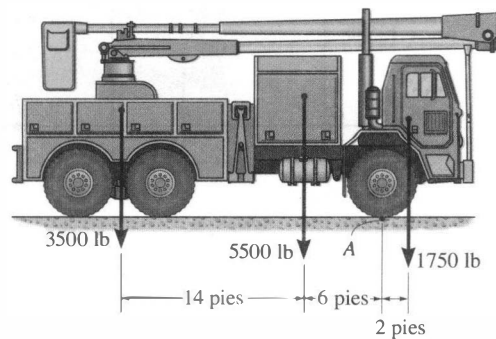
***4-116.** Reemplace la carga que actúa sobre la viga por una sola fuerza resultante. Especifique dónde actúa la fuerza, medida desde B .



Probs. 4-115/116

4-118. Se muestran los pesos de varias componentes del camión. Reemplace este sistema de fuerzas por una fuerza y un momento de par resultantes equivalentes actuando en el punto A .

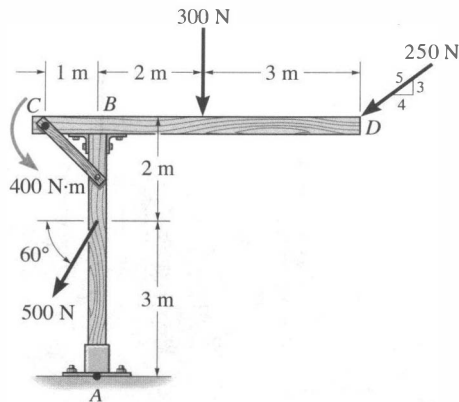
4-119. Se muestran los pesos de varias componentes del camión. Reemplace este sistema de fuerzas por una fuerza resultante equivalente y especifique su ubicación medida desde el punto A .



Probs. 4-118/119

*4-120. Reemplace la carga sobre la estructura por una sola fuerza resultante. Especifique dónde interseca su línea de acción al miembro AB , medida esta intersección desde A .

4-121. Reemplace la carga sobre la estructura por una sola fuerza resultante. Especifique dónde interseca su línea de acción al miembro CD , medida esta intersección desde el extremo C .

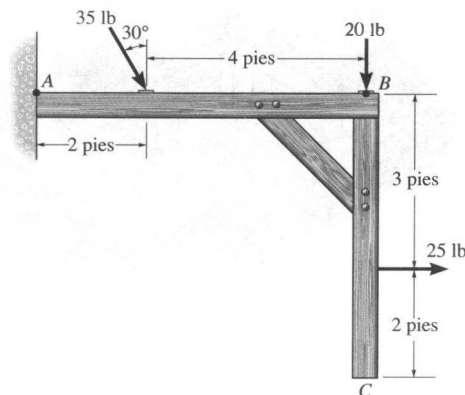


Probs. 4-120/121

4-122. Reemplace el sistema de fuerzas que actúa sobre la estructura por una fuerza resultante equivalente y especifique dónde interseca la línea de acción de la resultante al miembro AB , medida esta intersección desde el punto A .

4-123. Reemplace el sistema de fuerzas que actúa sobre la estructura por una fuerza resultante equivalente y especifique dónde interseca la línea de acción de la resultante al miembro BC , medida esta intersección desde el punto B .

*4-124. Reemplace el sistema de fuerzas que actúa sobre la estructura por una fuerza y un momento de par resultante equivalentes que actúen en el punto A .

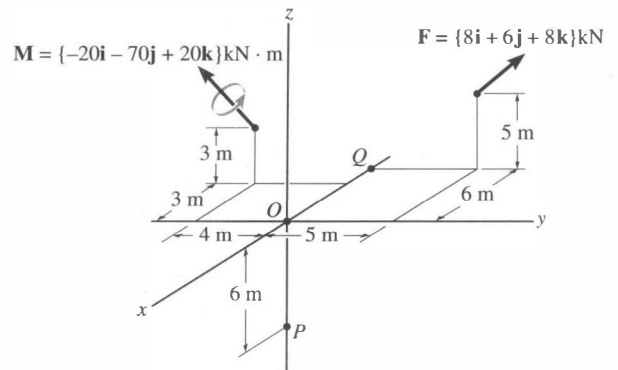


Probs. 4-122/123/124

4-125. Reemplace el sistema de fuerzas y momento de par por una fuerza y momento de par resultantes equivalentes en el punto O . Expresé los resultados en forma vectorial cartesiana.

4-126. Reemplace el sistema de fuerzas y momento de par por una fuerza y momento de par resultantes equivalentes en el punto P . Expresé los resultados en forma vectorial cartesiana.

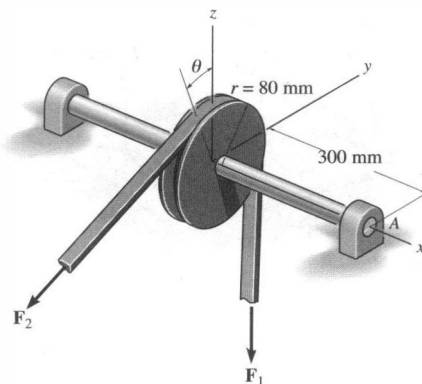
4-127. Reemplace el sistema de fuerzas y momento de par por una fuerza y momento de par resultantes equivalentes en el punto Q . Expresé los resultados en forma vectorial cartesiana.



Probs. 4-125/126/127

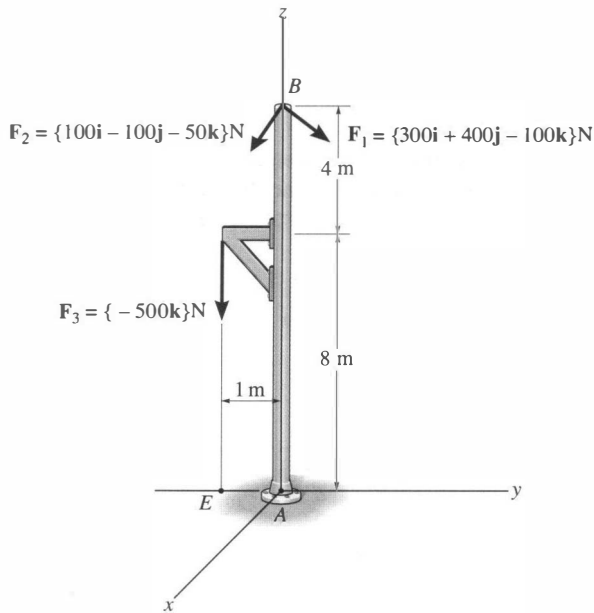
*4-128. La banda que pasa sobre la polea está sometida a las fuerzas F_1 y F_2 , cada una con magnitud de 40 N. F_1 actúa en la dirección $-\mathbf{k}$. Reemplace esas fuerzas por una fuerza y un momento de par equivalentes en el punto A . Expresé el resultado en forma vectorial cartesiana. Considere $\theta = 0^\circ$ de modo que F_2 actúe en la dirección $-\mathbf{j}$.

4-129. La banda que pasa sobre la polea está sometida a dos fuerzas F_1 y F_2 , cada una con magnitud de 40 N. F_1 actúa en la dirección $-\mathbf{k}$. Reemplace esas fuerzas por una fuerza y un momento de par equivalentes en el punto A . Expresé el resultado en forma vectorial cartesiana. Considere $\theta = 45^\circ$.



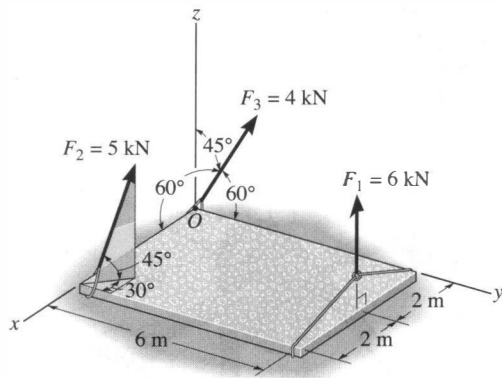
Probs. 4-128/129

4-130. Reemplace el sistema de fuerzas por una fuerza y el momento de un par resultantes equivalentes en el punto A.



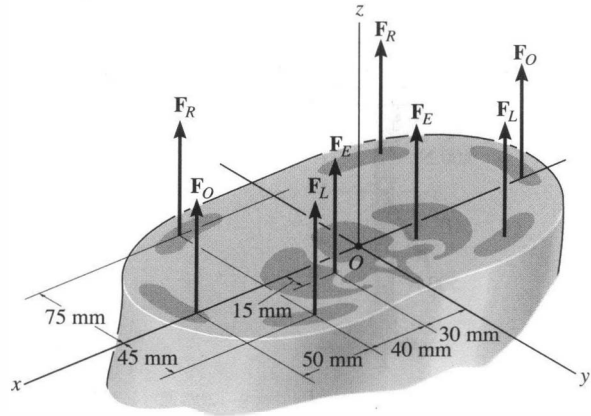
Prob. 4-130

4-131. La losa va a ser levantada usando las tres eslingas mostradas. Reemplace el sistema de fuerzas que actúan sobre las eslingas por una fuerza y un momento de par equivalentes en el punto O. La fuerza F_1 es vertical.



Prob. 4-131

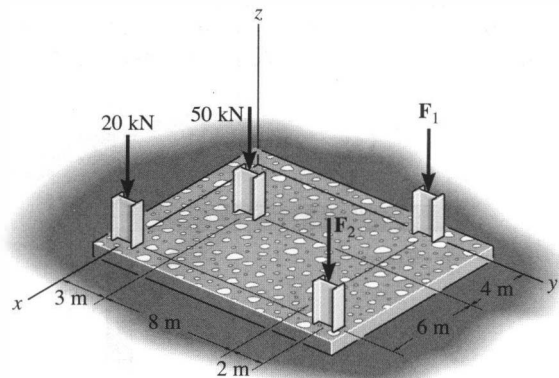
4-132. En la figura se muestra un modelo biomecánico de la región lumbar de la columna vertebral humana. Las fuerzas que actúan en los cuatro grupos de músculos consisten en $F_R = 35\text{ N}$ para el recto, $F_O = 45\text{ N}$ para el oblicuo, $F_L = 23\text{ N}$ para el latísimo lumbar dorsal, y $F_E = 32\text{ N}$ para el erector de la columna. Esas cargas son simétricas con respecto al plano y-z. Reemplace este sistema de fuerzas paralelas por una fuerza y momento de par equivalentes actuando en el punto O de la columna. Expresé los resultados en forma vectorial cartesiana.



Prob. 4-132

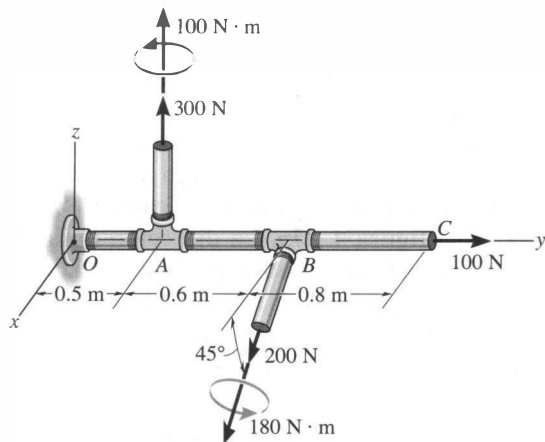
4-133. La losa de un edificio está sometida a cuatro cargas de columnas paralelas. Determine la fuerza resultante equivalente y especifique su ubicación (x, y) sobre la losa. Considere $F_1 = 30\text{ kN}$ y $F_2 = 40\text{ kN}$.

4-134. La losa de un edificio está sometida a cuatro cargas de columnas paralelas. Determine la fuerza resultante equivalente y especifique su ubicación (x, y) sobre la losa. Considere $F_1 = 20\text{ kN}$ y $F_2 = 50\text{ kN}$.



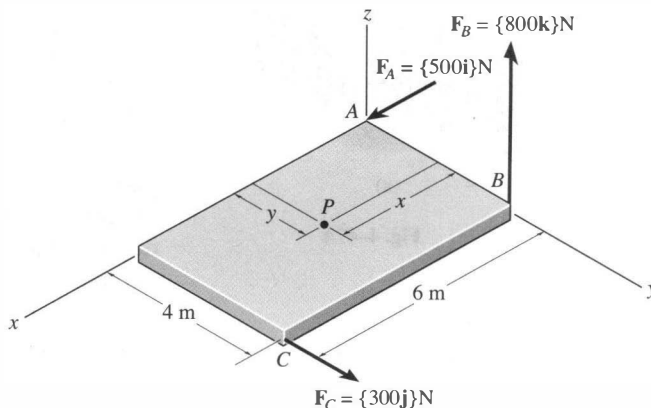
Probs. 4-133/134

4-135. Reemplace las dos llaves y la fuerza que actúan sobre la tubería por una fuerza y un momento de par resultantes equivalentes en el punto O .



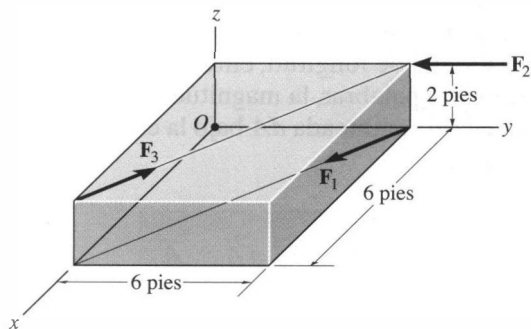
Prob. 4-135

4-137. Reemplace las tres fuerzas que actúan sobre la placa por una llave. Especifique la magnitud de la fuerza y el momento del par para la llave así como el punto $P(x, y)$ donde su línea de acción interseca la placa.



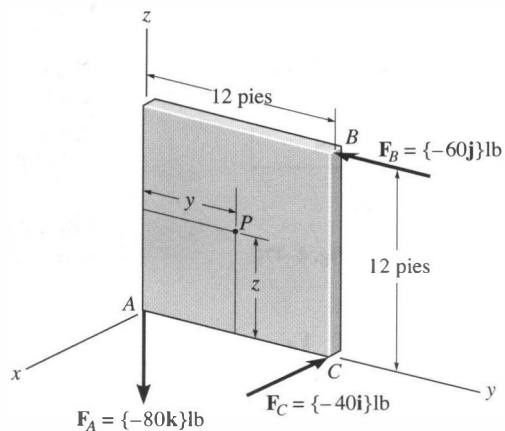
Prob. 4-137

*4-136. Cada una de las tres fuerzas que actúan sobre el bloque tiene magnitud de 10 lb. Reemplace este sistema por una llave y especifique el punto donde la llave interseca al eje z , medida esta intersección desde el punto O .



Prob. 4-136

4-138. Reemplace las tres fuerzas que actúan sobre la placa por una llave. Especifique la magnitud de la fuerza y el momento del par para la llave así como el punto $P(y, z)$ donde su línea de acción interseca a la placa.



Prob. 4-138

4.10 Reducción de una carga simple distribuida

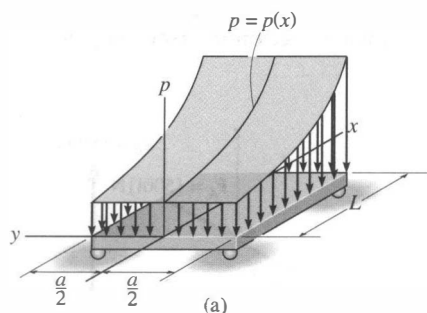


Fig. 4-47A

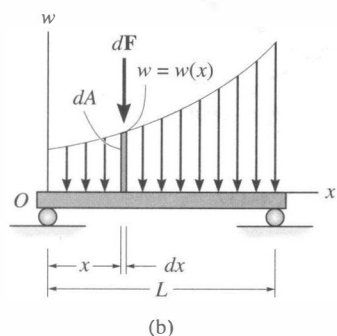


Fig. 4-47B

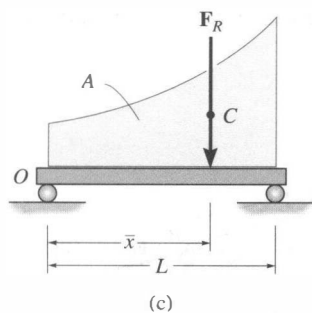


Fig. 4-47C

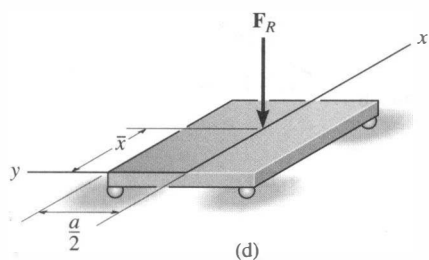


Fig. 4-47

En muchas situaciones, un área superficial muy grande de un cuerpo puede estar sometida a *cargas distribuidas* como las causadas por viento, fluidos, o simplemente el peso de material soportado sobre la superficie del cuerpo. La *intensidad* de esas cargas en cada punto de la superficie se define como la *presión p* (fuerza por área unitaria), la cual puede ser medida en unidades de lb/pie² o pascales (Pa), donde 1 Pa = 1 N/m².

En esta sección consideraremos el caso más común de una carga de presión distribuida, la cual es *uniforme* a lo largo del eje de un cuerpo plano rectangular sobre el cual la carga está aplicada.* Un ejemplo de tal carga se muestra en la figura 4-47a. La dirección de la intensidad de la carga de presión está indicada mediante flechas trazadas sobre el *diagrama de intensidad de carga*. Toda la carga sustentada sobre la placa es, por tanto, un sistema de fuerzas paralelas, infinitas en número, y cada una actuando sobre un área diferencial separada de la placa. Aquí, la *función de carga*, $p = p(x)$ Pa, es sólo una función de x ya que la presión es uniforme a lo largo del eje y . Si multiplicamos $p = p(x)$ por el *ancho a* m de la placa, obtenemos $w = [p(x) \text{ N/m}^2]a \text{ m} = w(x) \text{ N/m}$. Esta función de carga, mostrada en la figura 4-47b, es una medida de la distribución de carga a lo largo de la línea $y = 0$ que está en el plano de simetría de la carga, figura 4-47a. Como se indicó, la carga se mide como una fuerza por unidad de longitud y no como una fuerza por área unitaria. En consecuencia, el diagrama de intensidad de carga para $w = w(x)$ puede ser representado mediante un sistema de fuerzas paralelas *coplanares*, mostrado en dos dimensiones en la figura 4-47b. Usando los métodos de la sección 4.9, este sistema de fuerzas puede ser simplificado a una sola fuerza resultante F_R y su ubicación \bar{x} puede quedar especificada, figura 4-47c.

Magnitud de la fuerza resultante. A partir de la ecuación 4-17 ($F_R = \Sigma F$), la magnitud de F_R es equivalente a la suma de todas las fuerzas presentes en el sistema. En este caso, debemos usar integración ya que hay un número infinito de fuerzas paralelas dF actuando a lo largo de la placa, figura 4-47b. Como dF está actuando sobre un elemento de longitud dx y $w(x)$ es una fuerza por unidad de longitud, entonces, en la ubicación x , $dF = w(x) dx = dA$. En otras palabras, la magnitud de dF es determinada a partir del *área diferencial* sombreada dA bajo la curva de carga. Para toda la longitud de la placa,

$$+\downarrow F_R = \Sigma F; \quad F_R = \int_L w(x) dx = \int_A dA = A \quad (4-19)$$

Por consiguiente, la magnitud de la fuerza resultante es igual al área total A bajo el diagrama de carga $w = w(x)$, figura 4-47c.

*El caso más general de una superficie con carga no uniforme actuando sobre un cuerpo está considerado en la sección 9.5.

Localización de la fuerza resultante. Aplicando la ecuación 4-17 ($M_{R_O} = \Sigma M_O$), la ubicación \bar{x} de la línea de acción de \mathbf{F}_R puede ser determinada igualando los momentos de la fuerza resultante y de la distribución de fuerza con respecto al punto O (el eje y). Como $d\mathbf{F}$ produce un momento de $x dF = x w(x) dx$ con respecto a O , figura 4-47b, entonces, para toda la placa, figura 4-47c,

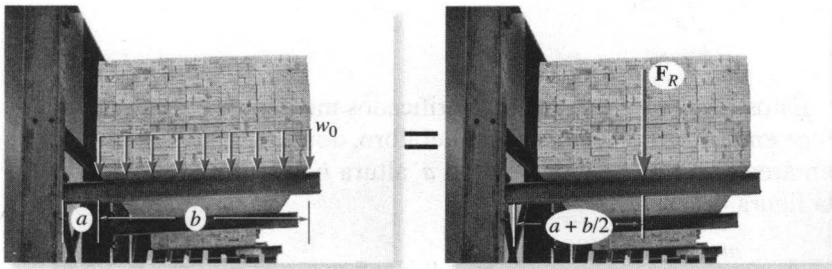
$$\uparrow + M_{R_O} = \Sigma M_O; \quad \bar{x}F_R = \int_L x w(x) dx$$

Despejando para \bar{x} , con la ecuación 4-19, podemos escribir

$$\bar{x} = \frac{\int_L x w(x) dx}{\int_L w(x) dx} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} \quad (4-20)$$

Esta ecuación representa la coordenada x del centro geométrico o *centroide* del área bajo el diagrama de carga distribuida $w(x)$. Por tanto, la fuerza resultante tiene una línea de acción que pasa por el centroide C (centro geométrico) del área definida mediante el diagrama de carga distribuida $w(x)$, figura 4.47c.

Una vez que \bar{x} está determinada, por simetría, \mathbf{F}_R pasa a través del punto $(\bar{x}, 0)$ sobre la superficie de la placa, figura 4-47d. Si ahora consideramos la carga de presión $p(x)$ tridimensional, figura 4-47a, podemos concluir que la fuerza resultante tiene una magnitud igual al volumen bajo la curva de carga distribuida $p = p(x)$ y una línea de acción que pasa por el centroide (centro geométrico) de este volumen. En el capítulo 9 se proporciona un tratamiento detallado de las técnicas de integración para calcular los centroides de volúmenes o áreas. Sin embargo, en muchos casos, el diagrama de carga distribuida tiene la forma de un rectángulo, de un triángulo, o de algún otro cuerpo geométrico simple. Los centroides de tales formas comunes no tienen que ser determinados con la ecuación 4-20; en vez de ello, pueden obtenerse directamente de las tablas que aparecen en el forro interno al final de este libro.



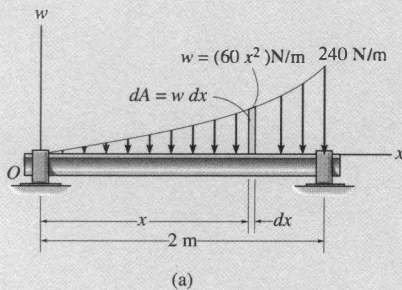
La viga que soporta esta pila de madera está sometida a una carga *uniforme* distribuida, por lo que el diagrama de intensidad de la carga tiene forma rectangular. Si la intensidad de la carga es w_0 , entonces la fuerza resultante es determinada a partir del área del rectángulo, $F_R = w_0 b$. La línea de acción de esta fuerza pasa por el centroide o centro del área, $\bar{x} = a + b/2$. Esta resultante es equivalente a la carga distribuida, de manera que ambas cargas producen los mismos efectos “externos” o reacciones en los soportes de la viga.

PUNTOS IMPORTANTES

- Las cargas distribuidas son definidas usando una función de carga $w = w(x)$ que indica la intensidad de la carga a lo largo de la longitud del miembro. Esta intensidad es medida en N/m lb/pie.
- Los efectos externos causados por una carga distribuida coplanar que actúa sobre un cuerpo pueden ser representados por medio de una sola fuerza resultante.
- La fuerza resultante es equivalente al *área* bajo el diagrama de carga distribuida, y tiene una línea de acción que pasa por el *centroide* o centro geométrico de esta área.

EJEMPLO 4.20

Determine la magnitud y la ubicación de la fuerza resultante equivalente que actúa sobre la flecha en la figura 4-48a.



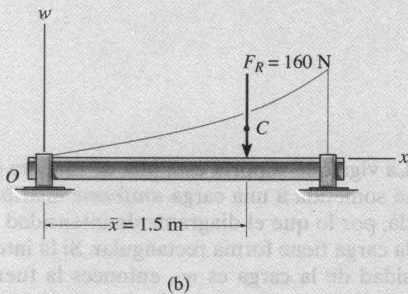
Solución

Como $w = w(x)$ está dada, este problema será resuelto por integración. El elemento diferencial del área más obscura $dA = w dx = 60x^2 dx$. Aplicando la ecuación 4-19, sumamos esos elementos desde $x = 0$ hasta $x = 2$ m, y obtenemos la fuerza resultante F_R .

$$F_R = \Sigma F;$$

$$F_R = \int_A dA = \int_0^2 60x^2 dx = 60 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 60 \left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] = 160 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

Como el elemento de área dA está localizado a una distancia x arbitraria desde O , la ubicación \bar{x} de F_R medida desde O , figura 4-48b, es determinada con la ecuación 4-20.



$$\bar{x} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^2 x(60x^2) dx}{160} = \frac{60 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2}{160} = \frac{60 \left[\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right]}{160} = 1.5 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

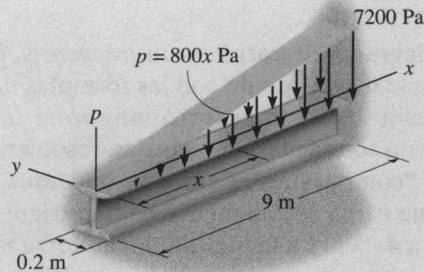
Estos resultados pueden ser verificados mediante la tabla que aparece en el forro interno al final del libro, donde se muestra que para un área exarabólica de longitud a , altura b , y la forma mostrada en la figura 4-48a,

$$A = \frac{ab}{3} = \frac{2 \text{ m}(240 \text{ N/m})}{3} = 160 \text{ N} \text{ y } \bar{x} = \frac{3}{4}a = \frac{3}{4}(2 \text{ m}) = 1.5 \text{ m}$$

Fig. 4-48

EJEMPLO 4.21

Una carga distribuida $p = 800x$ Pa actúa sobre la superficie superior de la viga mostrada en la figura 4-49a. Determine la magnitud y la ubicación de la fuerza resultante equivalente.



(a)

Fig. 4-49

Solución

La función de carga $p = 800x$ Pa indica que la intensidad de carga varía uniformemente desde $p = 0$ en $x = 0$ hasta $p = 7200$ Pa en $x = 9$ m. Como la intensidad es uniforme a lo largo del ancho de la viga (eje y), la carga puede verse en dos dimensiones como se muestra en la figura 4-49b. Aquí

$$\begin{aligned} w &= (800x \text{ N/m}^2)(0.2 \text{ m}) \\ &= (160x) \text{ N/m} \end{aligned}$$

Observe que $w = 1440$ N/m en $x = 9$ m. Aunque podemos aplicar de nuevo las ecuaciones 4-19 y 4-20 como en el ejemplo 4.20, es más sencillo usar la tabla que aparece en el forro interno al final del libro.

La magnitud de la fuerza resultante es equivalente al área bajo el triángulo.

$$F_R = \frac{1}{2}(9 \text{ m})(1440 \text{ N/m}) = 6480 \text{ N} = 6.48 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

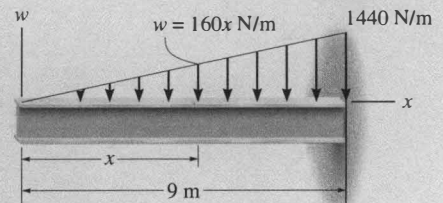
La línea de acción de F_R pasa por el *centroide* C del triángulo. Por consiguiente,

$$\bar{x} = 9 \text{ m} - \frac{1}{3}(9 \text{ m}) = 6 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

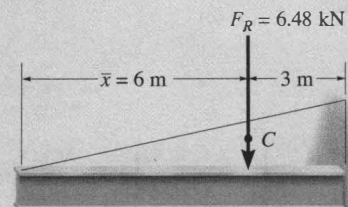
Los resultados se muestran en la figura 4-49c.

También podemos considerar a la resultante F_R actuando a través del *centroide* del *volumen* del diagrama de carga $p = p(x)$ en la figura 4-49a. Por tanto F_R corta al plano x - y en el punto $(6 \text{ m}, 0)$. Además, la magnitud de F_R es igual al volumen bajo el diagrama de carga; esto es,

$$F_R = V = \frac{1}{2}(7200 \text{ N/m}^2)(9 \text{ m})(0.2 \text{ m}) = 6.48 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$



(b)



(c)

EJEMPLO 4.22

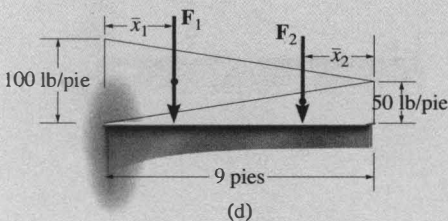
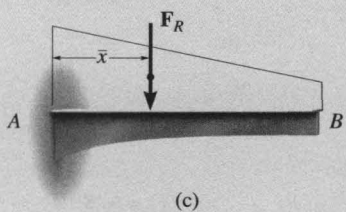
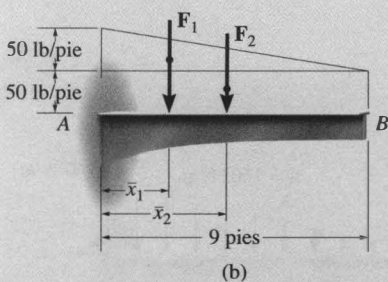
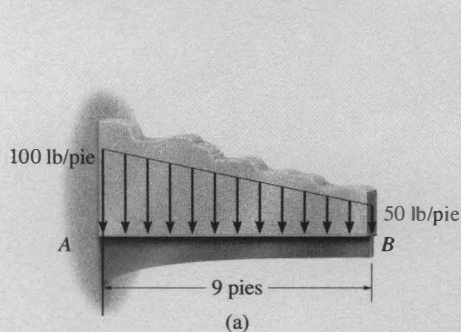


Fig. 4-50

El material granular ejerce una carga distribuida sobre la viga como se muestra en la figura 4-50a. Determine la magnitud y la ubicación de la resultante equivalente de esta carga.

Solución

El área del diagrama de carga es un *trapezio* y, por ello, la solución puede obtenerse directamente con las fórmulas de áreas y centroides para un trapezio dadas en el forro interno al final del libro. Como esas fórmulas no son fáciles de recordar, resolveremos este problema usando áreas “compuestas”. Para esto podemos dividir la carga del trapezio en una carga rectangular y en una triangular como se muestra en la figura 4-50b. La magnitud de la fuerza representada por cada una de esas cargas es igual a su *área* asociada,

$$F_1 = \frac{1}{2}(9 \text{ pies})(50 \text{ lb/pie}) = 225 \text{ lb}$$

$$F_2 = (9 \text{ pies})(50 \text{ lb/pie}) = 450 \text{ lb}$$

Las líneas de acción de esas fuerzas paralelas actúan a través del *centroide* de sus áreas asociadas y, por tanto, cortan la viga en

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{3}(9 \text{ pies}) = 3 \text{ pies}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{2}(9 \text{ pies}) = 4.5 \text{ pies}$$

Las dos fuerzas paralelas F_1 y F_2 pueden ser reducidas a una sola fuerza resultante F_R . La magnitud de F_R es

$$+\downarrow F_R = \Sigma F; \quad F_R = 225 + 450 = 675 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

Con referencia al punto A, figuras 4-50b y 4-50c, podemos encontrar la ubicación de F_R . Requerimos

$$\uparrow + M_{R_A} = \Sigma M_A; \quad \bar{x}(675) = 3(225) + 4.5(450) \\ \bar{x} = 4 \text{ pies} \quad \text{Resp.}$$

Nota: El área trapezoidal que aparece en la figura 4-50a también puede ser dividida en dos áreas triangulares, como se muestra en la figura 4-50d. En este caso

$$F_1 = \frac{1}{2}(9 \text{ pies})(100 \text{ lb/pie}) = 450 \text{ lb}$$

$$F_2 = \frac{1}{2}(9 \text{ pies})(50 \text{ lb/pie}) = 225 \text{ lb}$$

y

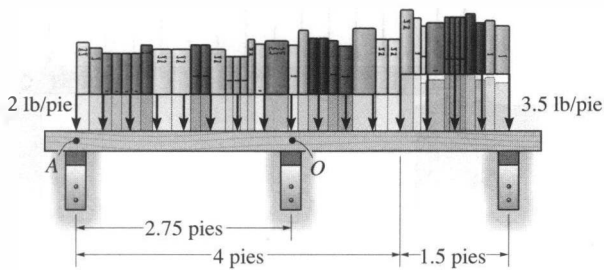
$$\bar{x}_1 = \frac{1}{3}(9 \text{ pies}) = 3 \text{ pies}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{3}(9 \text{ pies}) = 3 \text{ pies}$$

Usando estos resultados, muestre que de nuevo $F_R = 675 \text{ lb}$ y $\bar{x} = 4 \text{ pies}$.

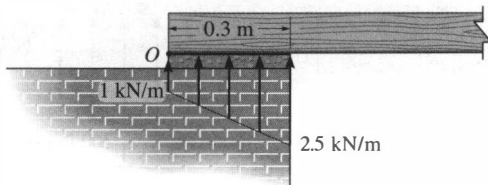
PROBLEMAS

4-139. La carga sobre el entrepaño está distribuida como se muestra. Determine la magnitud de la fuerza resultante equivalente y su ubicación, medida desde el punto O .



Prob. 4-139

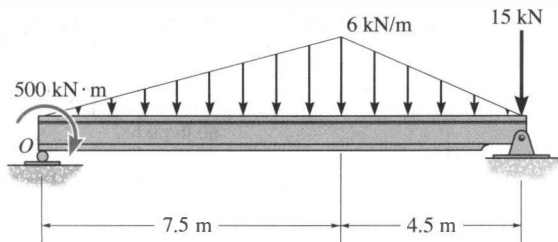
***4-140.** El soporte de mampostería produce la distribución de carga que actúa sobre el extremo de la viga. Simplifique esta carga a una sola fuerza resultante y especifique su ubicación medida desde el punto O .



Prob. 4-140

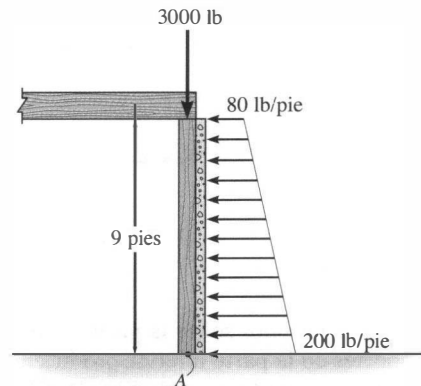
4-141. Reemplace la carga por una fuerza y un momento de par equivalentes actuando en el punto O .

4-142. Reemplace la carga por una sola fuerza resultante, y especifique la ubicación de la fuerza sobre la viga medida desde el punto O .



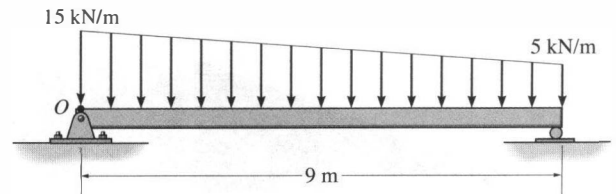
Probs. 4-141/142

4-143. La columna se usa para dar soporte al piso que ejerce una fuerza de 3000 lb sobre la parte superior de la columna. El efecto de la presión del suelo a lo largo de su lado es distribuido como se muestra. Reemplace esta carga por una fuerza resultante equivalente y especifique dónde actúa ésta a lo largo de la columna, medida desde su base A .



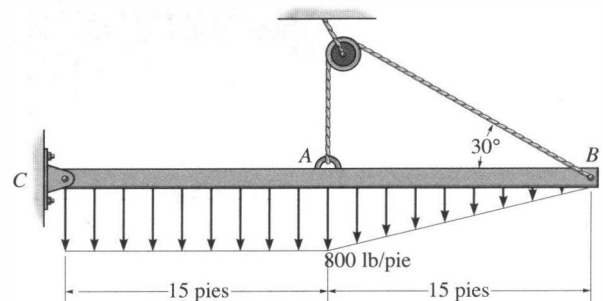
Prob. 4-143

***4-144.** Reemplace la carga por una fuerza y momento de par equivalentes actuando en el punto O .



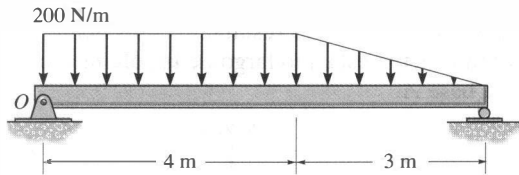
Prob. 4-144

4-145. Reemplace la carga distribuida por una fuerza resultante equivalente, y especifique su ubicación sobre la viga, medida desde el pasador situado en C .



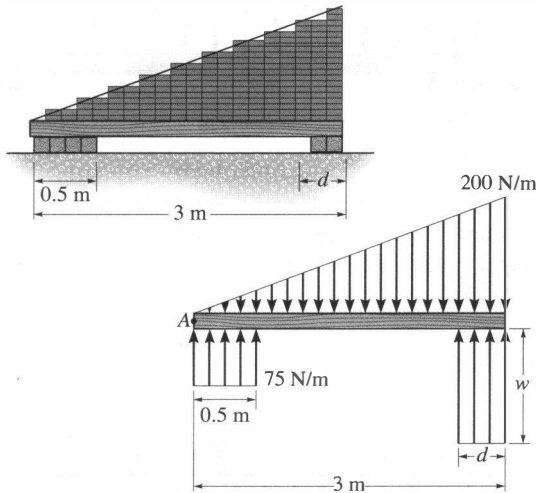
Prob. 4-145

4-146. Reemplace la carga por una fuerza y momento de par equivalentes actuando en el punto O .



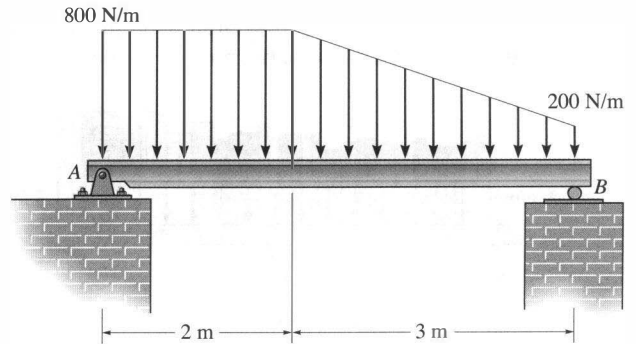
Prob. 4-146

4-147. Los ladrillos sobre la parte superior de la viga y los soportes en la parte inferior producen la carga distribuida mostrada en la segunda figura. Determine la intensidad requerida w y la dimensión d del soporte derecho para que la fuerza y el momento de par resultantes con respecto al punto A del sistema sean ambos cero.



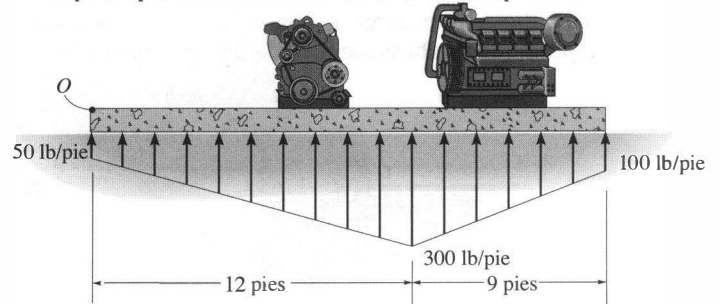
Prob. 4-147

***4-148.** Reemplace la carga distribuida por una fuerza resultante equivalente y especifique su ubicación, medida desde el punto A .



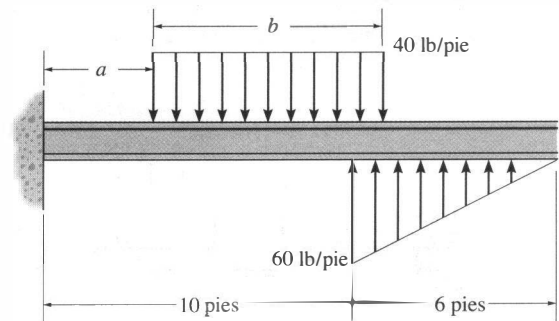
Prob. 4-148

4-149. La distribución de la carga de suelo sobre el fondo de una losa de edificio se muestra en la figura. Reemplace esta carga por una fuerza resultante equivalente y especifique su ubicación, medida desde el punto O .



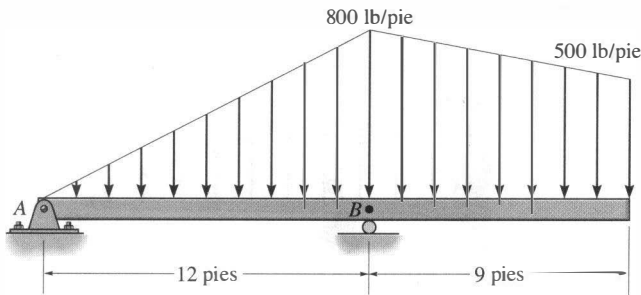
Prob. 4-149

4-150. La viga está sometida a la carga distribuida mostrada. Determine la longitud b de la carga uniforme y su posición a sobre la viga de manera que la fuerza y el momento de par resultantes que actúan sobre la viga sean cero.



Prob. 4-150

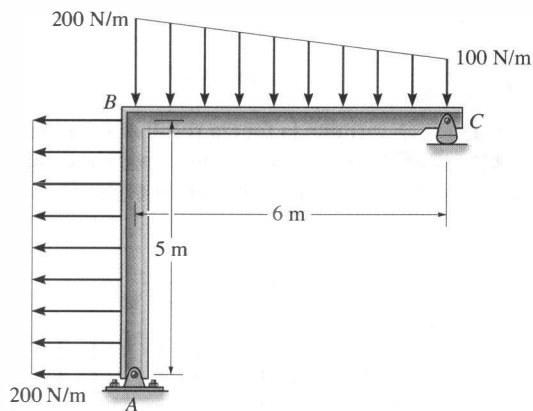
4-151. Reemplace la carga por una fuerza resultante equivalente y especifique su ubicación sobre la viga, medida desde el punto *B*.



Prob. 4-151

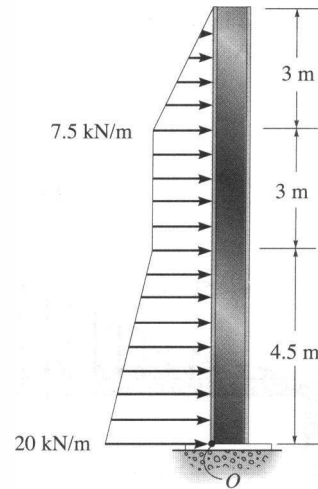
***4-152.** Reemplace la carga distribuida por una fuerza resultante equivalente y especifique dónde interseca su línea de acción al miembro *AB*, medida desde *A*.

4-153. Reemplace la carga distribuida por una fuerza resultante equivalente y especifique dónde interseca su línea de acción al miembro *BC*, medida desde *C*.



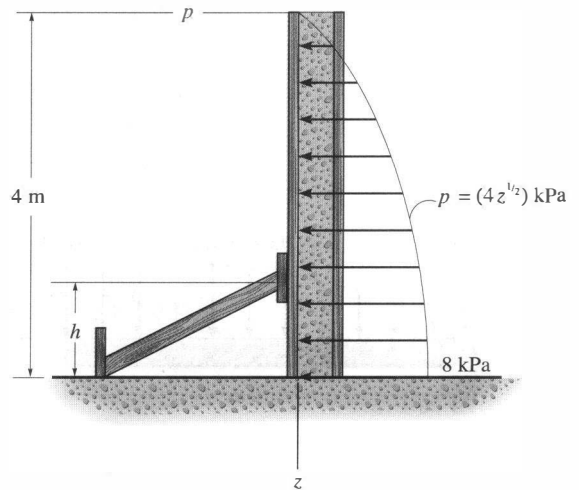
Probs. 4-152/153

4-154. Reemplace la carga por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes actuando en el punto *O*.



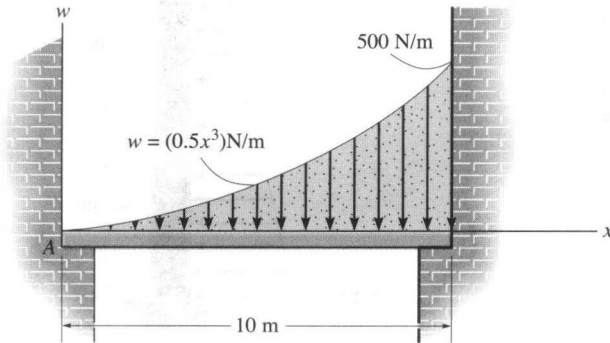
Prob. 4-154

4-155. El concreto húmedo ejerce una presión distribuida a lo largo de la pared de la cimbra. Determine la fuerza resultante de esta distribución, y especifique la altura *h* en que debe colocarse el puntal de soporte lateral para que quede alineado con la línea de acción de la fuerza resultante. La pared tiene un ancho de 5 m.



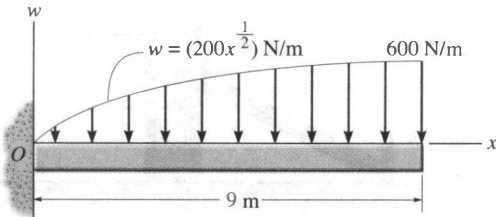
Prob. 4-155

*4-156. El viento ha depositado arena sobre una plataforma de manera que la intensidad de la carga puede ser aproximada por la función $w = (0.5x^3)$ N/m. Simplifique esta carga distribuida a una fuerza resultante equivalente y especifique la magnitud y la ubicación de la fuerza, medida desde A.



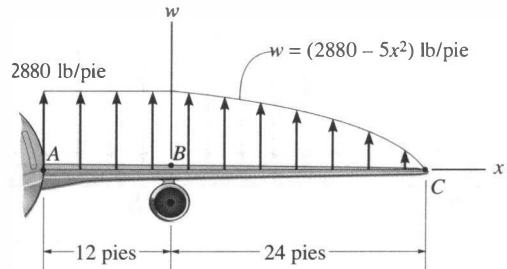
Prob. 4-156

4-157. Reemplace la carga por una fuerza y un momento de par equivalentes actuando en el punto O.



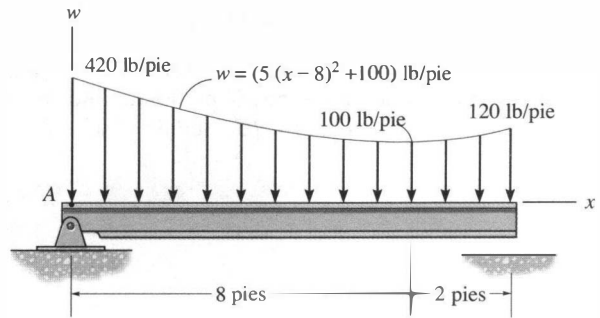
Prob. 4-157

4-158. La fuerza de sustentación a lo largo del ala de un avión a chorro consiste en una distribución uniforme a lo largo de AB, y una distribución semiparabólica a lo largo de BC con origen en B. Reemplace esta carga por una sola fuerza resultante y especifique su ubicación medida desde el punto A.



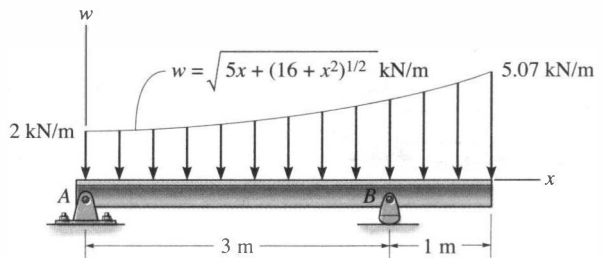
Prob. 4-158

4-159. Determine la magnitud de la fuerza resultante equivalente de la carga distribuida y especifique su ubicación sobre la viga medida desde el punto A.



Prob. 4-159

*4-160. Determine la fuerza resultante equivalente de la carga distribuida y su ubicación, medida desde el punto A. Evalúe las integrales usando la regla de Simpson.



Prob. 4-160

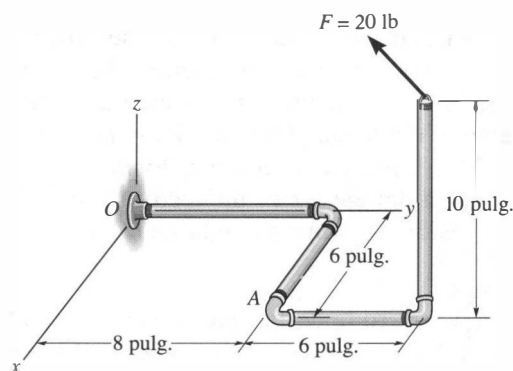
REPASO DEL CAPÍTULO

- Momento de una fuerza.** Una fuerza produce un efecto rotatorio con respecto a un punto O que no se encuentra sobre su línea de acción. En forma escalar, la *magnitud* del momento es $M_O = Fd$, donde d es el brazo de momento o la distancia perpendicular desde el punto O hasta la línea de acción de la fuerza. La *dirección* del momento es definida usando la regla de la mano derecha. En vez de calcular d , normalmente es más fácil resolver la fuerza en sus componentes x y y , determinar el momento de cada componente con respecto al punto, y luego sumar los resultados. Como la geometría tridimensional es generalmente más difícil de visualizar, puede usarse el producto cruz para determinar el momento, $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, donde \mathbf{r} es un vector posición que se extiende desde el punto O hacia cualquier punto sobre la línea de acción de \mathbf{F} .
- Momento con respecto a un eje específico.** Si el momento de una fuerza va a ser determinado con respecto a un eje arbitrario, entonces debe obtenerse la proyección del momento sobre el eje. Si la distancia d_a que es perpendicular tanto a la línea de acción de la fuerza como al eje puede ser determinada, entonces el momento de la fuerza con respecto al eje es simplemente $M_a = Fd_a$. Si esta distancia d_a no puede encontrarse, entonces debe usarse el triple producto vectorial, donde $M_a = \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Aquí \mathbf{u}_a es el vector unitario que especifica la dirección del eje y \mathbf{r} es un vector de posición que está dirigido desde cualquier punto sobre el eje hacia cualquier punto sobre la línea de acción de la fuerza.
- Momento de un par.** Un par consta de dos fuerzas iguales pero opuestas que actúan a una distancia d perpendicular entre ellas. Los pares tienden a producir una rotación sin translación. El momento del par es determinado por $M = Fd$, y su dirección se establece usando la regla de la mano derecha. Si el producto cruz se usa para determinar el momento del par, entonces $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Aquí \mathbf{r} se extiende desde cualquier punto sobre la línea de acción de una de las fuerzas hacia cualquier punto sobre la línea de acción de la fuerza \mathbf{F} usada en el producto cruz.
- Reducción de un sistema de una fuerza y un par.** Cualquier sistema de fuerzas y pares puede ser reducido a una sola fuerza resultante y a un momento de par resultante actuando en un punto. La fuerza resultante es la suma de todas las fuerzas presentes en el sistema, y el momento de par resultante es igual a la suma de todas las fuerzas y momentos de par con respecto al punto. Una simplificación adicional a una sola fuerza resultante es posible siempre que el sistema de fuerzas sea *concurrente, coplanar o paralelo*. Para este caso, encontrar la ubicación de la fuerza resultante desde un punto, es necesario igualar el momento de la fuerza resultante con respecto al punto al momento de las fuerzas y pares presentes en el sistema con respecto al mismo punto. Hacer esto en cualquier otro tipo de sistema de fuerzas daría una *llave*, la cual consta de la fuerza resultante y un momento de par resultante colineal.
- Carga distribuida.** Una carga simple distribuida puede ser reemplazada por una *fuerza resultante*, la cual equivale al *área* bajo la curva de carga. Esta resultante tiene una línea de acción que pasa por el *centroide* o centro geométrico del área o volumen bajo el diagrama de carga.

PROBLEMAS DE REPASO

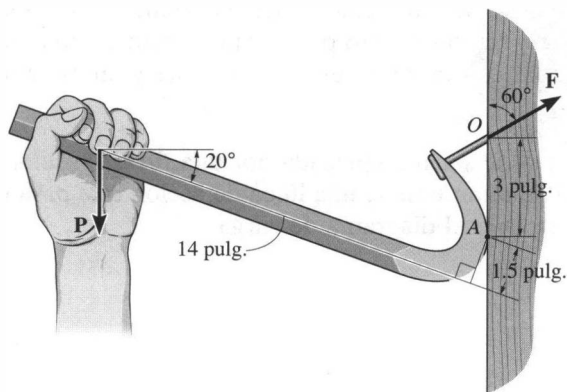
4-161. Determine los ángulos coordenados de dirección α , β , γ de \mathbf{F} , que está aplicada en el extremo A de la tubería, de manera que el momento de \mathbf{F} con respecto a O sea cero.

4-162. Determine el momento de la fuerza \mathbf{F} con respecto al punto O . La fuerza tiene los ángulos coordenados de dirección de $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, y $\gamma = 45^\circ$. Expresé el resultado como un vector cartesiano.



Probs. 4-161/162

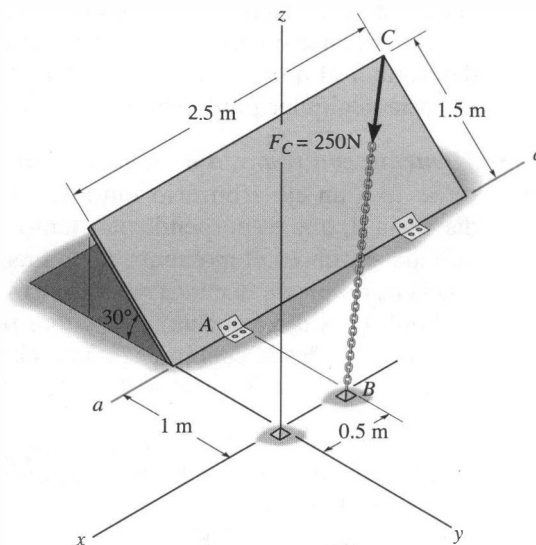
4-163. Si se requiere una fuerza de $F = 125$ lb para extraer el clavo, determine la fuerza vertical mínima \mathbf{P} que debe aplicarse al mango de la palanca. *Sugerencia:* Esto requiere que el momento de \mathbf{F} con respecto al punto A sea igual al momento de \mathbf{P} con respecto a A . ¿Por qué?



Prob. 4-163

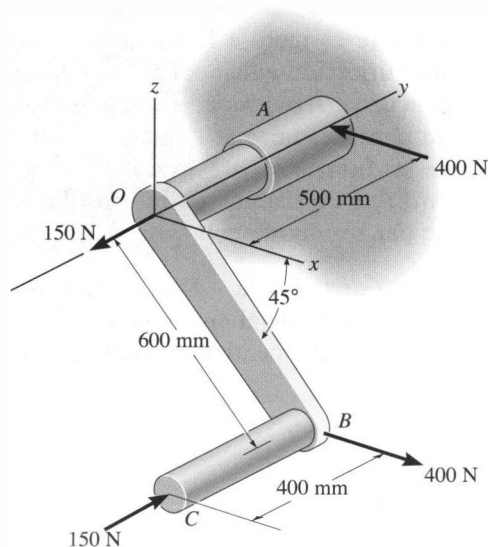
***4-164.** Determine el momento de la fuerza \mathbf{F}_C con respecto a la bisagra en el punto A de la puerta. Expresé el resultado como un vector cartesiano.

4-165. Determine la magnitud del momento de la fuerza \mathbf{F}_C con respecto al eje articulado aa de la puerta.



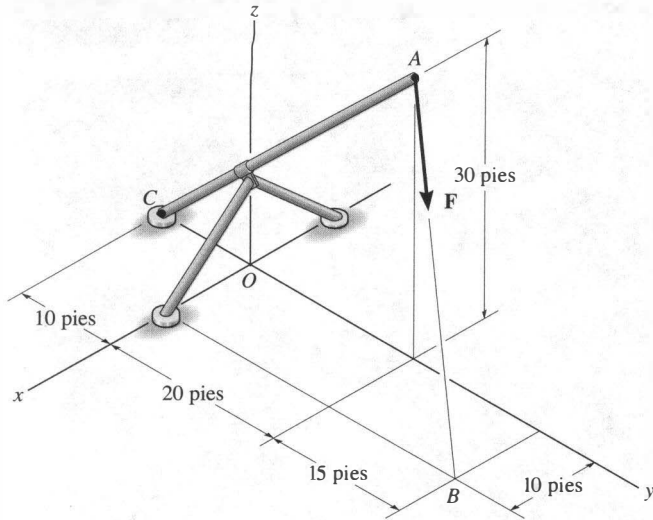
Probs. 4-164/165

4-166. Determine el momento de par resultante de los dos pares que actúan sobre la pieza mostrada. El miembro OB se sitúa en el plano $x-z$.



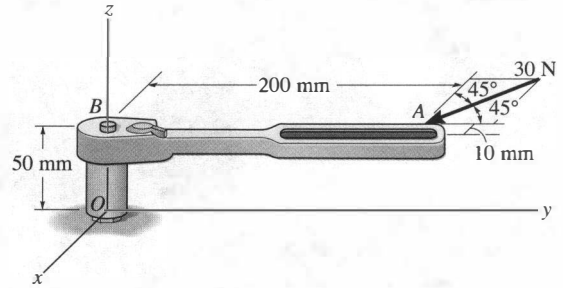
Prob. 4-166

4-167. Reemplace la fuerza \mathbf{F} que tiene una magnitud de $F = 50 \text{ lb}$ y actúa en el punto A por una fuerza y momento de par equivalentes en el punto C .



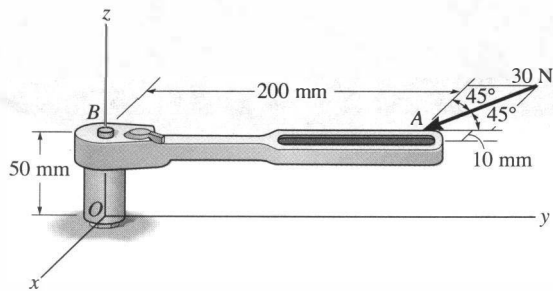
Prob. 4-167

4-169. La fuerza horizontal de 30 N actúa sobre el mango de la llave. Determine el momento de esta fuerza con respecto al punto O . Especifique los ángulos coordenados de dirección α , β , γ del eje de momento.



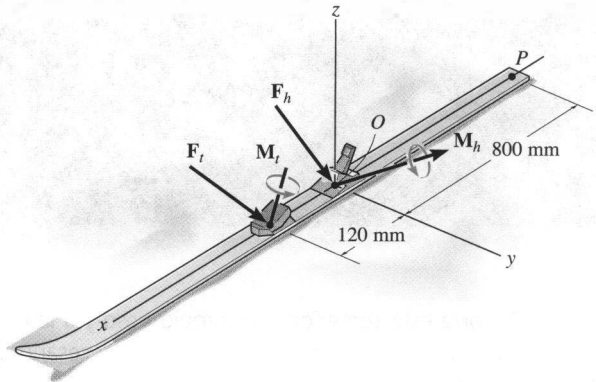
Prob. 4-169

*4-168. La fuerza horizontal de 30 N actúa sobre el mango de la llave. ¿Cuál es la magnitud del momento de esta fuerza con respecto al eje z ?



Prob. 4-168

4-170. Las fuerzas y los momentos de par que son ejercidos sobre las placas de la punta y del talón de un esquí para nieve son $\mathbf{F}_t = \{-50\mathbf{i} + 80\mathbf{j} - 158\mathbf{k}\} \text{ N}$, $\mathbf{M}_t = \{-6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$, y $\mathbf{F}_h = \{-20\mathbf{i} + 60\mathbf{j} - 250\mathbf{k}\} \text{ N}$, $\mathbf{M}_h = \{-20\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$, respectivamente. Reemplace este sistema por una fuerza y un momento de par equivalentes actuando en el punto P . Expresé los resultados en forma vectorial cartesiana.



Prob. 4-170

CAPÍTULO 5

Equilibrio de un cuerpo rígido

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo rígido.
- Presentar el concepto de diagrama de cuerpo libre para un cuerpo rígido.
- Mostrar cómo resolver problemas de equilibrio de cuerpo rígido usando las ecuaciones de equilibrio.

5.1 Condiciones para el equilibrio de un cuerpo rígido

En esta sección desarrollaremos las condiciones necesarias y suficientes que son requeridas para obtener el equilibrio de un cuerpo rígido. Para ello, consideremos el cuerpo rígido que muestra la figura 5-1a, el cual está fijo en la referencia x, y, z y se encuentra en reposo o se mueve con la referencia a velocidad constante. Un diagrama de cuerpo libre de la i -ésima partícula arbitraria del cuerpo se muestra en la figura 5-1b. Hay dos tipos de fuerzas que actúan sobre ella. La *fuerza interna* resultante, \mathbf{f}_i , es causada por interacciones con partículas adyacentes. La *fuerza externa* resultante \mathbf{F}_i representa, por ejemplo, los efectos de fuerzas gravitatorias, eléctricas, magnéticas o de contacto entre la partícula i -ésima y cuerpos adyacentes o partículas *no* incluidas dentro del cuerpo. Si la partícula está en equilibrio, entonces, al aplicar la primera ley de Newton tenemos

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = \mathbf{0}$$

Cuando se aplique la ecuación de equilibrio a cada una de las otras partículas del cuerpo, resultarán ecuaciones similares. Si todas estas ecuaciones se suman *vectorialmente* obtenemos

$$\Sigma \mathbf{F}_i + \Sigma \mathbf{f}_i = \mathbf{0}$$

La suma de las fuerzas internas será igual a cero ya que las fuerzas internas entre partículas dentro del cuerpo ocurrirán en

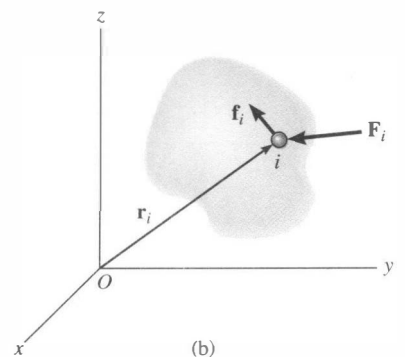
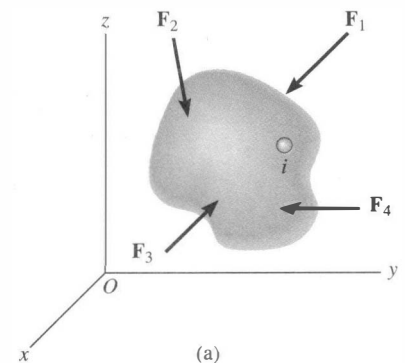


Fig. 5-1

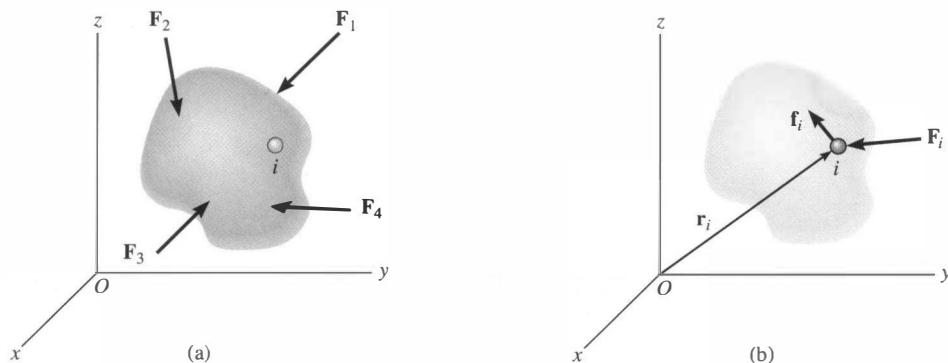


Fig. 5-1

pares colineales iguales pero opuestos, de acuerdo con la tercera ley de Newton. En consecuencia, sólo quedará la suma de las *fuerzas externas* y, por tanto, haciendo $\sum \mathbf{F}_i = \sum \mathbf{F}$, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Consideremos ahora los momentos de las fuerzas que actúan sobre la partícula *i*-ésima con respecto al punto arbitrario *O*, figura 5-1*b*. Usando la anterior ecuación de equilibrio de partícula y la ley distributiva del producto cruz tenemos

$$\mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i = \mathbf{0}$$

Ecuaciones similares pueden ser escritas para las otras partículas del cuerpo, y sumándolas vectorialmente obtenemos

$$\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i = \mathbf{0}$$

El segundo término es cero ya que, como quedó establecido líneas arriba, las fuerzas internas ocurren en parejas colineales iguales pero opuestas, y por tanto, el momento resultante de cada pareja de fuerzas con respecto al punto *O* es cero. Por consiguiente, usando la notación $\sum \mathbf{M}_O = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$, tenemos

$$\sum \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

Por tanto, las dos *ecuaciones de equilibrio* para un cuerpo rígido pueden ser resumidas como sigue:

$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ $\sum \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$

(5-1)

Estas ecuaciones requieren que un cuerpo rígido permanezca en equilibrio siempre que la suma de todas las *fuerzas externas* que actúan sobre el cuerpo sea igual a cero, y la suma de los momentos de las fuerzas externas con respecto a un punto sea igual a cero. El que esas condiciones son *necesarias* para obtener el equilibrio ha sido probado ahora. También son *suficientes* para mantener el equilibrio. Para mostrar esto, supongamos que el cuerpo está en equilibrio, que el sistema de fuerzas que actúa sobre él satisface las ecuaciones 5-1, y que una *fuerza \mathbf{F}' adicional* es aplicada al cuerpo. Como resultado, las ecuaciones de equilibrio se convierten en

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F} + \mathbf{F}' &= \mathbf{0} \\ \Sigma \mathbf{M}_O + \mathbf{M}'_O &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

donde \mathbf{M}'_O es el momento de \mathbf{F}' con respecto a O . Como $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$, requerimos entonces que $\mathbf{F}' = \mathbf{0}$ (también $\mathbf{M}'_O = \mathbf{0}$). En consecuencia, la fuerza adicional \mathbf{F}' no es requerida, y efectivamente las ecuaciones 5-1 son también condiciones suficientes para mantener el equilibrio.


Muchos tipos de problemas de ingeniería implican cargas simétricas y pueden ser resueltos proyectando todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en un solo plano. Por tanto, en la siguiente sección será considerado el equilibrio de un cuerpo sometido a un *sistema coplanar* o *bidimensional de fuerza*. Por lo general, la geometría de tales problemas no es muy compleja, así que una solución escalar es muy adecuada para el análisis. La discusión más general de cuerpos rígidos sometidos a *sistemas tridimensionales de fuerza* será dada en la última parte de este capítulo. Se verá que muchos de esos tipos de problema pueden ser resueltos convenientemente usando análisis vectorial.

Equilibrio en dos dimensiones

5.2 Diagramas de cuerpo libre

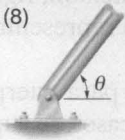
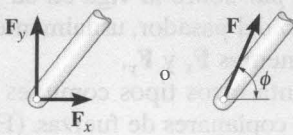

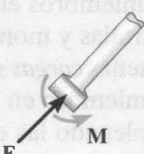

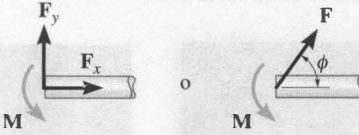
La aplicación exitosa de las ecuaciones de equilibrio requiere de una especificación completa de *todas* las fuerzas externas conocidas y desconocidas que actúan *sobre* un cuerpo. La mejor manera de tomar en cuenta esas fuerzas es trazando el diagrama de cuerpo libre del cuerpo. Este diagrama es un croquis del contorno del cuerpo, que lo representa *aislado* o “libre” de su entorno, esto es, un “cuerpo libre”. Sobre este croquis, es necesario mostrar *todas* las fuerzas y los momentos de par que el entorno ejerce *sobre el cuerpo* de manera que estos efectos puedan ser considerados cuando se apliquen las ecuaciones de equilibrio. Por esta razón, *para resolver problemas en mecánica, es primordial tener un entendimiento pleno de cómo trazar un diagrama de cuerpo libre.*

TABLA 5-1 • Soportes para cuerpos rígidos sometidos a sistemas bidimensionales de fuerza

Tipos de conexión	Reacción	Número de incógnitas
<p>(1)</p>  <p>cable</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza de tensión que actúa alejándose del miembro en la dirección del cable.</p>
<p>(2)</p>  <p>eslabón sin peso</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa a lo largo del eje del eslabón.</p>
<p>(3)</p>  <p>rodillo</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.</p>
<p>(4)</p>  <p>rodillo o pasador confinado en una ranura lisa</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la ranura.</p>
<p>(5)</p>  <p>mecedora</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.</p>
<p>(6)</p>  <p>superficie de contacto lisa</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.</p>
<p>(7)</p>  <p>miembro conectado mediante un pasador a un collar sobre una barra lisa</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la barra.</p>

continúa

TABLA 5-1 • Continuación

Tipos de conexión	Reacción	Número de incógnitas
<p>(8)</p>  <p>pasador o articulación lisa</p>		<p>Dos incógnitas. Las reacciones son dos componentes de fuerza, o la magnitud y la dirección ϕ de la fuerza resultante. Observe que ϕ y θ no son necesariamente iguales [usualmente no, a menos que la barra mostrada sea un eslabón como en (2)].</p>
<p>(9)</p>  <p>miembro con conexión fija a un collar sobre una barra lisa</p>		<p>Dos incógnitas. Las reacciones son el momento de par y la fuerza que actúa perpendicularmente a la barra.</p>
<p>(10)</p>  <p>soporte fijo o empotrado</p>		<p>Tres incógnitas. Las reacciones son el momento de par y las dos componentes de fuerza, o el momento de par y la magnitud y la dirección ϕ de la fuerza resultante.</p>

Reacciones en los soportes. Antes de presentar un procedimiento formal sobre cómo trazar un diagrama de cuerpo libre, primero consideraremos los diversos tipos de reacciones que ocurren en soportes y puntos de soporte entre cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerza. Como regla general, si un soporte previene la traslación de un cuerpo en una dirección dada, entonces una fuerza es desarrollada sobre el cuerpo en esa dirección. Igualmente, si una rotación es prevenida, sobre el cuerpo se ejerce un momento de par.

Por ejemplo, consideremos tres maneras en que un miembro horizontal, como una viga, está soportado en un extremo. Un modo es por medio de un rodillo o cilindro, figura 5-2a. Como este soporte sólo previene que la viga se traslade en dirección vertical, el rodillo puede ejercer una fuerza sobre la viga únicamente en esta dirección, figura 5-2b.

La viga puede ser soportada de un modo más restrictivo usando un pasador como se muestra en la figura 5-3a. El pasador atraviesa un orificio localizado en la viga y en dos placas que están fijas al suelo. Aquí, el pasador puede prevenir la traslación de la viga en cualquier dirección ϕ , figura 5-3b, por lo que debe ejercer una fuerza F sobre la viga en esta dirección. Para fines de análisis, generalmente es más fácil representar esta fuerza resultante F por medio de sus dos componentes F_x y F_y , figura 5-3c. Si F_x y F_y son conocidas, entonces F y ϕ pueden ser calculadas.

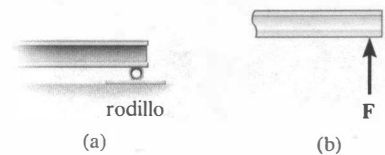


Fig. 5-2

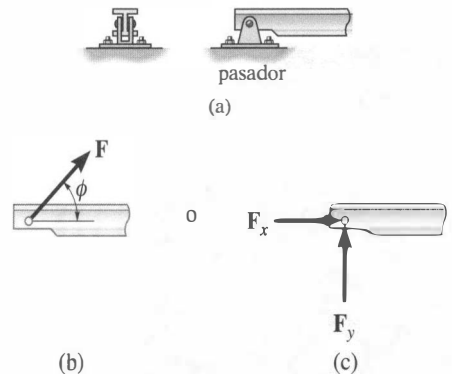


Fig. 5-3

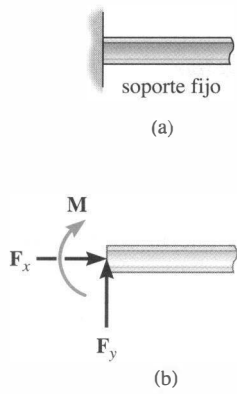
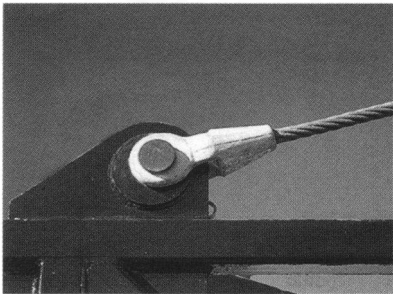


Fig. 5-4

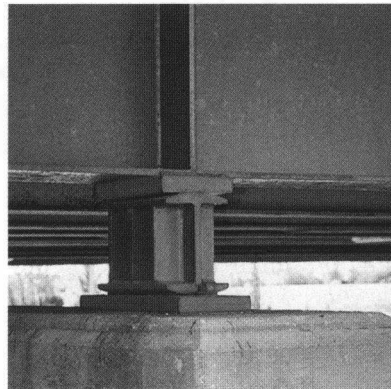
La manera más restrictiva de soportar la viga sería usando un *soporte fijo* como se muestra en la figura 5-4a. Este soporte impedirá la *traslación* y la *rotación* de la viga, y para hacer esto deben desarrollarse una *fuerza* y un *momento de par* sobre la viga en su punto de conexión, figura 5-4b. Como en el caso del pasador, usualmente la fuerza es representada mediante sus componentes F_x y F_y .

La tabla 5-1 presenta otros tipos comunes de soportes para cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerzas. (En todos los casos, se supone que el ángulo θ es conocido). Estudie cuidadosamente cada uno de los símbolos usados para representar esos soportes y los tipos de reacciones que éstos ejercen sobre sus miembros en contacto. Aunque en esta tabla se muestran fuerzas concentradas y momentos de par, en realidad representan las *resultantes* de pequeñas *cargas superficiales distribuidas* que existen entre cada soporte y su miembro en contacto. Son esas *resultantes* las que serán determinadas empleando las ecuaciones de equilibrio.

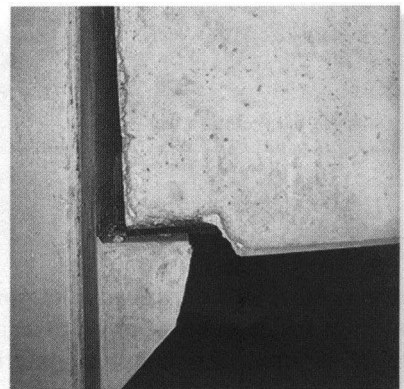
En la siguiente secuencia de fotografías se muestran ejemplos típicos de soportes reales que están referidos en la tabla 5-1.



El cable ejerce una fuerza sobre la cartela en la dirección del cable. (1)



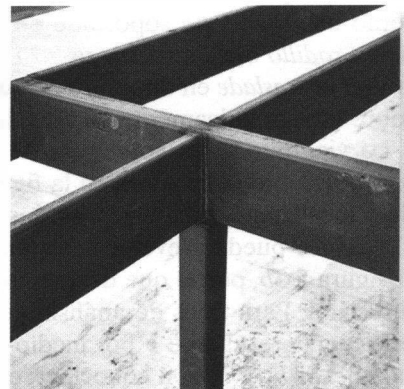
El soporte de mecedora para esta trabe de puente permite el movimiento horizontal de manera que el puente puede dilatarse y contraerse a consecuencia de la temperatura. (5)



Esta trabe de concreto descansa sobre el borde que supuestamente actúa como una superficie lisa de contacto. (6)



Este edificio de servicios está soportado por un pasador en la parte superior de la columna. (8)



Las vigas del piso de este edificio están soldadas entre sí para formar conexiones fijas. (10)

Fuerzas externas e internas. Como un cuerpo rígido es una composición de partículas, pueden actuar sobre él tanto cargas *externas* como *internas*. Sin embargo, es importante advertir que si se traza el diagrama de cuerpo libre para el cuerpo, las fuerzas *internas no se representan* sobre dicho diagrama. Como vimos en la sección 5.1, esas fuerzas siempre se presentan en parejas colineales iguales pero opuestas, y por lo tanto, sus *efectos netos* sobre el cuerpo son cero.

En algunos problemas, un diagrama de cuerpo libre para un “sistema” de cuerpos conectados puede usarse para el análisis. Un ejemplo sería el diagrama de cuerpo libre de un automóvil (sistema), el cual está compuesto por muchas partes. Obviamente, las fuerzas de contacto entre sus partes representan *fuerzas internas* que *no* se incluirían en el diagrama de cuerpo libre del automóvil. Para resumir, las fuerzas internas actúan entre partículas que están contenidas dentro de los límites del diagrama de cuerpo libre. Partículas o cuerpos situados fuera de estos límites ejercen fuerzas externas sobre el sistema, y sólo éstas deben mostrarse sobre el diagrama de cuerpo libre.

Peso y centro de gravedad. Cuando un cuerpo está sometido a un campo gravitatorio, cada una de sus partículas tiene un peso específico. Para todo el cuerpo, es apropiado considerar esas fuerzas gravitatorias como representadas por un *sistema de fuerzas paralelas* actuando sobre todas las partículas contenidas dentro de los límites del cuerpo. En la sección 4.9, se mostró que tal sistema puede ser reducido a una sola fuerza resultante actuando a través de un punto específico. Nos referimos a esta fuerza resultante como al *peso W* del cuerpo, y a la posición de su punto de aplicación como al *centro de gravedad*. Los métodos usados para su cálculo serán desarrollados en el capítulo 9.

En los ejemplos y problemas que siguen, si el peso del cuerpo es importante para el análisis, esta fuerza resultante será indicada en el enunciado del problema. También, cuando el cuerpo es *uniforme* o está hecho de material homogéneo, el centro de gravedad se localizará en el *centro geométrico* o *centroide* del cuerpo; sin embargo, si el cuerpo no es homogéneo o tiene una forma poco común, entonces la ubicación de su centro de gravedad será dada.

Modelos idealizados. Para efectuar un análisis de fuerzas correcto de cualquier objeto, es importante considerar un correspondiente modelo analítico o idealizado que dé resultados que se aproximen tanto como sea posible a la situación real. Para lograr esto, tiene que hacerse una selección cuidadosa de manera que el tipo de soportes, el comportamiento del material y las dimensiones del objeto queden justificados. De esta manera el ingeniero puede tener confianza de que cualquier diseño o análisis dará resultados confiables. En casos complejos, este proceso puede requerir el desarrollo de varios modelos diferentes del objeto a ser analizado, pero en cualquier caso, este proceso de selección requiere habilidad y experiencia.

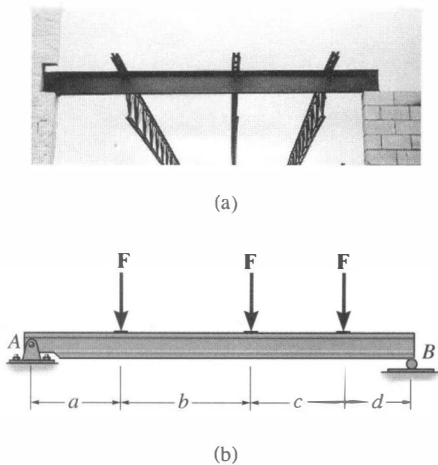


Fig. 5-5

Para ilustrar qué se requiere para desarrollar un modelo apropiado, consideraremos ahora algunos casos. Como se ve en la figura 5-5a, la viga de acero va a ser usada para soportar los largueros del techo de un edificio. En un análisis de fuerza, es razonable suponer que el material es rígido ya que sólo ocurrirán muy pequeñas deflexiones cuando la viga sea cargada. Una conexión con pernos en A permitirá cualquier ligera rotación que ocurra cuando la carga se aplique, por lo que para este soporte puede ser considerado un *pasador*. En B puede considerarse un *rodillo* ya que ahí el soporte no ofrece resistencia al movimiento horizontal. Los requisitos del código de construcción se tienen en cuenta para especificar la carga de techo que resulta en el cálculo de las cargas F de los largueros. Estas fuerzas serán mayores que cualquier carga real sobre la viga ya que toman en cuenta los casos extremos de carga y los efectos dinámicos o de vibración. El peso de la viga generalmente se ignora cuando es pequeño comparado con la carga que la viga soporta. El modelo idealizado de la viga se muestra con dimensiones promedio a , b , c y d en la figura 5-5b.

Como un segundo caso, considere el aguilón de levantamiento en la figura 5-6a. Por inspección, vemos que está soportado mediante un pasador colocado en A y por el cilindro hidráulico BC , el cual puede ser aproximado por un eslabón sin peso. El material se puede suponer rígido, y con su densidad conocida, el peso del aguilón y la ubicación de su centro de gravedad G son determinados. Cuando una carga de diseño P es especificada, el modelo idealizado que muestra la figura 5-6b puede usarse para un análisis de fuerza. Dimensiones promedio (no mostradas) se usan para especificar la ubicación de las cargas y los soportes.

En algunos de los ejemplos presentados en el texto, se darán modelos idealizados de objetos específicos. Sin embargo, debe resultar claro que cada caso representa la reducción de una situación práctica usando hipótesis simplificadoras como la ilustrada aquí.

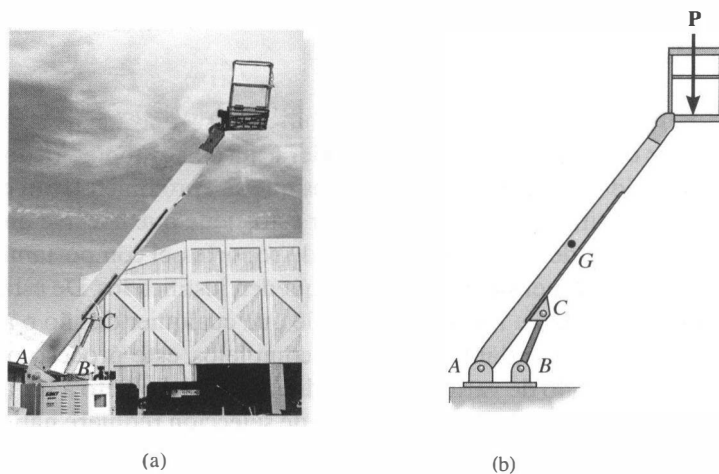


Fig. 5-6

PROCEDIMIENTO PARA TRAZAR UN DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Para construir un diagrama de cuerpo libre para un cuerpo rígido o grupo de cuerpos considerados como un solo sistema, deben llevarse a cabo los siguientes pasos:

Trazar el contorno. Imagine al cuerpo *aislado* o recortado “libre” de sus restricciones y conexiones, y delinee (un croquis) su contorno.

Muestre todas las fuerzas y los momentos de par. Identifique todas las fuerzas externas y los momentos de par que actúan sobre el cuerpo. Las encontradas generalmente son debidas a (1) cargas aplicadas, (2) reacciones que ocurren en los soportes o en puntos de contacto con otros cuerpos (vea la tabla 5-1), y (3) el peso del cuerpo. Para tomar en cuenta todos estos efectos, puede ser de ayuda trazar sobre los límites, señalando cuidadosamente cada fuerza o momento de par que actúa en éstos.

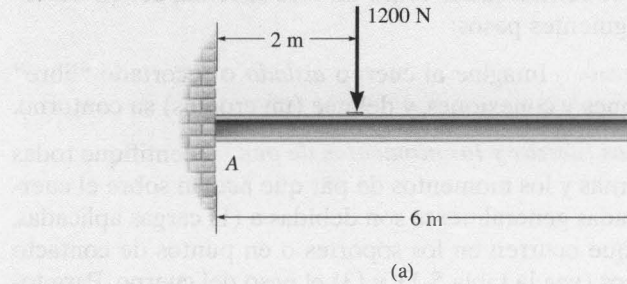
Identifique cada carga y dé las dimensiones. Las fuerzas y los momentos de par que son conocidos deben rotularse con sus propias magnitudes y direcciones. Se usan letras para representar las magnitudes y los ángulos de dirección de fuerzas y momentos de par que sean *desconocidos*. Establezca un sistema coordenado x , y de manera que estas incógnitas, A_x , B_y , etc., puedan ser identificadas. Indique las dimensiones del cuerpo necesarias para calcular los momentos de las fuerzas.

PUNTOS IMPORTANTES

- Ningún problema de equilibrio debe resolverse sin trazar *primero* el diagrama de cuerpo libre, de manera que se tomen en cuenta todas las fuerzas y los momentos de par que actúan sobre el cuerpo.
- Si un soporte *previene la traslación* de un cuerpo en una dirección particular, entonces el soporte ejerce una *fuerza* sobre el cuerpo en esa dirección.
- Si la *rotación es prevenida*, entonces el soporte ejerce un *momento de par* sobre el cuerpo.
- Estudie la tabla 5-1.
- Las fuerzas internas nunca se muestran sobre el diagrama de cuerpo libre ya que se presentan en parejas colineales iguales pero opuestas, y por tanto, se cancelan.
- El peso de un cuerpo es una fuerza externa, y su efecto se muestra como una sola fuerza resultante actuando a través del centro de gravedad G del cuerpo.
- Los *momentos de par* pueden ser colocados en cualquier parte sobre el diagrama de cuerpo libre ya que son *vectores libres*. Las *fuerzas* pueden actuar en cualquier punto a lo largo de sus líneas de acción ya que son *vectores deslizantes*.

EJEMPLO 5.1

Trace el diagrama de cuerpo libre de la viga uniforme mostrada en la figura 5-7a. La viga tiene una masa de 100 kg.



Solución

El diagrama de cuerpo libre de la viga se muestra en la figura 5-7b. Como el soporte en A es una pared fija, hay tres reacciones actuando sobre la viga en A , identificadas como \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y y \mathbf{M}_A , trazadas en dirección arbitraria. Las magnitudes de esos vectores son *desconocidas*, y sus sentidos han sido *supuestos*. El peso de la viga, $W = 100(9.81) = 981$ N, actúa a través del centro de gravedad G de la viga, que está a 3 m de A , ya que la viga es uniforme.

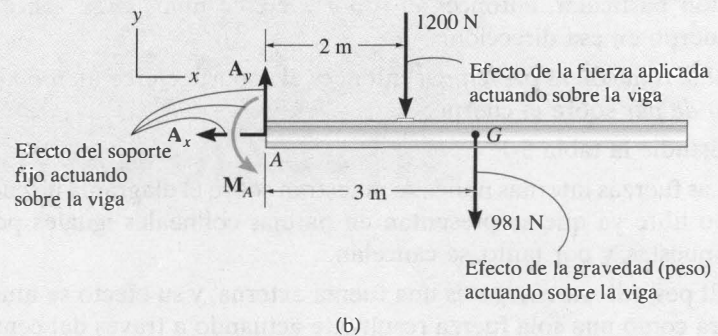
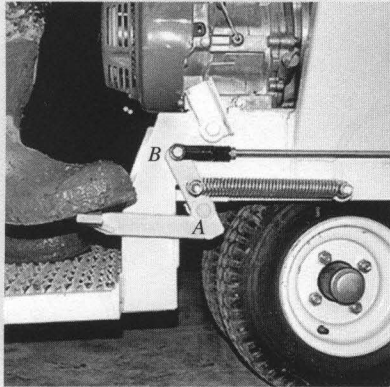


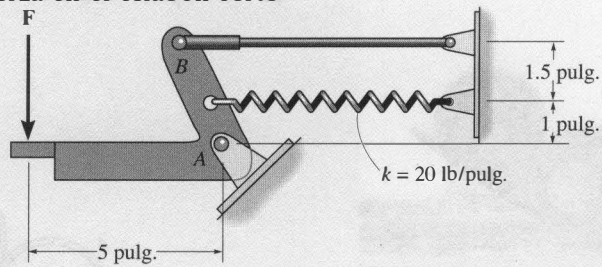
Fig. 5-7

EJEMPLO 5.2

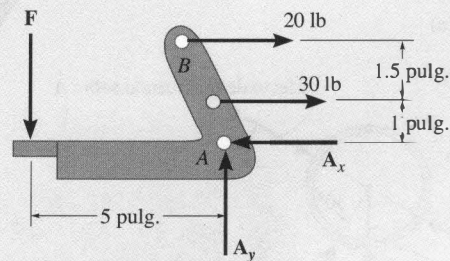
Trace el diagrama de cuerpo libre de la palanca de pie mostrado en la figura 5-8a. El operador aplica una fuerza vertical al pedal de manera que el resorte se estira 1.5 pulg. y la fuerza en el eslabón corto en B es de 20 lb.



(a)



(b)



(c)

Fig. 5-8

Solución

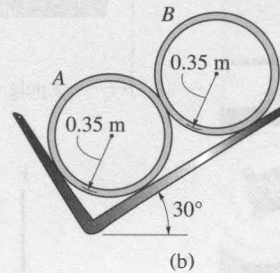
Por inspección, la palanca está unida al bastidor del camión en A por medio de un perno flojo. La barra en B está articulada en sus extremos y actúa como un “eslabón corto”. Después de efectuar las mediciones apropiadas, el modelo idealizado de la palanca se muestra en la figura 5-8b. A partir de aquí debe trazarse el diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 5-8c, el soporte de pasador en A ejerce las componentes de fuerza A_x y A_y sobre la palanca; cada fuerza tiene línea de acción conocida pero magnitud desconocida. El eslabón en B ejerce una fuerza de 20 lb, actuando en la dirección del eslabón. Además el resorte ejerce también una fuerza horizontal sobre la palanca. Si se mide la rigidez y se encuentra que es $k = 20 \text{ lb/pulg}$, entonces, como el alargamiento $s = 1.5 \text{ pulg}$, con la ecuación 3-2, $F_s = ks = 20 \text{ lb/pulg} (1.5 \text{ pulg.}) = 30 \text{ lb}$. Finalmente, el zapato del operador aplica una fuerza vertical de F sobre el pedal. Las dimensiones de la palanca se muestran también sobre el diagrama de cuerpo libre, ya que esta información será de utilidad al calcular los momentos de las fuerzas. Como siempre, los sentidos de las fuerzas desconocidas en A se han supuesto. Los sentidos correctos se obtendrán después de resolver las ecuaciones de equilibrio.

EJEMPLO 5.3

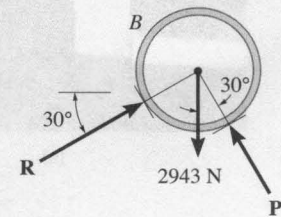


(a)

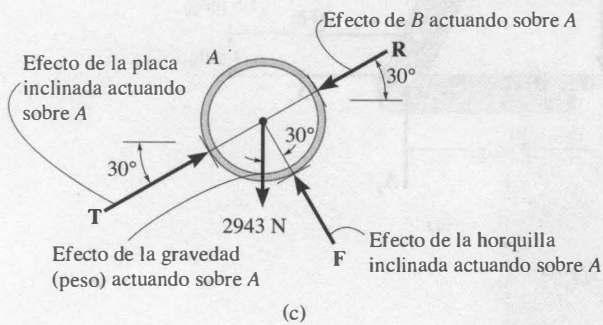
Dos tubos lisos, cada uno con masa de 300 kg, están soportados por la horquilla del tractor en la figura 5-9a. Trace los diagramas de cuerpo libre para cada tubo y para ambos tubos juntos.



(b)



(d)



(c)

Fig. 5-9

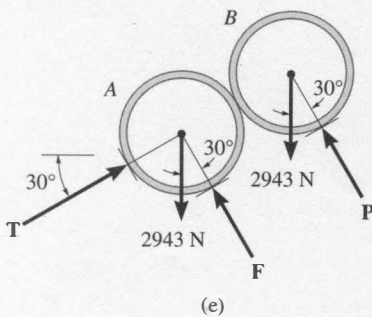
Solución

El modelo idealizado a partir del cual debemos dibujar los diagramas de cuerpo libre se muestra en la figura 5-9b. Aquí los tubos están identificados, las dimensiones han sido agregadas, y la situación física reducida a su forma más simple.

El diagrama de cuerpo libre para el tubo A se muestra en la figura 5-9c. Su peso es $W = 300(9.81) = 2943 \text{ N}$. Suponiendo que todas las superficies de contacto son *lisas*, las fuerzas reactivas **T**, **F**, **R** actúan en una dirección *normal* a la tangente en sus superficies de contacto.

El diagrama de cuerpo libre del tubo B se muestra en la figura 5-9d. ¿Puede usted identificar cada una de las tres fuerzas que actúan sobre este tubo? En particular, observe que **R**, que representa la fuerza de A sobre B, figura 5-9d, es igual y opuesta a **R** que representa la fuerza de B sobre A, figura 5-9c. Esto es una consecuencia de la tercera ley del movimiento de Newton.

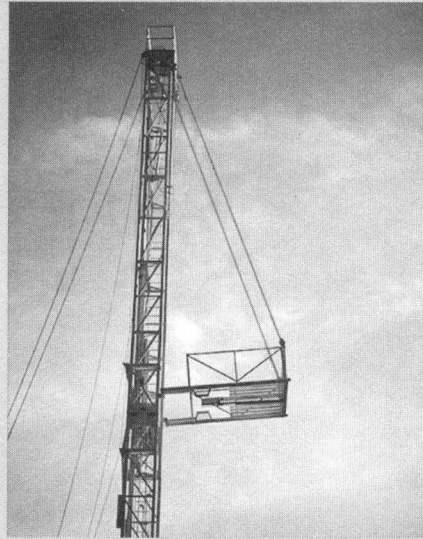
El diagrama de cuerpo libre de ambos tubos combinados (“sistema”) se muestra en la figura 5-9e. Aquí, la fuerza de contacto **R**, que actúa entre A y B, es considerada como una fuerza *interna* y por ello no se muestra en el diagrama de cuerpo libre. Esto es, representa un par de fuerzas colineales iguales pero opuestas que se cancelan entre sí.



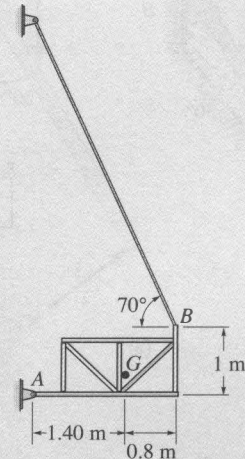
(e)

EJEMPLO 5.4

Trace el diagrama de cuerpo libre de la plataforma descargada que está suspendida del borde de la torre petrolera mostrada en la figura 5-10a. La plataforma tiene una masa de 200 kg.



(a)

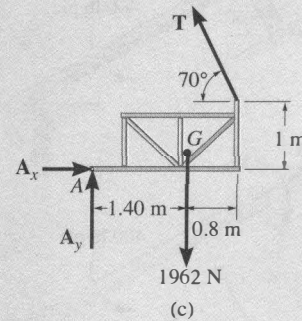


(b)

Fig. 5-10

Solución

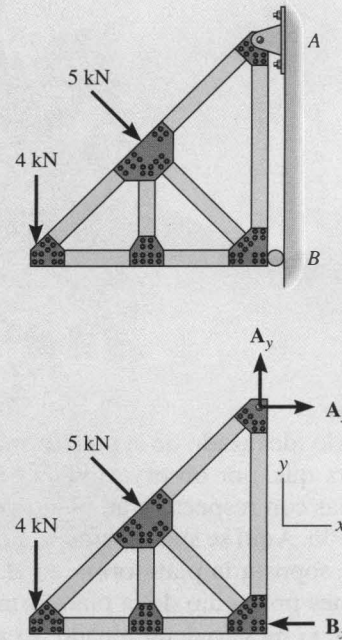
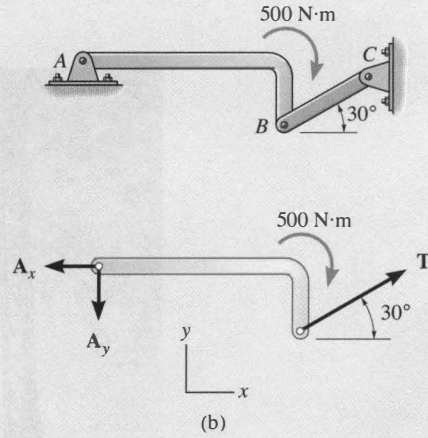
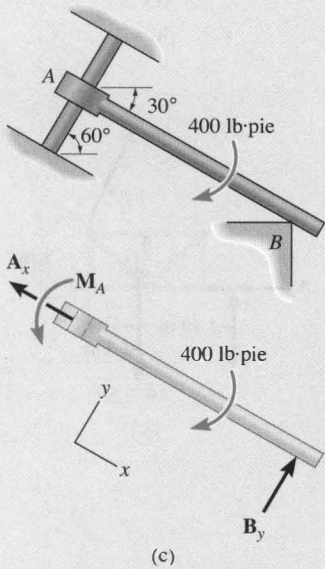
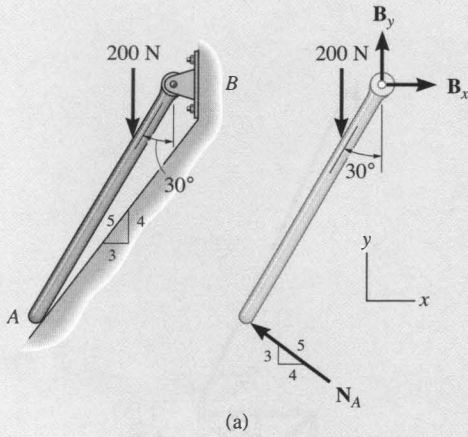
El modelo idealizado de la plataforma será considerado en dos dimensiones ya que, por observación, la carga y las dimensiones son todas simétricas con respecto a un plano vertical que pasa por su centro, figura 5-10b. Aquí se supone que la conexión en A es un pasador y que el cable soporta la plataforma en B . La dirección del cable y las dimensiones promedio de la plataforma están indicadas, y el centro de gravedad G ha sido determinado. Es a partir de este modelo que debemos proceder a dibujar el diagrama de cuerpo libre, el cual se muestra en la figura 5-10c. El peso de la plataforma es de $200(9.81) = 1962 \text{ N}$. Las componentes de fuerza A_x y A_y junto con la fuerza del cable T representan las reacciones que ambos pasadores y ambos cables ejercen sobre la plataforma, figura 5-10a. En consecuencia, la mitad de la magnitud de esas reacciones es desarrollada en A y la mitad es desarrollada en B .



EJEMPLO 5.5

El diagrama de cuerpo libre de cada objeto mostrado en la figura 5-11 está trazado en ésta. Estudie cuidadosamente cada solución e identifique lo que representa cada carga, como se hizo en la figura 5-7b.

Solución

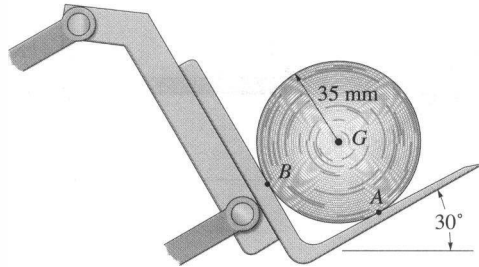


Nota: Las fuerzas internas de un miembro sobre otro son fuerzas colineales iguales pero opuestas que no deben incluirse aquí ya que se cancelan.

Fig. 5-11

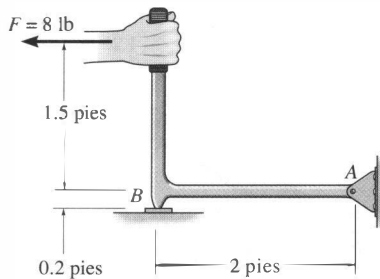
PROBLEMAS

5-1. Trace el diagrama de cuerpo libre del cilindro de papel de 50 kg que tiene su centro de masa en G y descansa sobre la horquilla lisa del transportador de papel. Explique la importancia de cada fuerza que actúa sobre el diagrama. (Vea la figura 5-7b).



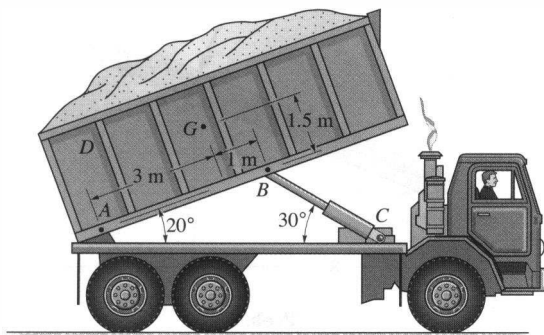
Prob. 5-1

5-2. Trace el diagrama de cuerpo libre de la perforadora manual que está articulada en A y se apoya sobre la superficie lisa en B .



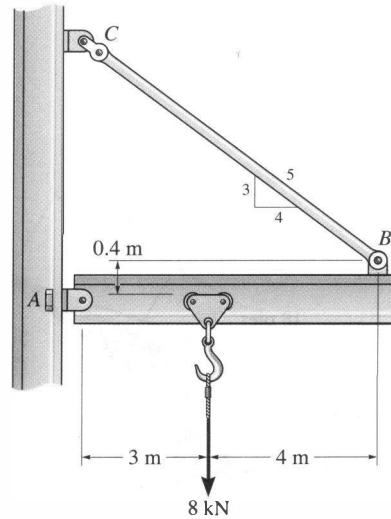
Prob. 5-2

5-3. Trace el diagrama de cuerpo libre de la caja basculante D del camión, la cual tiene un peso de 5000 lb y centro de gravedad en G . La caja está soportada por un pasador en A y un cilindro hidráulico BC conectado mediante un pasador (eslabón corto). Explique en el diagrama la importancia de cada fuerza. (Vea la figura 5-7b).



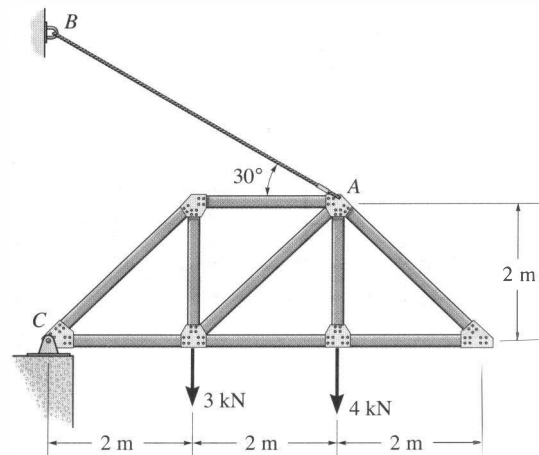
Prob. 5-3

*5-4. Trace el diagrama de cuerpo libre de la grúa AB que está conectada mediante un pasador colocado en A y soportada por el miembro BC (eslabón).



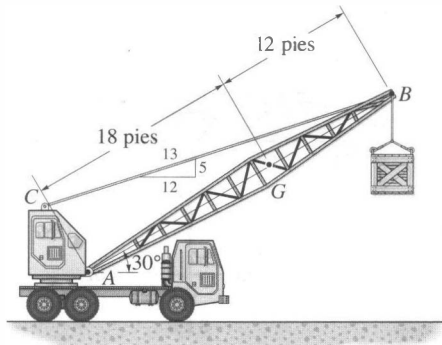
Prob. 5-4

5-5. Trace el diagrama de cuerpo libre de la armadura que está soportada por el cable AB y el pasador C . Explique la importancia de cada fuerza que actúa sobre el diagrama. (Vea la figura 5-7b).



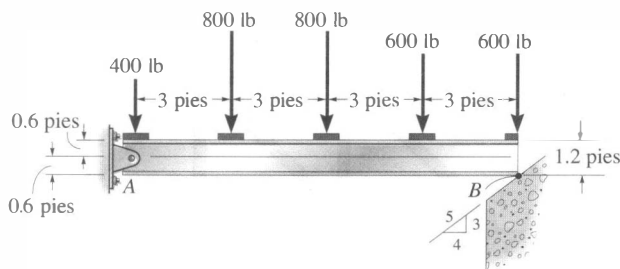
Prob. 5-5

5-6. Trace el diagrama de cuerpo libre de la pluma AB de la grúa, la cual tiene un peso de 650 lb y centro de gravedad en G . La pluma está soportada por un pasador en A y un cable BC . La carga de 1250 lb está suspendida de un cable unido en B . Explique la importancia de cada fuerza que actúa sobre el diagrama. (Vea la figura 5-7b.)



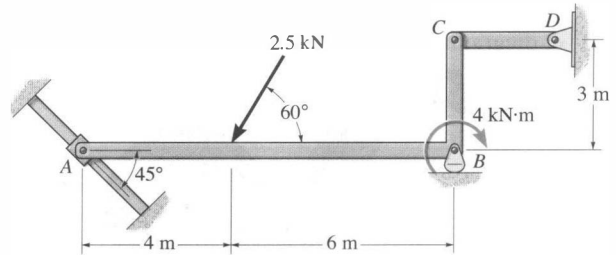
Prob. 5-6

5-7. Trace el diagrama de cuerpo libre de la viga que está soportada por un pasador en A y descansa sobre el plano inclinado liso en B .



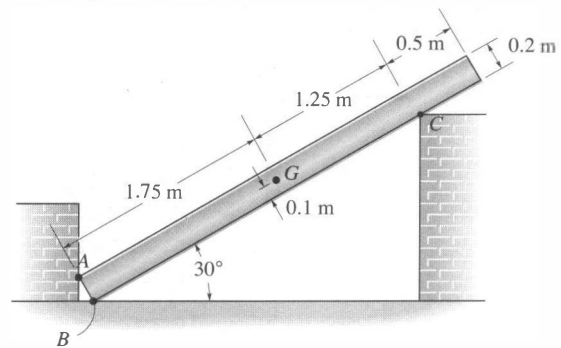
Prob. 5-7

*5-8. Trace el diagrama de cuerpo libre del miembro ABC que está soportado por un collar liso en A , un rodillo en B , y un eslabón corto CD . Explique la importancia de cada fuerza que actúa sobre el diagrama. (Vea la figura 5-7b.)



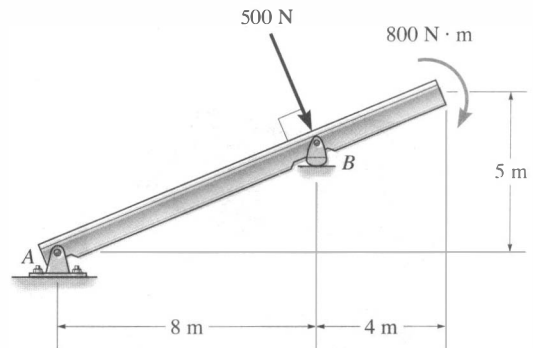
Prob. 5-8

5-9. Trace el diagrama de cuerpo libre de la barra uniforme que tiene una masa de 100 kg y centro de masa en G . Los soportes en A , B y C son lisos.



Prob. 5-9

5-10. Trace el diagrama de cuerpo libre de la viga que está conectada mediante un pasador colocado en A y es soportada por una mecedora en B .



Prob. 5-10

5.3 Ecuaciones de equilibrio

En la sección 5.1 desarrollamos las dos ecuaciones que son necesarias y suficientes para obtener el equilibrio de un cuerpo rígido, esto es, $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$. Cuando el cuerpo está sometido a un sistema de fuerzas, las cuales se encuentran en el plano x - y , las fuerzas pueden ser resueltas en sus componentes x y y . En consecuencia, las condiciones de equilibrio en dos dimensiones son

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_O = 0 \end{cases} \quad (5-2)$$

Aquí, ΣF_x y ΣF_y representan, respectivamente, las sumas algebraicas de las componentes x y y de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, y ΣM_O representa la suma algebraica de los momentos de par y los momentos de todas las componentes de fuerza con respecto a un eje perpendicular al plano x - y y que pasa por el punto arbitrario O , el cual puede encontrarse sobre o fuera del cuerpo.

Conjuntos alternativos de ecuaciones de equilibrio. Aunque las ecuaciones 5-2 son las *más usadas* para resolver problemas coplanares de equilibrio, pueden usarse también dos conjuntos *alternativos* de tres ecuaciones independientes de equilibrio. Uno de tales conjuntos es

$$\begin{cases} \Sigma F_a = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \\ \Sigma M_B = 0 \end{cases} \quad (5-3)$$

Al usar estas ecuaciones se requiere que una línea que pase por los puntos A y B *no sea perpendicular* al eje a . Para probar que las ecuaciones 5-3 proporcionan las *condiciones* de equilibrio, considere el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo delineado arbitrariamente, el cual se muestra en la figura 5-12a. Usando los métodos de la sección 4.8, todas las fuerzas sobre el diagrama de cuerpo libre pueden ser reemplazadas por una fuerza resultante equivalente $\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F}$, actuando en el punto A , y un momento de par resultante $\mathbf{M}_{RA} = \Sigma \mathbf{M}_A$, figura 5-12b. Si $\Sigma M_A = 0$ es satisfecha, es necesario que $\mathbf{M}_{RA} = \mathbf{0}$. Además, para que \mathbf{F}_R satisfaga a $\Sigma F_a = 0$, *no* debe tener *componentes* a lo largo del eje a , y por tanto, su línea de acción debe ser perpendicular al eje a , figura 5-12c. Finalmente, si se requiere que $\Sigma M_B = 0$, donde B no se encuentra sobre la línea de acción de \mathbf{F}_R , entonces $\mathbf{F}_R = \mathbf{0}$. Como $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\Sigma \mathbf{M}_A = \mathbf{0}$, el cuerpo que aparece en la figura 5-12a debe estar en equilibrio.

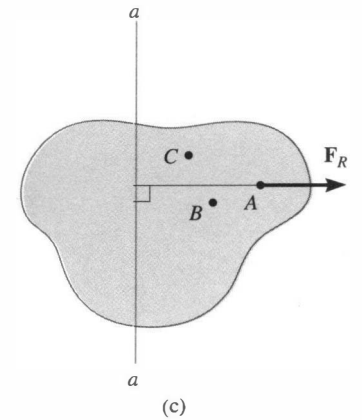
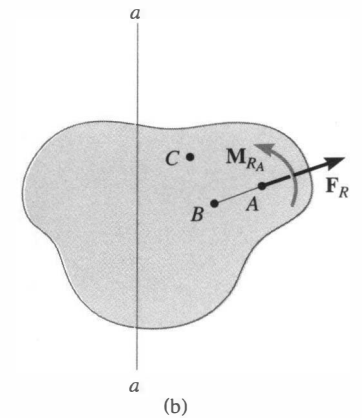
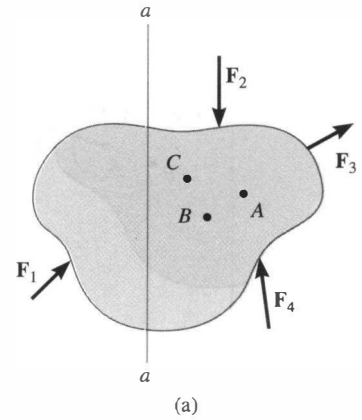


Fig. 5-12

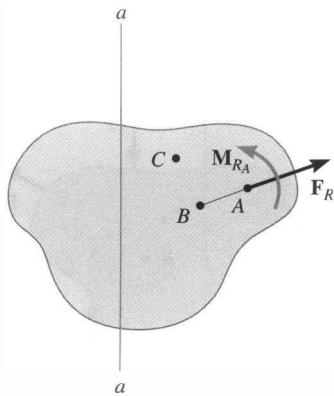


Fig. 5-13

Un segundo conjunto alternativo de ecuaciones de equilibrio es

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= 0 \\ \Sigma M_B &= 0 \\ \Sigma M_C &= 0\end{aligned}\quad (5-4)$$

Aquí es necesario que los puntos A , B y C no se encuentren en la misma línea. Para probar que esas ecuaciones, al ser satisfechas, garantizan el equilibrio, considere el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 5-13. Si $\Sigma M_A = 0$ debe ser satisfecha, entonces $\mathbf{M}_{R_A} = \mathbf{0}$. $\Sigma M_B = 0$ es satisfecha si la línea de acción de \mathbf{F}_R pasa por el punto B como se muestra. Finalmente, si requerimos que $\Sigma M_C = 0$, donde C no se encuentra sobre la línea AB , es necesario que $\mathbf{F}_R = \mathbf{0}$, y el cuerpo que muestra la figura 5-12a debe estar entonces en equilibrio.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Los problemas de equilibrio de fuerzas coplanares para un cuerpo rígido pueden ser resueltos usando el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre.

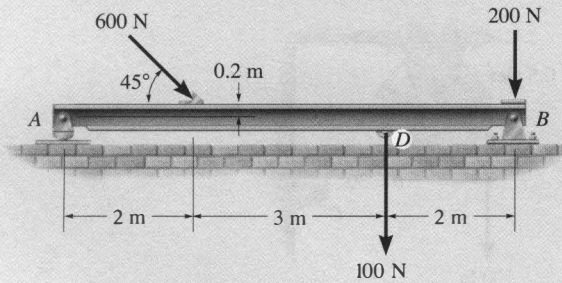
- Establezca los ejes coordenados x, y en cualquier orientación adecuada.
- Trace el contorno del cuerpo.
- Muestre todas las fuerzas y los momentos de par que actúan sobre el cuerpo.
- Rotule todas las cargas y especifique sus direcciones relativas a los ejes x, y . El sentido de una fuerza o momento de par que tenga una magnitud *desconocida*, pero línea de acción conocida, puede ser *supuesto*.
- Indique las dimensiones del cuerpo necesarias para calcular los momentos de las fuerzas.

Ecuaciones de equilibrio.

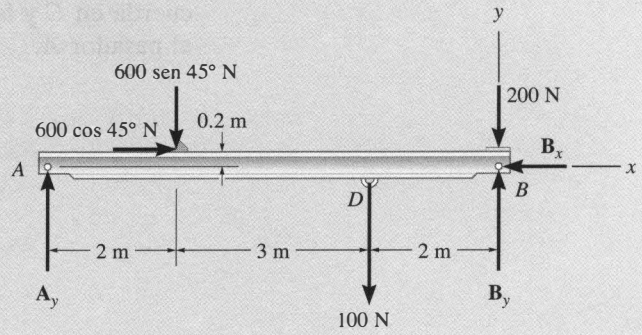
- Aplique la ecuación de equilibrio por momentos, $\Sigma M_O = 0$, con respecto a un punto (O) que se encuentre en la intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas. De este modo, los momentos de esas incógnitas son cero con respecto a O , y una *solución directa* para la tercera incógnita puede ser determinada.
- Al aplicar las ecuaciones de equilibrio mediante fuerzas, $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$, oriente los ejes x y y a lo largo de líneas que proporcionen la resolución más simple de las fuerzas en sus componentes x y y .
- Si la solución de las ecuaciones de equilibrio da un escalar negativo para una magnitud de fuerza o de momento de par, esto indica que el sentido es contrario al que fue supuesto en el diagrama de cuerpo libre.

EJEMPLO 5.6

Determine las componentes horizontal y vertical de reacción en la viga cargada como se muestra en la figura 5-14a. En los cálculos ignore el peso de la viga.



(a)



(b)

Fig. 5-14

Solución

Diagrama de cuerpo libre. ¿Puede usted identificar cada una de las fuerzas mostradas en el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 5-14b? Por sencillez, la fuerza de 600 N está representada mediante sus componentes x y y como se muestra. También, observe que una fuerza de 200 N actúa sobre la viga en B y es independiente de las componentes de fuerza B_x y B_y , las cuales representan el efecto del pasador sobre la viga.

Ecuaciones de equilibrio. Sumando fuerzas en la dirección x obtenemos

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 600 \cos 45^\circ \text{ N} - B_x = 0 \\ B_x = 424 \text{ N} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Una solución directa para A_y se puede obtener aplicando la ecuación de momentos $\Sigma M_B = 0$ con respecto al punto B . Para el cálculo, debe ser evidente que todas las fuerzas de 200 N, B_x y B_y generan un momento cero con respecto a B . Suponiendo que la rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto a B es positiva (en la dirección $+\mathbf{k}$), figura 5-14b, tenemos

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_B = 0; \quad 100 \text{ N}(2 \text{ m}) + (600 \text{ sen } 45^\circ \text{ N})(5 \text{ m}) \\ - (600 \cos 45^\circ \text{ N})(0.2 \text{ m}) - A_y(7 \text{ m}) = 0 \\ A_y = 319 \text{ N} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Sumando fuerzas en la dirección y , y usando este resultado, obtenemos

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 319 \text{ N} - 600 \text{ sen } 45^\circ \text{ N} - 100 \text{ N} - 200 \text{ N} + B_y = 0 \\ B_y = 405 \text{ N} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Podemos verificar este resultado sumando momentos con respecto al punto A .

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad -(600 \text{ sen } 45^\circ \text{ N})(2 \text{ m}) - (600 \cos 45^\circ \text{ N})(0.2 \text{ m}) \\ -(100 \text{ N})(5 \text{ m}) - (200 \text{ N})(7 \text{ m}) + B_y(7 \text{ m}) = 0 \\ B_y = 405 \text{ N} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.7

La cuerda mostrada en la figura 5-15a soporta una fuerza de 100 lb y se enrolla sobre la polea sin fricción. Determine la tensión en la cuerda en C y las componentes horizontal y vertical de reacción en el pasador A.

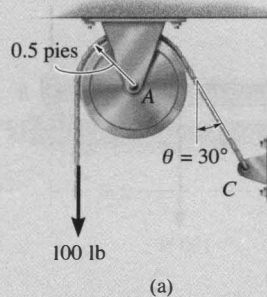
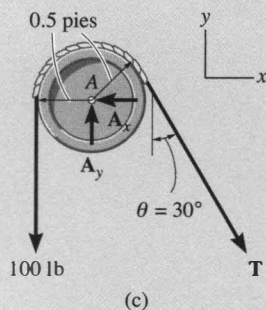
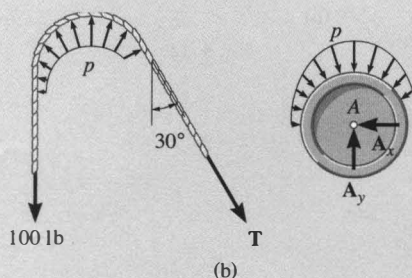


Fig. 5-15



Solución

Diagramas de cuerpo libre. Los diagramas de cuerpo libre de la cuerda y la pulea se muestran en la figura 5-15b. Advierta que el principio de acción igual pero reacción opuesta debe ser cuidadosamente observado al trazar cada uno de esos diagramas: la cuerda ejerce una distribución de carga desconocida p a lo largo de parte de la superficie de la pulea, mientras que la pulea ejerce un efecto igual pero opuesto sobre la cuerda. Sin embargo, para encontrar la solución resulta más sencillo *combinar* los diagramas de cuerpo libre de la pulea y la porción en contacto de la cuerda, de manera que la carga distribuida se vuelva *interna* al sistema y sea, por tanto, eliminada del análisis, figura 5-15c.

Ecuaciones de equilibrio. Sumando momentos con respecto al punto A para eliminar A_x y A_y , figura 5-15c, tenemos

$$\downarrow + \sum M_A = 0; \quad 100 \text{ lb}(0.5 \text{ pies}) - T(0.5 \text{ pies}) = 0$$

$$T = 100 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

Se ve que la tensión permanece *constante* al pasar la cuerda sobre la pulea. (Esto es, por supuesto, cierto para *cualquier ángulo* θ con que esté dirigida la cuerda y para *cualquier radio* r de la pulea). Usando el resultado para T , se aplica una suma de fuerzas para determinar las componentes de reacción en el pasador A.

$$\rightarrow + \sum F_x = 0; \quad -A_x + 100 \text{ sen } 30^\circ \text{ lb} = 0$$

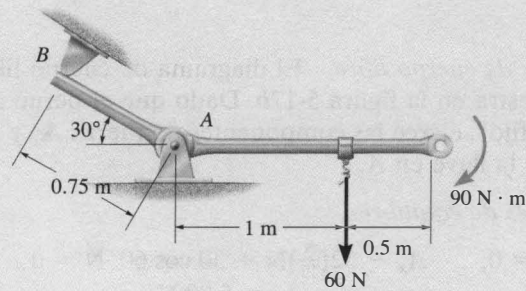
$$A_x = 50.0 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad A_y - 100 \text{ lb} - 100 \text{ cos } 30^\circ \text{ lb} = 0$$

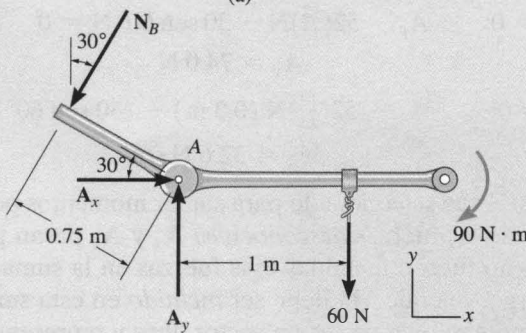
$$A_y = 187 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 5.8

El eslabón mostrado en la figura 5-16a está articulado en A y descansa contra un soporte liso ubicado en B . Calcule las componentes horizontal y vertical de reacción en el pasador A .



(a)



(b)

Fig. 5-16

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 5-16b, la reacción N_B es perpendicular al eslabón en B . También, las componentes horizontal y vertical de reacción están representadas en A .

Ecuaciones de equilibrio. Sumando momentos con respecto a A , obtenemos una solución directa para N_B ,

$$\begin{aligned} \zeta + \sum M_A = 0; \quad & -90 \text{ N} \cdot \text{m} - 60 \text{ N}(1 \text{ m}) + N_B(0.75 \text{ m}) = 0 \\ & N_B = 200 \text{ N} \end{aligned}$$

Usando este resultado,

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x = 0; \quad & A_x - 200 \text{ N} \sin 30^\circ = 0 \\ & A_x = 100 \text{ N} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y = 0; \quad & A_y - 200 \text{ N} \cos 30^\circ - 60 \text{ N} = 0 \\ & A_y = 233 \text{ N} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.9

La llave mostrada en la figura 5-17a se usa para apretar el perno ubicado en A . Si la llave no gira cuando se aplica la carga al mango, determine la torca o el momento aplicado al perno y la fuerza de la llave sobre el perno.

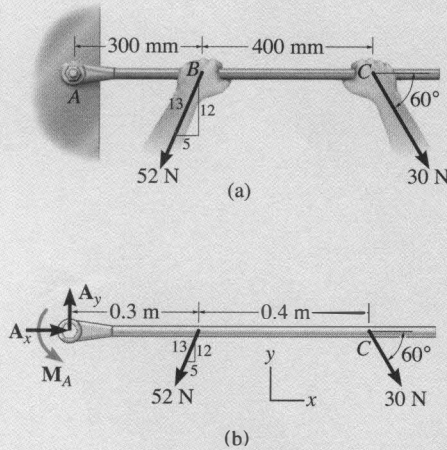


Fig. 5-17

Solución

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre para la llave se muestra en la figura 5-17b. Dado que el perno actúa como un “soporte fijo”, ejerce las componentes de fuerza A_x y A_y y una torca M_A sobre la llave en A .

Ecuaciones de equilibrio.

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x - 52\left(\frac{5}{13}\right)\text{N} + 30 \cos 60^\circ \text{N} &= 0 \\ A_x &= 5.00 \text{ N} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 52\left(\frac{12}{13}\right)\text{N} - 30 \sin 60^\circ \text{N} &= 0 \\ A_y &= 74.0 \text{ N} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowleft \Sigma M_A = 0; \quad M_A - 52\left(\frac{12}{13}\right)\text{N}(0.3 \text{ m}) - (30 \sin 60^\circ \text{N})(0.7 \text{ m}) &= 0 \\ M_A &= 32.6 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

El punto A fue seleccionado para sumar momentos porque las líneas de acción de las fuerzas desconocidas A_x y A_y pasan por este punto, y por ello no fueron incluidas esas fuerzas en la suma de momentos. Sin embargo, vea que M_A debe ser *incluido* en esta suma de momentos. Este momento de par es un vector libre y representa la resistencia del perno a girar sobre la llave. Por la tercera ley de Newton, la llave ejerce un momento o torca igual pero opuesto sobre el perno. Además, la fuerza resultante sobre la llave es

$$F_A = \sqrt{(5.00)^2 + (74.0)^2} = 74.1 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

Debido a que las componentes de fuerza A_x y A_y fueron calculadas como cantidades positivas, su sentido direccional se muestra correctamente sobre el diagrama de cuerpo libre en la figura 5-17b. Por tanto

$$\theta = \tan^{-1} \frac{74.0 \text{ N}}{5.00 \text{ N}} = 86.1^\circ \curvearrowright$$

Vea que F_A actúa en la dirección opuesta sobre el perno. ¿Por qué?

Aunque sólo *tres* ecuaciones independientes de equilibrio pueden escribirse para un cuerpo rígido, es un buen hábito *revisar* los cálculos usando una cuarta ecuación de equilibrio. Por ejemplo, los cálculos anteriores pueden ser verificados en parte sumando momentos con respecto al punto C :

$$\begin{aligned} \curvearrowleft \Sigma M_C = 0; \quad 52\left(\frac{12}{13}\right)\text{N}(0.4 \text{ m}) + 32.6 \text{ N} \cdot \text{m} - 74.0 \text{ N}(0.7 \text{ m}) &= 0 \\ 19.2 \text{ N} \cdot \text{m} + 32.6 \text{ N} \cdot \text{m} - 51.8 \text{ N} \cdot \text{m} &= 0 \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.10

El vaciado del concreto desde el camión se logra usando el ducto mostrado en las fotografías, figura 5-18a. Determine la fuerza que el cilindro hidráulico y el bastidor del camión ejercen sobre el ducto para mantenerlo en la posición mostrada. El ducto y el concreto húmedo contenido a lo largo de su longitud tienen un peso uniforme de 35 lb/pie.

Solución

El modelo idealizado del ducto se muestra en la figura 5-18b. Aquí las dimensiones están dadas, y se supone que el ducto está conectado al bastidor mediante un pasador ubicado en A y que el cilindro hidráulico BC actúa como un eslabón corto.

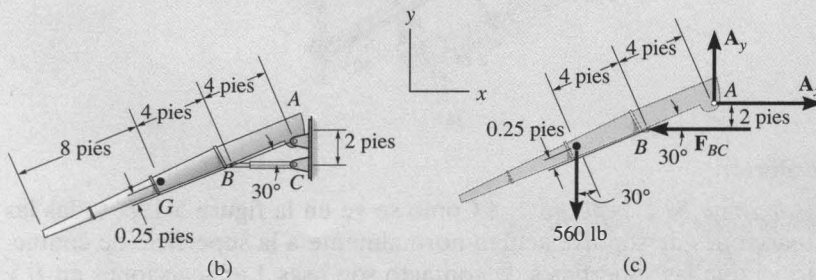


Fig. 5-18

Diagrama de cuerpo libre. Como el ducto tiene longitud de 16 pies, el peso total soportado es de $(35 \text{ lb/pie})(16 \text{ pies}) = 560 \text{ lb}$, lo cual se supone está actuando en su punto medio, G . El cilindro hidráulico ejerce una fuerza horizontal F_{BC} sobre el ducto, figura 5-18c.

Ecuaciones de equilibrio. Es posible encontrar una solución directa para F_{BC} sumando momentos con respecto al pasador ubicado en A . Para hacer esto usaremos el principio de momentos y resolveremos el peso en componentes paralela y perpendicular al ducto. Tenemos,

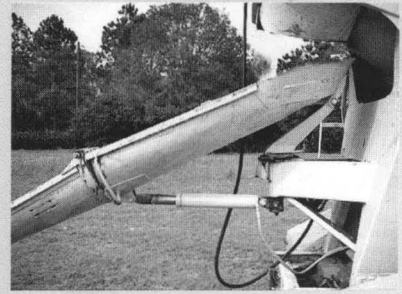
$$\begin{aligned} \curvearrowleft + \Sigma M_A &= 0; \\ -F_{BC}(2 \text{ pies}) + 560 \cos 30^\circ \text{ lb}(8 \text{ pies}) + 560 \sin 30^\circ \text{ lb}(0.25 \text{ pies}) &= 0 \\ F_{BC} &= 1975 \text{ lb} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Al sumar fuerzas para obtener A_x y A_y resulta

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; \quad -A_x + 1975 \text{ lb} = 0 \\ A_x &= 1975 \text{ lb} \quad \text{Resp.} \\ + \uparrow \Sigma F_y &= 0; \quad A_y - 560 \text{ lb} = 0 \\ A_y &= 560 \text{ lb} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Para verificar esta solución podemos sumar momentos con respecto al punto B .

$$\begin{aligned} \curvearrowleft + \Sigma M_B &= 0; \quad -1975 \text{ lb}(2 \text{ pies}) + 560 \text{ lb}(4 \cos 30^\circ \text{ pies}) + \\ &560 \cos 30^\circ \text{ lb}(4 \text{ pies}) + 560 \sin 30^\circ \text{ lb}(0.25 \text{ pies}) = 0 \end{aligned}$$



(a)

EJEMPLO 5.11

La barra uniforme lisa mostrada en la figura 5-19a está sometida a una fuerza y a un momento de par. Si la barra está soportada en A por una pared lisa, y en B y C por rodillos colocados en la parte superior o inferior, determine las reacciones en esos soportes. Ignore el peso de la barra.

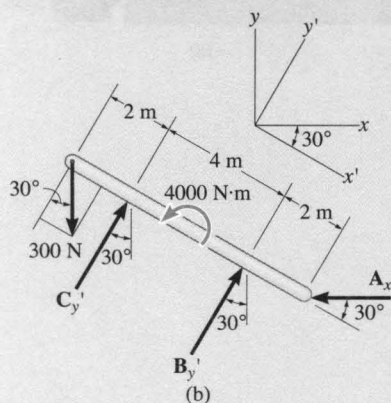
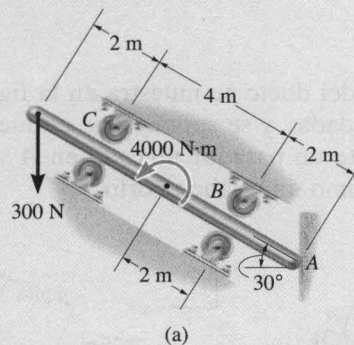


Fig. 5-19

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Como se ve en la figura 5-19b, todas las reacciones de soporte actúan normalmente a la superficie de contacto ya que las superficies de contacto son lisas. Las reacciones en B y C se muestran actuando en la dirección y' positiva. Esto hace suponer que únicamente los rodillos ubicados al fondo de la barra son usados para soporte.

Ecuaciones de equilibrio. Usando el sistema coordenado x, y que se muestra en la figura 5-19b, tenemos

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad C_{y'} \sin 30^\circ + B_{y'} \sin 30^\circ - A_x = 0 \quad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -300 \text{ N} + C_{y'} \cos 30^\circ + B_{y'} \cos 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad -B_{y'}(2 \text{ m}) + 4000 \text{ N} \cdot \text{m} - C_{y'}(6 \text{ m}) + (300 \cos 30^\circ \text{ N})(8 \text{ m}) = 0 \quad (3)$$

Al escribir la ecuación de momentos, debe advertirse que la línea de acción de la componente de fuerza $300 \cos 30^\circ \text{ N}$ pasa por el punto A , y por tanto, esta fuerza no está incluida en la ecuación de momentos.

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones 2 y 3 obtenemos

$$B_{y'} = -1000.0 \text{ N} = -1 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$C_{y'} = 1346.4 \text{ N} = 1.35 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Como $B_{y'}$ es un escalar negativo, el sentido de $B_{y'}$ es opuesto al mostrado en el diagrama de cuerpo libre en la figura 5-19b. Por tanto, el rodillo superior localizado en B sirve como soporte en vez del inferior. Reteniendo el signo negativo para $B_{y'}$ (¿Por qué?) y sustituyendo los resultados en la ecuación 1, obtenemos

$$1346.4 \sin 30^\circ \text{ N} - 1000.0 \sin 30^\circ \text{ N} - A_x = 0$$

$$A_x = 173 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 5.12

La rampa uniforme del camión mostrada en la figura 5-20a pesa 400 lb, está articulada al bastidor del camión en cada extremo, y es mantenida en la posición mostrada mediante los dos cables laterales. Determine la tensión existente en los cables.

Solución

El modelo idealizado de la rampa, que indica todas las dimensiones y soportes necesarios, se muestra en la figura 5-20b. Aquí el centro de gravedad está localizado en el punto medio ya que la rampa es aproximadamente uniforme.

Diagrama de cuerpo libre. A partir del modelo idealizado, el diagrama de cuerpo libre de la rampa se muestra en la figura 5-20c.

Ecuaciones de equilibrio. Sumando momentos con respecto al punto A se tendrá una solución directa para la tensión en el cable. Aplicando el principio de momentos, hay varias maneras de determinar el momento de T con respecto a A. Si usamos las componentes x y y, con T aplicada en B, tenemos

$$\begin{aligned} \downarrow + \sum M_A = 0; \quad & -T \cos 20^\circ (7 \text{ sen } 30^\circ \text{ pies}) + T \text{ sen } 20^\circ \\ & (7 \text{ cos } 30^\circ \text{ pies} + 400 \text{ lb}(5 \text{ cos } 30^\circ \text{ pies})) = 0 \\ & T = 1425 \text{ lb} \end{aligned}$$

Por el principio de transmisibilidad, podemos localizar T en C, aun cuando este punto no está sobre la rampa, figura 5-20c. En este caso, la componente horizontal de T no genera un momento con respecto a A. Primero tenemos que determinar d usando la ley de los senos.

$$\begin{aligned} \frac{d}{\text{sen } 10^\circ} &= \frac{7 \text{ ft}}{\text{sen } 20^\circ}; \quad d = 3.554 \text{ pies} \\ \downarrow + \sum M_A = 0; \quad & -T \text{ sen } 20^\circ (3.554 \text{ pies}) + 400 \text{ lb} \\ & (5 \text{ cos } 30^\circ \text{ pies}) = 0 \\ & T = 1425 \text{ lb} \end{aligned}$$

La manera más simple de calcular el momento de T con respecto a A es resolverla en componentes paralela y perpendicular a la rampa en B. Entonces el momento de la componente paralela es cero con respecto a A, por lo que

$$\begin{aligned} \downarrow + \sum M_A = 0; \quad & -T \text{ sen } 10^\circ (7 \text{ pies}) + 400 \text{ lb}(5 \text{ cos } 30^\circ \text{ pies}) = 0 \\ & T = 1425 \text{ lb} \end{aligned}$$

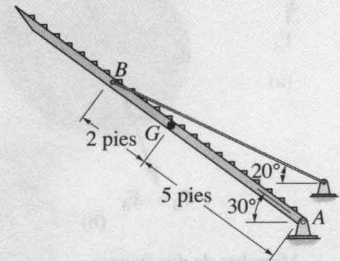
Como se tienen dos cables soportando la rampa,

$$T' = \frac{T}{2} = 712 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

Como ejercicio, demuestre que $A_x = 1339 \text{ lb}$ y $A_y = 887.4 \text{ lb}$.



(a)



(b)

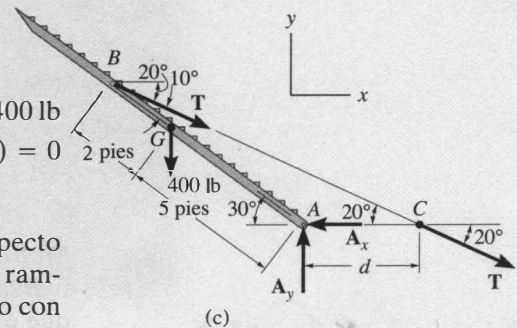
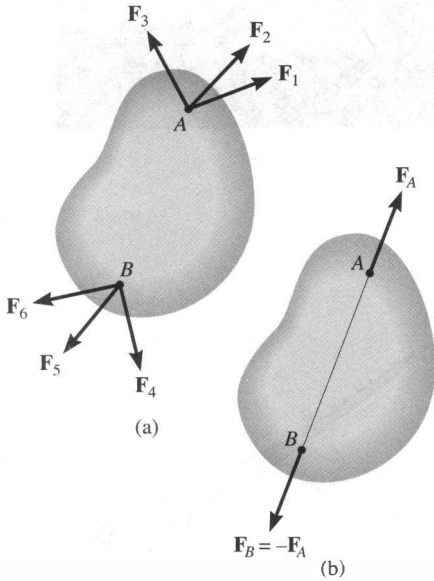


Fig. 5-20

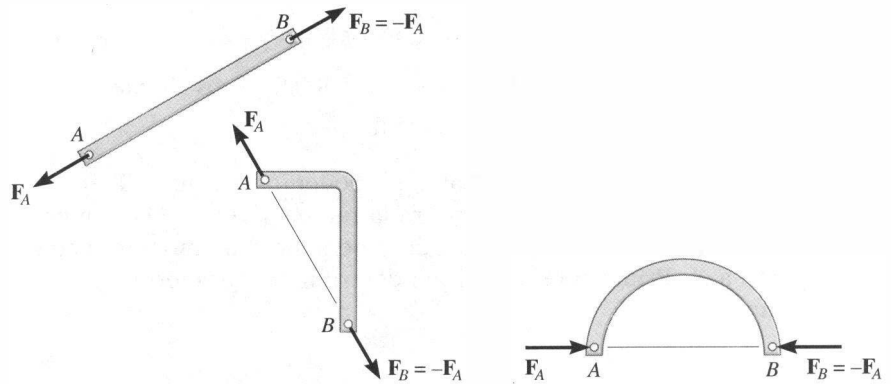
5.4 Miembros de dos y tres fuerzas

La solución de algunos problemas de equilibrio puede ser simplificada cuando es posible reconocer los miembros que están sometidos a sólo dos o tres fuerzas.

Miembros de dos fuerzas. Cuando un miembro *no* está sometido a *momentos de par* y se aplican fuerzas en sólo dos puntos sobre el miembro, éste es denominado *miembro de dos fuerzas*. Un ejemplo se muestra en la figura 5-21a. Las fuerzas en *A* y *B* son sumadas para obtener sus respectivas *resultantes* \mathbf{F}_A y \mathbf{F}_B , figura 5-21b. Esas dos fuerzas mantendrán un *equilibrio traslacional o de fuerzas* ($\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$) si \mathbf{F}_A es de magnitud igual y dirección opuesta a \mathbf{F}_B . Además, el *equilibrio rotatorio o por momentos* ($\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$) es satisfecho si \mathbf{F}_A es *colineal* con \mathbf{F}_B . Como resultado, la línea de acción de ambas fuerzas es conocida ya que siempre pasa por *A* y *B*. Por consiguiente, sólo debe ser determinada o establecida la magnitud de la fuerza. Otros ejemplos de miembros de dos fuerzas mantenidas en equilibrio se muestran en la figura 5-22.



Miembro de dos fuerzas
Fig. 5-21



Miembro de dos fuerzas

Fig. 5-22

Miembros de tres fuerzas. Si un miembro está sometido a sólo tres fuerzas, es necesario que las fuerzas sean *concurrentes* o *paralelas* para que el miembro esté en equilibrio. Para mostrar el requisito de concurrencia, considere el cuerpo delineado en la figura 5-23a y suponga que dos de las tres fuerzas que actúan sobre él tienen líneas de acción que se intersecan en el punto *O*. Para satisfacer el equilibrio por momentos con respecto a *O*, es decir, $\Sigma M_O = 0$, la tercera fuerza también debe pasar por *O*, lo cual entonces vuelve *concurrente* al sistema de fuerzas. Si dos de las tres fuerzas son paralelas, figura 5-23b, el punto de concurrencia, *O*, se considera que está en el “infinito”, y la tercera fuerza debe ser paralela a las otras dos fuerzas para intersecarse en este “punto”.

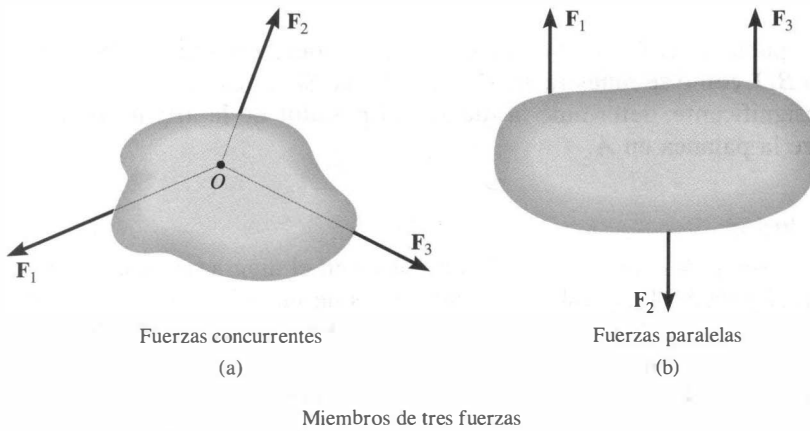
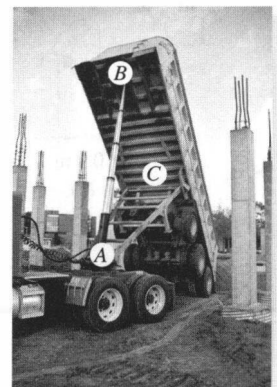
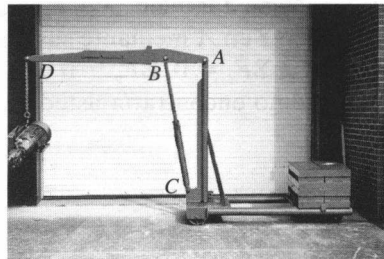
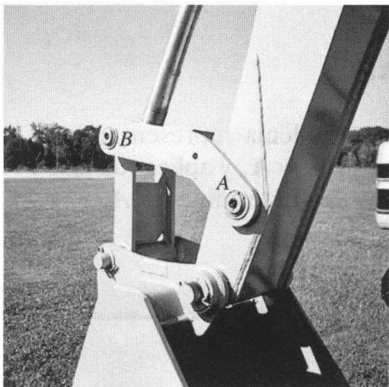


Fig. 5-23

Muchos elementos mecánicos actúan como miembros de dos o tres fuerzas, y la habilidad para reconocerlos en un problema simplificará considerablemente un análisis por equilibrio.

- El eslabón AB del cucharón de la excavadora es un ejemplo típico de un miembro de dos fuerzas ya que está conectado mediante pasadores en sus extremos y, si su peso se ignora, ninguna otra fuerza actúa en este miembro.
- El cilindro hidráulico BC está conectado mediante pasadores en sus extremos. Se trata de un miembro de dos fuerzas. El pescante ABD está sometido al peso del motor suspendido en D , a la fuerza del cilindro hidráulico en B , y a la fuerza del pasador en A . Si el peso del pescante es ignorado, se trata entonces de un miembro de tres fuerzas.
- La caja de volteo del camión opera por extensión del cilindro telescópico hidráulico AB . Si se ignora el peso de AB , podemos clasificarlo como un miembro de dos fuerzas ya que está conectado en sus puntos extremos.



EJEMPLO 5.13

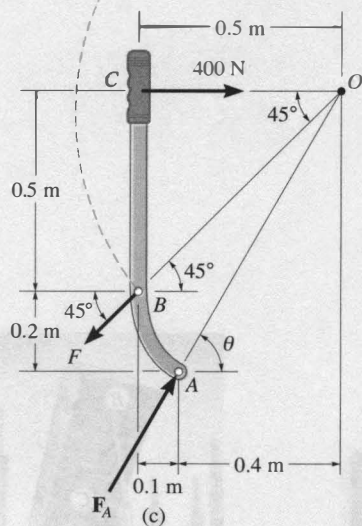
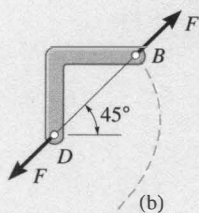
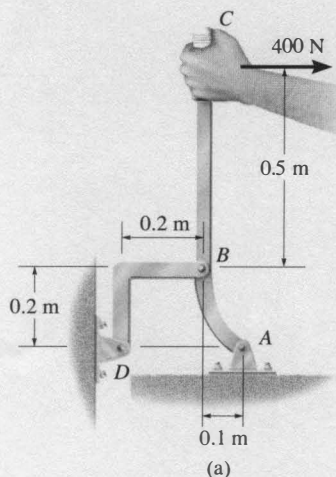


Fig. 5-24

La palanca ABC está articulada en A y conectada a un eslabón corto BD , como se muestra en la figura 5-24a. Si el peso del miembro es insignificante, determine la fuerza del pasador de la articulación sobre la palanca en A .

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Como se ve en el diagrama de cuerpo libre, figura 5-24b, el eslabón corto BD es un *miembro de dos fuerzas*, por lo que las *fuerzas resultantes* en los pasadores D y B deben ser iguales, opuestas y colineales. Aunque la magnitud de la fuerza es una incógnita, la línea de acción es conocida ya que pasa por B y D .

La palanca ABC es un *miembro de tres fuerzas*, por tanto, para satisfacer el equilibrio por momentos, las tres fuerzas no paralelas que actúan sobre la palanca deben ser concurrentes en O , figura 5-24c. En particular, observe que la fuerza F sobre la palanca situada en B es igual pero opuesta a la fuerza F que actúa en B sobre el eslabón. ¿Por qué? La distancia CO debe ser de 0.5 m ya que las líneas de acción de F y la fuerza de 400 N son conocidas.

Ecuaciones de equilibrio. Requiriendo que el sistema de fuerzas sea concurrente en O , ya que $\Sigma M_O = 0$, el ángulo θ que define la línea de acción de F_A puede ser determinado por trigonometría,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.7}{0.4}\right) = 60.3^\circ \quad \text{Resp.}$$

Usando los ejes x , y y aplicando las ecuaciones de equilibrio de fuerzas, podemos obtener F_A y F .

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad F_A \cos 60.3^\circ - F \cos 45^\circ + 400 \text{ N} = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_A \sin 60.3^\circ - F \sin 45^\circ = 0$$

Despejando, obtenemos

$$F_A = 1.07 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$F = 1.32 \text{ kN}$$

Nota. También podemos resolver este problema representando la fuerza en A mediante sus dos componentes A_x y A_y y aplicando $\Sigma M_A = 0$, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ a la palanca. Una vez determinadas A_x y A_y , ¿cómo encontraría usted F_A y θ ?

PROBLEMAS

5-11. Determine las reacciones en los soportes en el problema 5-1.

*5-12. Determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa en el pasador A de la perforadora en el problema 5-2.

5-13. Determine las reacciones en los soportes de la armadura en el problema 5-5.

5-14. Determine las reacciones sobre la pluma en el problema 5-6.

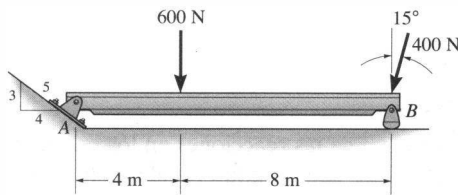
5-15. Determine las reacciones en los soportes de la viga en el problema 5-7.

*5-16. Determine las reacciones sobre el miembro en A , B y C en el problema 5-8.

5-17. Determine las reacciones en los puntos de contacto en A , B y C de la barra que se muestra en el problema 5-9.

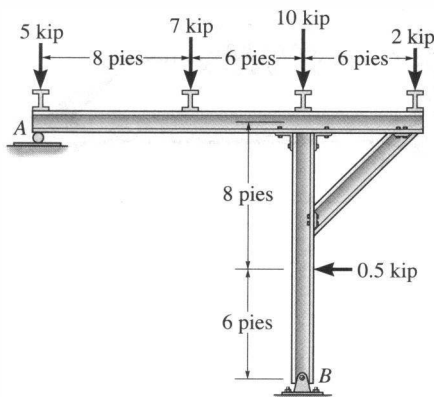
5-18. Determine las reacciones en el pasador A y en el rodillo en B de la viga del problema 5-10.

5-19. Determine la magnitud de las reacciones sobre la viga en A y B . Ignore el espesor de la viga.



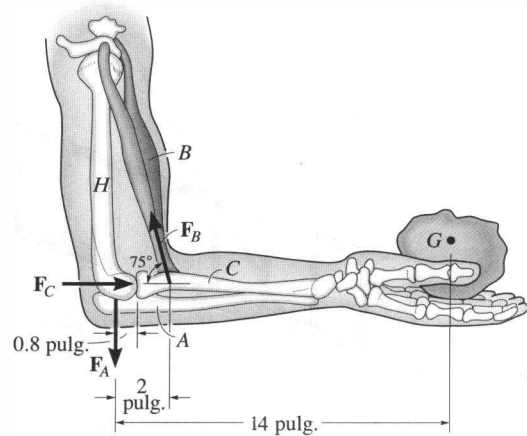
Prob. 5-19

*5-20. Determine las reacciones en los soportes A y B del marco.



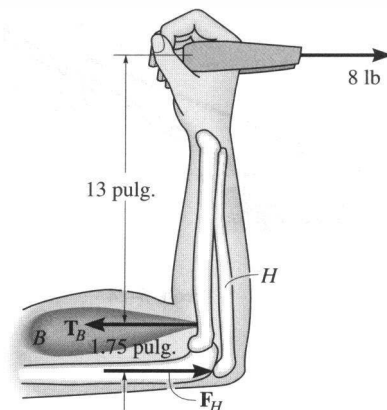
Prob. 5-20

5-21. Al sostener la piedra de 5 lb en equilibrio, el húmero H , supuesto liso, ejerce fuerzas normales F_C y F_A sobre el radio C y el cúbito A como se muestra. Determine esas fuerzas y la fuerza F_B que el bíceps B ejerce sobre el radio por equilibrio. La piedra tiene su centro de masa en G . Ignore el peso del brazo.



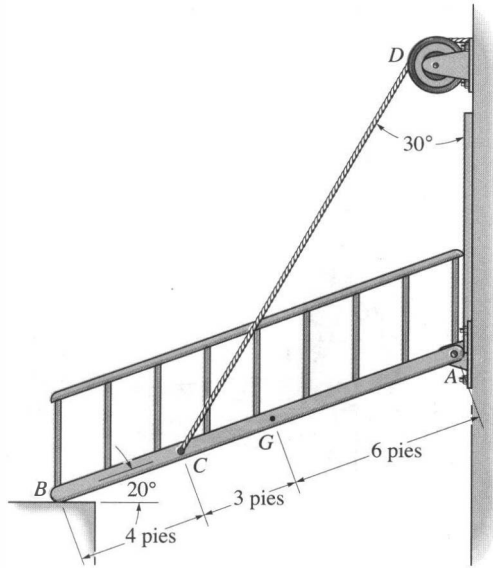
Prob. 5-21

5-22. El hombre está jalando una carga de 8 lb con un brazo en la posición mostrada. Determine la fuerza F_H que la carga ejerce sobre el húmero H , y la tensión desarrollada en el bíceps B . Ignore el peso del brazo del hombre.



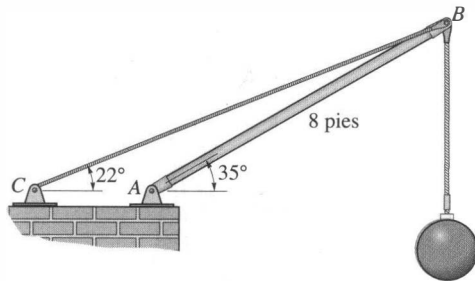
Prob. 5-22

5-23. La rampa de un barco tiene un peso de 200 lb y centro de gravedad en G . Determine la fuerza del cable CD necesaria para empezar a levantar la rampa (la reacción en B es entonces cero). Determine también las componentes de fuerza horizontal y vertical presentes en la articulación (pasador) ubicada en A .



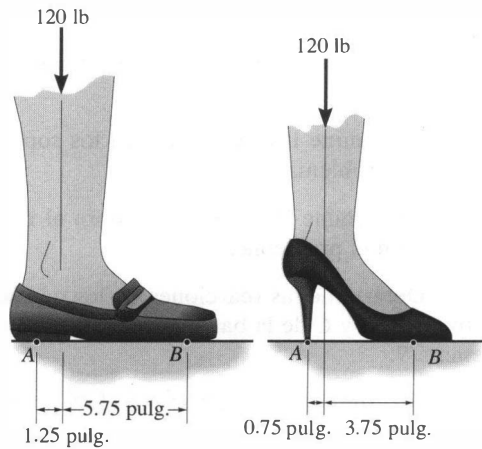
Prob. 5-23

*5-24. Determine la magnitud de la fuerza presente en el pasador situado en A y en el cable BC necesarias para soportar la carga de 500 lb. Ignore el peso del pescante AB .



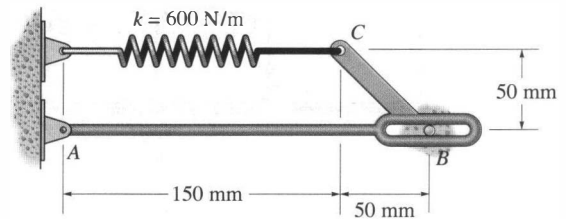
Prob. 5-24

5-25. Compare la fuerza ejercida sobre la punta del pie y el talón de una mujer de 120 lb cuando lleva zapatos normales y cuando lleva zapatos de tacón alto. Suponga que todo su peso recae sobre uno de sus pies y que las reacciones ocurren en los puntos A y B como se muestra.



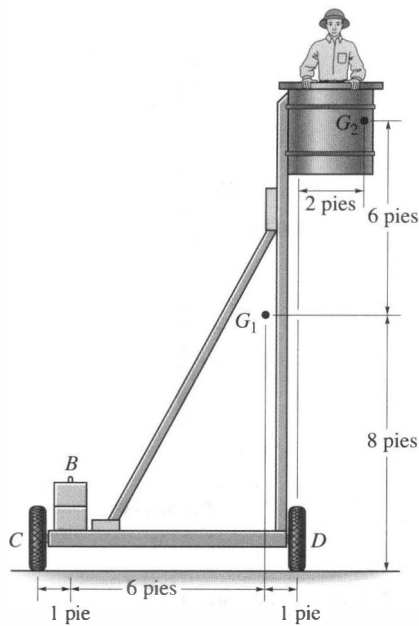
Prob. 5-25

5-26. Determine las reacciones en los pasadores A y B . El resorte tiene una longitud no alargada de 80 mm.



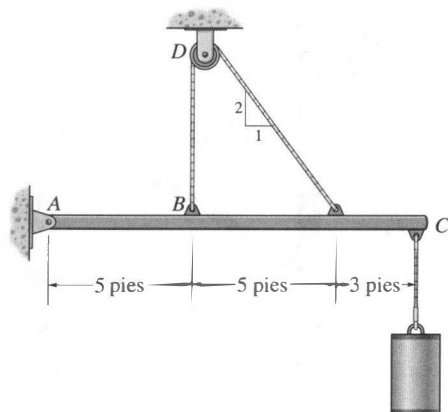
Prob. 5-26

5-27. La plataforma tiene un peso de 250 lb y su centro de gravedad en G_2 . Si se quiere soportar una carga máxima de 400 lb colocada en el punto G_2 , determine el contrapeso W mínimo que debe ubicarse en B para prevenir una volcadura de la plataforma.



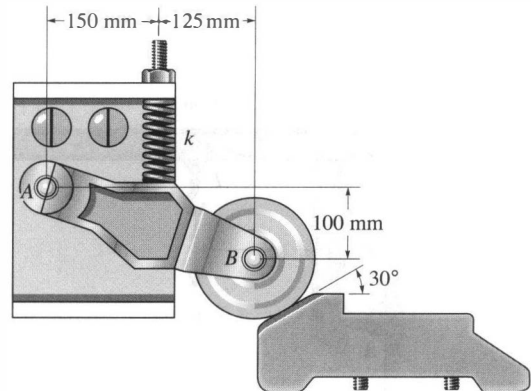
Prob. 5-27

*5-28. Determine la tensión presente en el cable y las componentes de reacción horizontal y vertical del pasador A . La polea en D no tiene fricción y el cilindro pesa 80 lb.



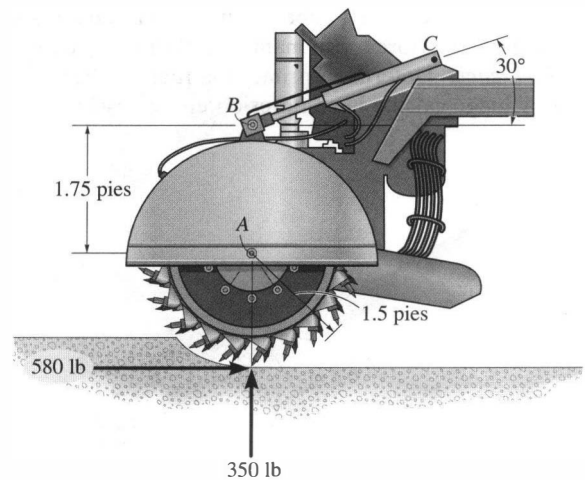
Prob. 5-28

5-29. El dispositivo se usa para mantener abierta la puerta de un elevador. Si el resorte tiene una rigidez de $k = 40 \text{ N/m}$ y está comprimido en 0.2 m, determine las componentes de reacción horizontal y vertical en el pasador A y la fuerza resultante en la chumacera B de la rueda.



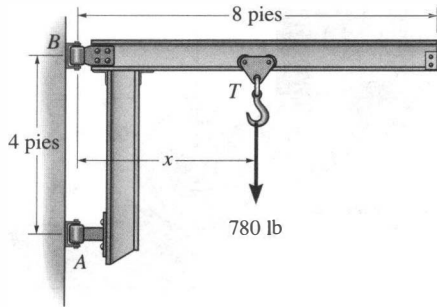
Prob. 5-29

5-30. La cortadora está sometida a una fuerza horizontal de 580 lb y a una fuerza normal de 350 lb. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa sobre el pasador A y la fuerza presente a lo largo del cilindro hidráulico BC (un miembro de dos fuerzas).



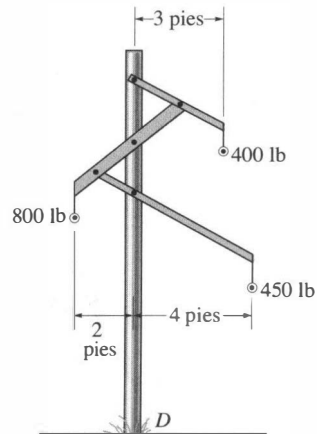
Prob. 5-30

5-31. La grúa en voladizo se usa para soportar la carga de 780 lb. Si el gancho T puede colocarse en cualquier punto entre $1.5 \text{ pies} \leq x \leq 7.5 \text{ pies}$, determine la magnitud máxima de la reacción en los soportes A y B . Observe que los soportes son collares que permiten a la grúa girar libremente con respecto al eje vertical. El collar situado en B puede soportar una fuerza en la dirección vertical, lo cual no le es posible al collar ubicado en A .



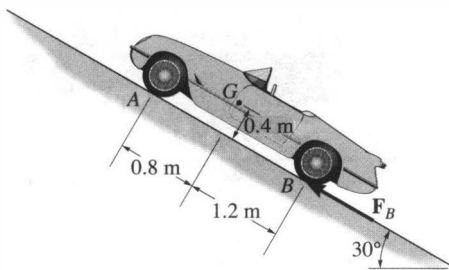
Prob. 5-31

5-33. El poste soporta tres líneas; cada línea ejerce una fuerza vertical sobre el poste debido a su peso, como se muestra. Determine las reacciones en el soporte fijo D . Si es posible que el viento o el hielo rompan las líneas, determine qué línea o líneas, al ser eliminada(s), genera(n) una condición de momento máximo de reacción en D .



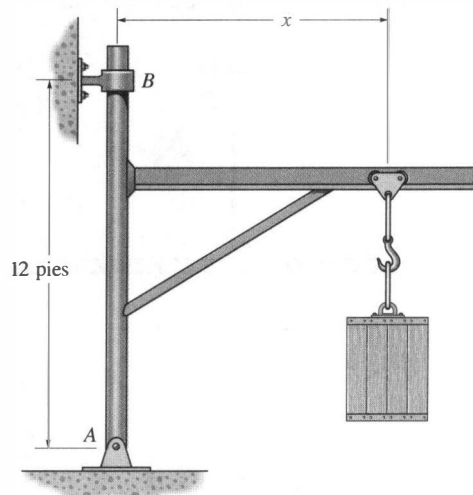
Prob. 5-33

*5-32. El carro deportivo tiene masa de 1.5 Mg y centro de masa en G . Si cada uno de los dos resortes frontales tiene rigidez de $k_A = 58 \text{ kN/m}$, y los dos resortes posteriores tienen cada uno rigidez de $k_B = 65 \text{ kN/m}$, determine sus compresiones cuando el carro está estacionado sobre un camino con 30° de pendiente. También, ¿qué fuerza de fricción F_B debe ser aplicada a cada una de las ruedas posteriores para mantener el carro en equilibrio? *Sugerencia:* Determine primero la fuerza normal en A y B , y luego calcule la compresión en los resortes.



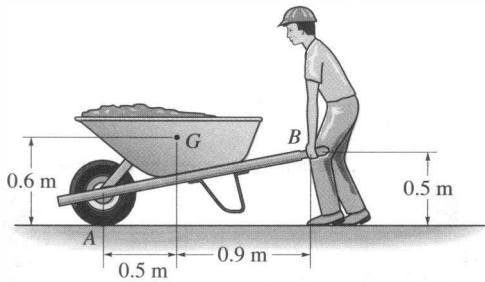
Prob. 5-32

5-34. La grúa está conectada mediante un pasador colocado en A y sujeta en B por un collar liso. Determine la posición x del gancho, que lleva una carga de 5000 lb, tal que genere las reacciones máximas y mínimas en los soportes. Calcule esas reacciones en cada caso. Ignore el peso de la grúa. Considere $4 \text{ pies} \leq x \leq 10 \text{ pies}$.



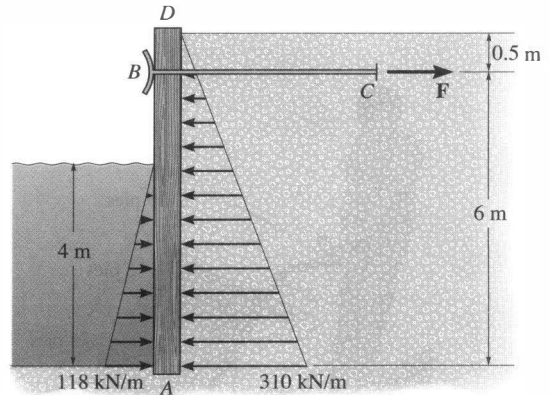
Prob. 5-34

5-35. Si la carretilla y su contenido tienen una masa de 60 kg y centro de masa en G , determine la magnitud de la fuerza resultante que el hombre debe ejercer sobre *cada uno* de los dos mangos para mantenerla en equilibrio.



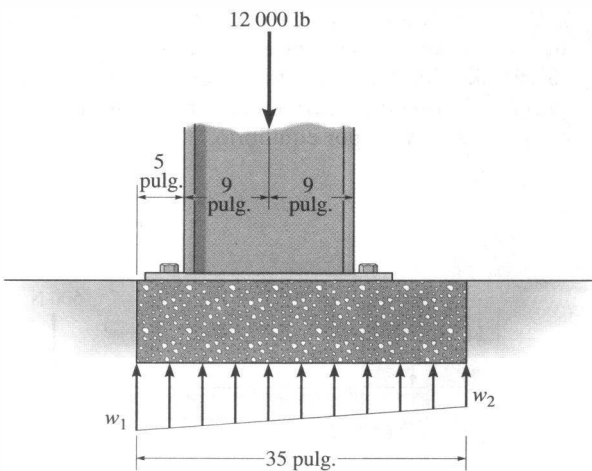
Prob. 5-35

5-37. El muro de contención AD está sometido a presiones de agua y de tierra de relleno. Suponiendo que AD está "articulado" en el terreno en A , determine las reacciones horizontal y vertical en ese punto y también la tensión requerida en el ancla BC necesaria por equilibrio. El muro tiene una masa de 800 kg.



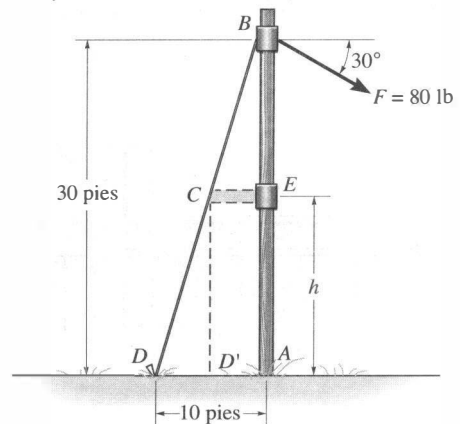
Prob. 5-37

*5-36. La zapata se usa para soportar la carga de 12 000 lb. Determine por equilibrio las intensidades w_1 y w_2 de la carga distribuida que actúa sobre la base de la zapata.



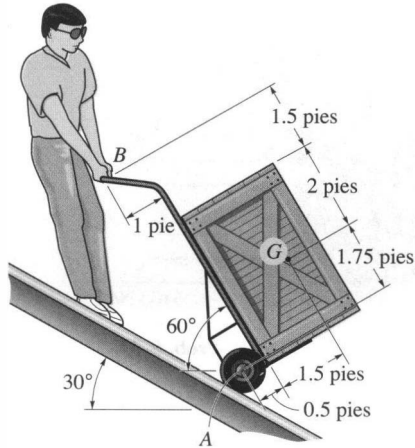
Prob. 5-36

5-38. El poste de teléfono, de espesor insignificante, está sometido a la fuerza de 80 lb dirigida como se muestra. Está soportado por el cable BCD y puede suponerse articulado en su base A . Con el fin de proporcionar espacio para derecho de paso de una acera, donde se localiza D , el puntal CE está unido en C , como se muestra con las líneas discontinuas (el segmento CD de cable está retirado). Si la tensión en CD' va a ser el doble de la tensión en BCD , determine la altura h necesaria para la colocación del puntal CE .



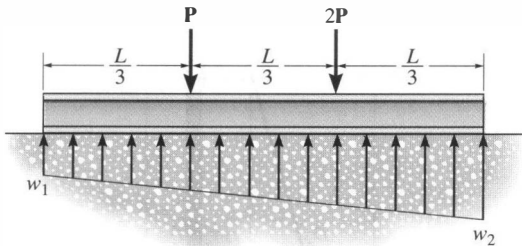
Prob. 5-38

5-39. El trabajador usa la carretilla para transportar material hacia abajo por la rampa. Si la carretilla y su contenido son mantenidos en la posición mostrada y tienen un peso de 100 lb con centro de gravedad en G , determine la fuerza normal resultante de ambas ruedas sobre el terreno A y la magnitud de la fuerza requerida en el mango B .



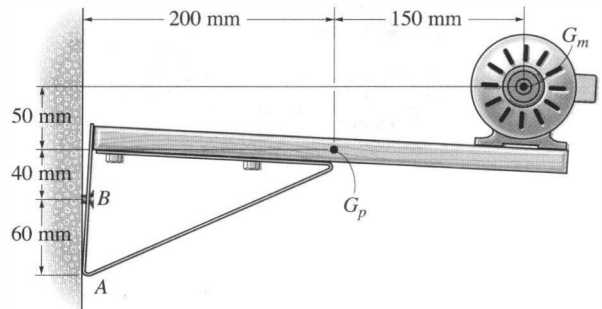
Prob. 5-39

*5-40. La viga está sometida a las dos cargas concentradas como se muestra. Suponiendo que la cimentación ejerce una distribución de carga linealmente variable sobre su fondo, determine las intensidades de carga w_1 y w_2 por equilibrio (a) en términos de los parámetros mostrados; (b) haga $P = 500$ lb y $L = 12$ pies.



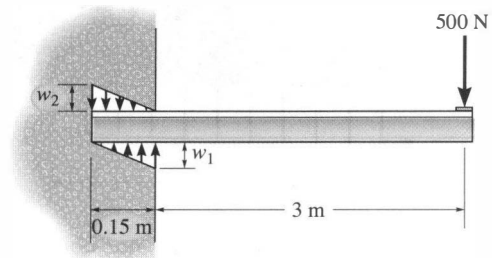
Prob. 5-40

5-41. El tablón soporta el motor eléctrico que tiene una masa de 15 kg y centro de masa en G_m . La ménsula sobre la que descansa el tablón tiene una masa de 4 kg y centro de masa en G_p . Suponiendo que un solo perno colocado en B mantiene la estructura en su posición y que la ménsula se apoya sobre la pared lisa localizada en A , determine esta fuerza normal en A y las componentes de reacción horizontal y vertical del perno sobre la ménsula.



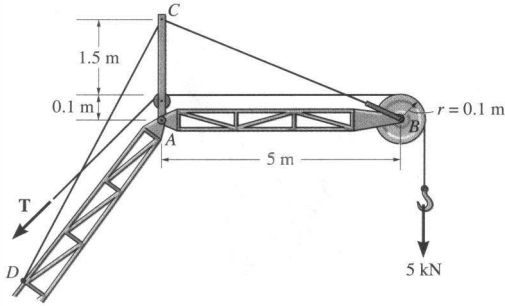
Prob. 5-41

5-42. Una viga en voladizo, con longitud volada de 3 m, está sometida a una fuerza vertical de 500 N. Suponiendo que la pared resiste esta carga con cargas variables distribuidas linealmente sobre la longitud de 0.15 m de la porción de viga que entra en la pared, determine las intensidades w_1 y w_2 por equilibrio.



Prob. 5-42

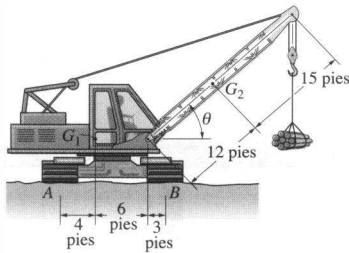
5-43. La porción superior del aguilón de la grúa consta del pescante AB , el cual está soportado por el pasador ubicado en A , la retenida BC y el tirante posterior CD ; en el punto C , cada cable está unido por separado al mástil. Si la carga de 5 kN está soportada por el cable de izado, que pasa sobre la polea en B , determine, por equilibrio, la magnitud de la fuerza resultante que el pasador ejerce sobre el pescante en A , la tensión en la retenida BC , y la tensión T en el cable de izado. Ignore el peso del pescante. La polea situada en B tiene un radio de 0.1 m .



Prob. 5-43

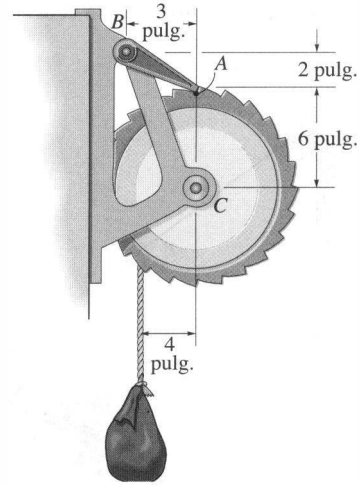
***5-44.** La grúa móvil tiene un peso de $120,000\text{ lb}$ y centro de gravedad en G_1 ; el aguilón tiene un peso de $30,000\text{ lb}$ y centro de gravedad en G_2 . Determine el menor ángulo de inclinación θ del aguilón, sin que la grúa se vuelque si la carga suspendida es $W = 40,000\text{ lb}$. Ignore el espesor de las ruedas en A y en B .

5-45. La grúa móvil tiene un peso de $120,000\text{ lb}$ y centro de gravedad en G_1 ; el aguilón tiene un peso de $30,000\text{ lb}$ y centro de gravedad en G_2 . Si la carga suspendida tiene un peso de $W = 16,000\text{ lb}$, determine las reacciones normales en las ruedas A y B . Para el cálculo, ignore el espesor de las ruedas y considere $\theta = 30^\circ$.



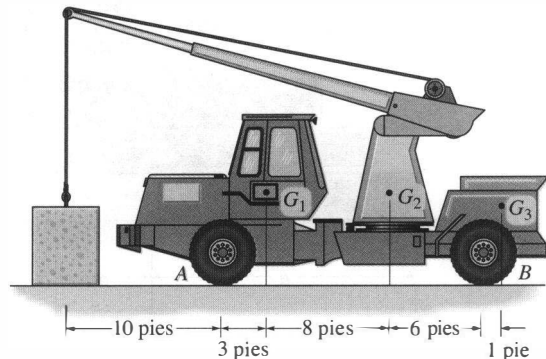
Probs. 5-44/45

5-46. El guinche consiste en un tambor con radio de 4 pulg. , el cual está conectado mediante un pasador colocado en su centro C . En su borde exterior tiene un engrane de cremallera con radio medio de 6 pulg. . El trinquete AB sirve como un miembro de dos fuerzas (eslabón corto) que impide la rotación del tambor. Si la carga suspendida es de 500 lb , determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador C .



Prob. 5-46

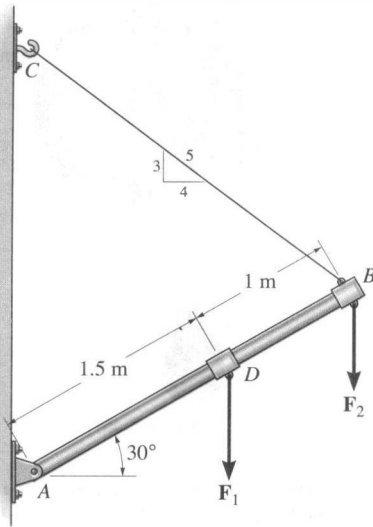
5-47. La grúa consta de tres partes con pesos $W_1 = 3500\text{ lb}$, $W_2 = 900\text{ lb}$, $W_3 = 1500\text{ lb}$ y centros de gravedad en G_1 , G_2 y G_3 , respectivamente. Ignorando el peso del aguilón, determine (a) las reacciones sobre cada uno de los cuatro neumáticos si la carga es levantada con velocidad constante y tiene un peso de 800 lb , y (b) con el aguilón en la posición mostrada, la máxima carga que la grúa puede levantar sin volcarse.



Prob. 5-47

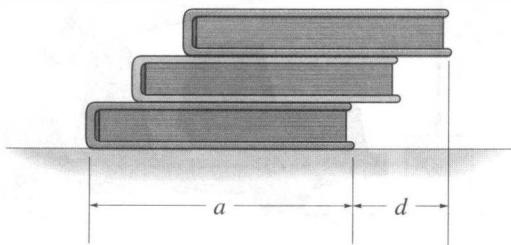
*5-48. El aguilón soporta dos cargas verticales. Ignore el tamaño de los collares localizados en D y B y el espesor del aguilón; calcule las componentes de fuerza horizontal y vertical en el pasador A y la fuerza presente en el cable CB . Haga $F_1 = 800 \text{ N}$ y $F_2 = 350 \text{ N}$.

5-49. El aguilón debe soportar dos cargas verticales, F_1 y F_2 . Si el cable CB puede soportar una carga máxima de 1500 lb antes de fallar, determine las cargas críticas si $F_1 = 2F_2$. ¿Cuál es la magnitud de la reacción máxima en el pasador A ?



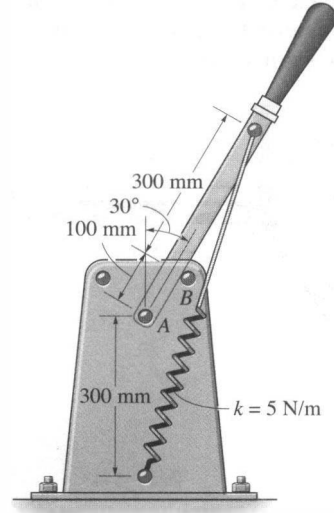
Probs. 5-48/49

5-50. Tres libros iguales, cada uno con peso W y longitud a , están colocados como se muestra. Determine la distancia d máxima que el libro superior puede sobresalir con respecto al de la base sin que se caiga.



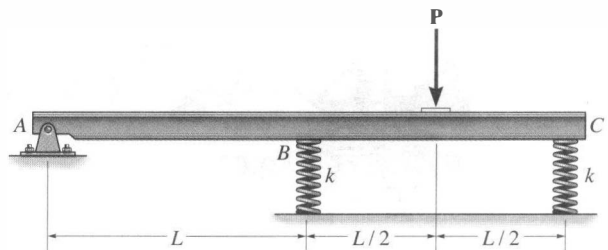
Prob. 5-50

5-51. El interruptor de palanca consiste en una palanca articulada a un bastidor fijo en A y mantenida en su lugar mediante el resorte que tiene una longitud no alargada de 200 mm. Determine la magnitud de la fuerza resultante en A y la fuerza normal sobre el perno en B cuando la palanca está en la posición mostrada.



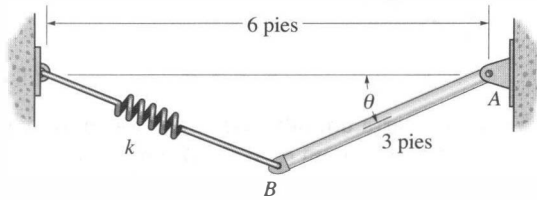
Prob. 5-51

*5-52. La viga rígida de peso insignificante está soportada horizontalmente por dos resortes y un pasador. Si los resortes no están comprimidos cuando se retira la carga, determine la fuerza presente en cada resorte cuando se aplica la carga P . Calcule también la deflexión vertical del extremo C . Suponga que la rigidez k del resorte es lo suficientemente grande como para que se presentan sólo deflexiones pequeñas. *Sugerencia:* La viga gira con respecto a A y las deflexiones en los resortes pueden estar relacionadas.



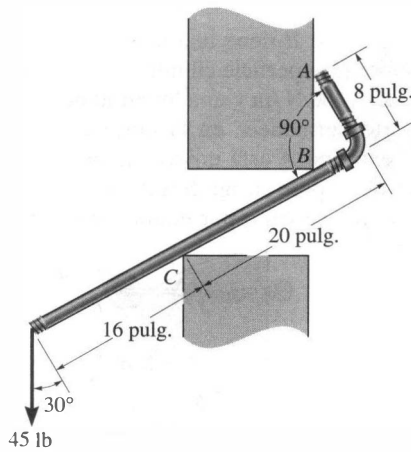
Prob. 5-52

5-53. La barra uniforme AB tiene un peso de 15 lb y el resorte no está estirado cuando $\theta = 0^\circ$. Si $\theta = 30^\circ$, determine la rigidez k del resorte de manera que la barra esté en equilibrio.



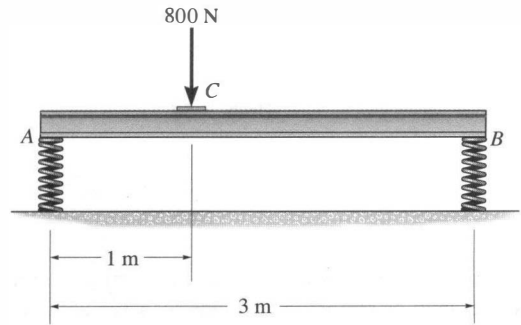
Prob. 5-53

5-54. El tubo liso descansa contra la pared en los puntos de contacto A , B y C . Determine las reacciones necesarias en esos puntos para soportar la fuerza vertical de 45 lb. Ignore el espesor del tubo en los cálculos.



Prob. 5-54

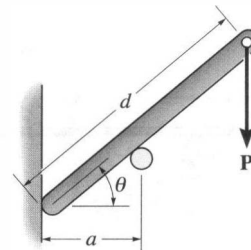
5-55. La viga horizontal está soportada por resortes en sus extremos. Cada resorte tiene rigidez de $k = 5 \text{ kN/m}$ y originalmente no está comprimido cuando la viga se encuentra en posición horizontal. Determine el ángulo de inclinación de la viga si se aplica una carga de 800 N en el punto C como se muestra.



Probs. 5-55/56

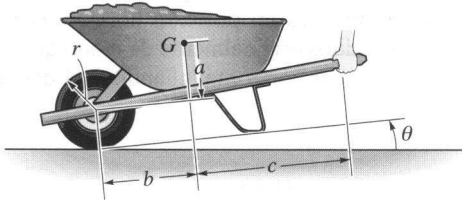
*5-56. La viga horizontal está soportada por resortes en sus extremos. Si la rigidez del resorte localizado en A es $k_A = 5 \text{ kN/m}$, determine la rigidez requerida en el resorte ubicado en B de manera que si la viga se carga con los 800 N permanezca en posición horizontal. Los resortes están contruidos originalmente de modo que la viga mantiene la posición horizontal cuando está descargada.

5-57. Determine la distancia d de aplicación de la carga P por equilibrio de la barra lisa en la posición θ como se muestra. Ignore el peso de la barra.



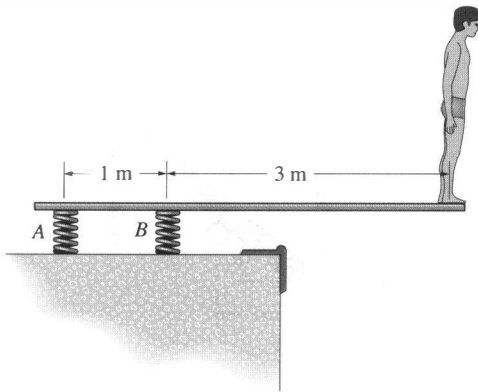
Prob. 5-57

5-58. La carretilla y su contenido tienen masa m y centro de masa en G . Determine el ángulo de inclinación θ más grande posible sin que la carretilla vuelque.



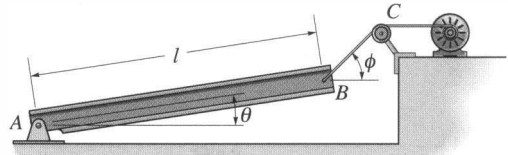
Prob. 5-58

5-59. Un joven está de pie en el extremo de un trampolín, el cual es soportado por los resortes ubicados en A y B , cada resorte tiene rigidez $k = 15 \text{ kN/m}$. En la posición mostrada el tablón es horizontal. Si el joven tiene una masa de 40 kg , determine el ángulo de inclinación que el tablón forma con la horizontal después de que salta al agua. Ignore el peso del tablón y suponga que es rígido.



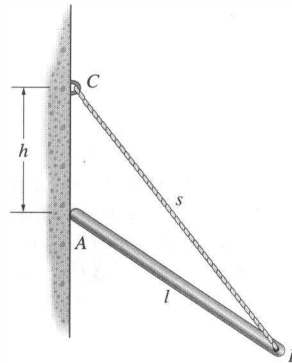
Prob. 5-59

*5-60. La viga uniforme tiene peso W y longitud l , y está soportada mediante un pasador en A y un cable BC . Determine las componentes de reacción horizontal y vertical en A y la tensión necesaria en el cable para mantener la viga en la posición mostrada.



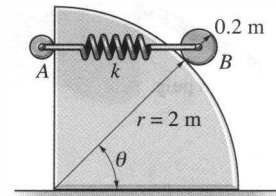
Prob. 5-60

5-61. La barra uniforme tiene una longitud l y peso W . Está soportada en un extremo A por una pared lisa y en el otro extremo por una cuerda de longitud s que está unida a la pared como se muestra. Muestre que por equilibrio se requiere que $h = [(s^2 - l^2)/3]^{1/2}$.



Prob. 5-61

5-62. El disco B tiene una masa de 20 kg y está soportado sobre la superficie cilíndrica lisa por un resorte con rigidez $k = 400 \text{ N/m}$ y una longitud no estirada $l_0 = 1 \text{ m}$. El resorte permanece en la posición horizontal puesto que su extremo A está unido a la pequeña guía de rodillo que tiene peso insignificante. Determine el ángulo θ al grado más cercano por equilibrio del rodillo.



Prob. 5-62

Equilibrio en tres dimensiones

5.5 Diagramas de cuerpo libre

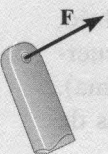
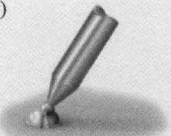
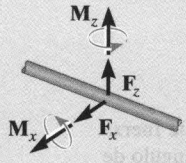
El primer paso al resolver problemas tridimensionales de equilibrio, como en el caso de los bidimensionales, es trazar un diagrama de cuerpo libre del cuerpo (o grupo de cuerpos considerados como un sistema). Sin embargo, antes de mostrar esto, es necesario analizar los tipos de reacción que pueden presentarse en los soportes.

Reacciones de soporte. Las fuerzas y los momentos de par reactivos que actúan en varios tipos de soportes y conexiones, cuando los miembros se ven en tres dimensiones, están dados en la tabla 5-2. Es importante reconocer los símbolos usados para representar cada uno de esos soportes y entender claramente cómo son desarrolladas las fuerzas y los momentos de par mediante cada soporte. Igual que en el caso bidimensional, *una fuerza es desarrollada por un soporte que restringe la traslación del miembro conectado, mientras que un momento de par se desarrolla cuando la rotación del miembro conectado es prevenida*. Por ejemplo, en la tabla 5-2, la junta (4) de rótula esférica impide cualquier traslación del miembro conectado; por tanto, una fuerza debe actuar en el miembro en el punto de conexión. Esta fuerza tiene tres componentes con magnitudes desconocidas F_x, F_y, F_z . Si esas componentes son conocidas, se puede obtener la magnitud de la fuerza. $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$, y la orientación de la fuerza es definida por los ángulos coordenados de dirección α, β, γ , ecuaciones 2-7.* Como está permitido que el miembro conectado gire libremente con respecto a *cualquier* eje, ningún momento de par es resistido por una rótula esférica.

Debe advertirse que los soportes de chumacera (5) y (7), el *pasador* (8), y la articulación (9) muestran que soportan componentes tanto de fuerza como de momento de par. Sin embargo, si esos soportes se usan junto con *otras* chumaceras, pasadores, o articulaciones para mantener un cuerpo rígido en equilibrio y los soportes están *apropiadamente alineados* cuando se conectan al cuerpo, entonces las *reacciones de fuerza* en esos soportes pueden por sí *solos* ser adecuadas para soportar el cuerpo. En otras palabras, los momentos de par resultan redundantes y no se muestran sobre el diagrama de cuerpo libre. La razón de esto debe resultar clara después de estudiar los ejemplos que siguen.

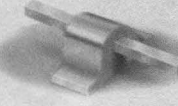
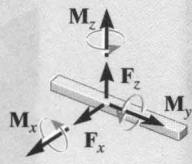
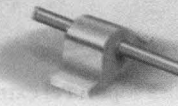
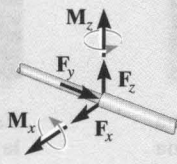
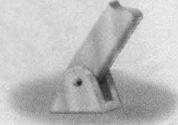
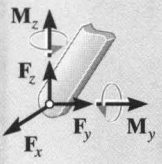
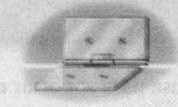
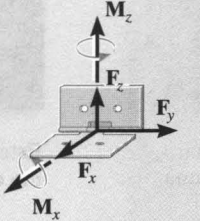
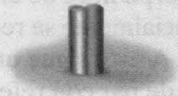
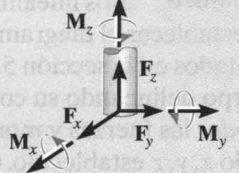
*Las tres incógnitas pueden ser representadas también como una magnitud de fuerza desconocida F y dos ángulos coordenados de dirección desconocidos. El tercer ángulo de dirección se obtiene usando la identidad $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, ecuación 2-10.

TABLA 5-2 • Soportes de cuerpos rígidos sometidos a sistemas tridimensionales de fuerzas

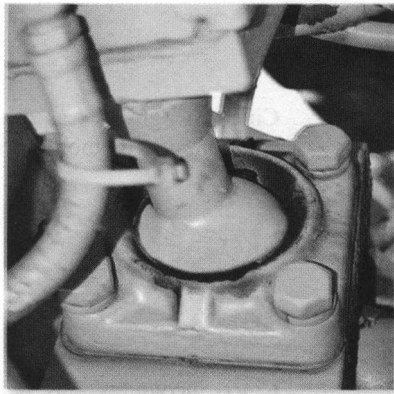
Tipos de conexión	Reacción	Número de incógnitas
<p>(1)</p>  <p>cable</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa alejándose del miembro en la dirección conocida del cable.</p>
<p>(2)</p>  <p>soporte superficial liso</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.</p>
<p>(3)</p>  <p>rodillo</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.</p>
<p>(4)</p>  <p>rótula esférica</p>		<p>Tres incógnitas. Las reacciones son tres componentes rectangulares de fuerza.</p>
<p>(5)</p>  <p>cojinete liso</p>		<p>Cuatro incógnitas. Las reacciones son dos fuerzas y dos componentes de momento de par que actúan perpendicularmente a la flecha.</p>

continúa

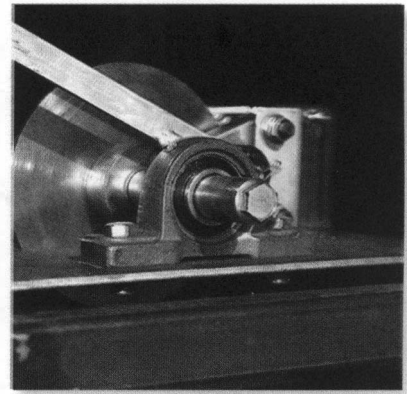
TABLA 5-2 • Continuación

Tipos de conexión	Reacción	Número de incógnitas
<p>(6)</p>  <p>cojinete liso con flecha cuadrada</p>		<p>Cinco incógnitas. Las reacciones son dos fuerzas y tres componentes de momento de par.</p>
<p>(7)</p>  <p>cojinete de empuje</p>		<p>Cinco incógnitas. Las reacciones son tres fuerzas y dos componentes de momento de par.</p>
<p>(8)</p>  <p>pasador simple liso</p>		<p>Cinco incógnitas. Las reacciones son tres fuerzas y dos componentes de momento de par.</p>
<p>(9)</p>  <p>articulación simple (bisagra)</p>		<p>Cinco incógnitas. Las reacciones son tres fuerzas y dos componentes de momento de par.</p>
<p>(10)</p>  <p>sopORTE fijo (empotramiento)</p>		<p>Seis incógnitas. Las reacciones son tres fuerzas y tres componentes de momento de par.</p>

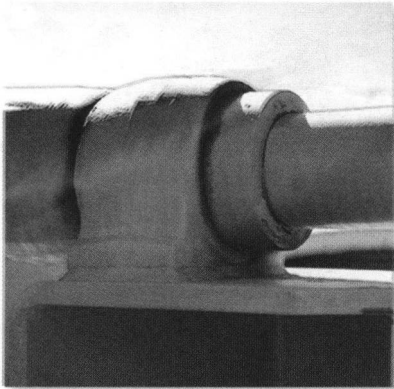
Ejemplos típicos de soportes reales, referidos a la tabla 5-2, se muestran en la siguiente secuencia de fotografías.



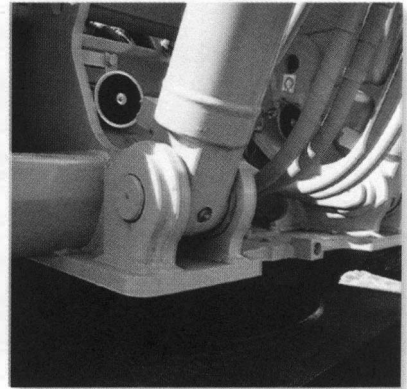
Esta rótula esférica proporciona una conexión para la caja de una máquina niveladora de tierra con su bastidor. (4)



Esta chumacera lisa soporta el extremo de la flecha. (5)

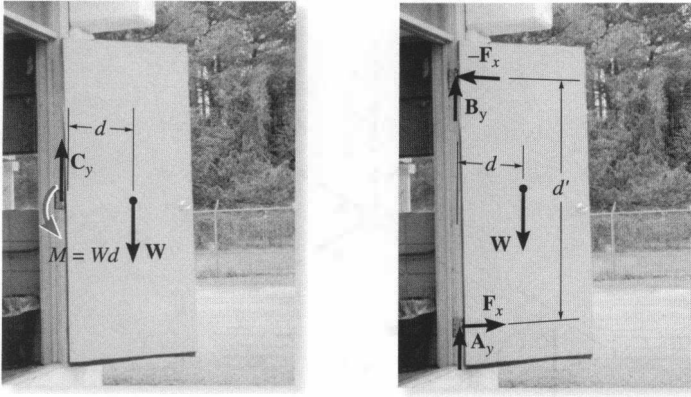


Esta chumacera de empuje se usa para soportar la flecha impulsora sobre una máquina. (7)



Este pasador se usa para soportar el extremo del puntal usado en un tractor. (8)

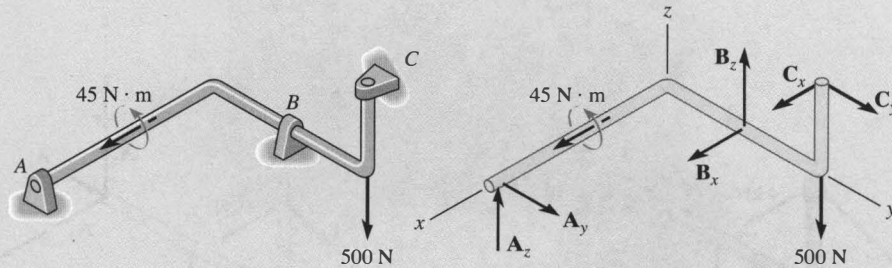
Diagramas de cuerpo libre. Los lineamientos para efectuar el procedimiento general para establecer el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo rígido fueron presentados en la sección 5.2. Esencialmente se requiere “aislar” primero el cuerpo delineando su contorno. A esto sigue una cuidadosa *rotulación* de *todas* las fuerzas y momentos de par con referencia a un sistema coordenado x, y, z establecido. Como regla general, las *componentes de reacción* con *magnitud desconocida* se muestran actuando sobre el diagrama de cuerpo libre en *sentido positivo*. De este modo, si se obtienen valores negativos, ello indicará que las componentes actúan en las direcciones coordenadas negativas.



Es un error soportar una puerta usando una sola bisagra ya que ésta debe desarrollar una fuerza C_y para sostener el peso W de la puerta y un momento de par M para resistir el momento de W , esto es, $M = Wd$. Si en vez de esto se usan dos bisagras alineadas apropiadamente, entonces el peso es tomado por ambas bisagras, $A_y + B_y = W$, y el momento de la puerta es resistido por las dos fuerzas en las bisagras F_x y $-F_x$. Estas fuerzas forman un par, tal que $F_x d' = Wd$. En otras palabras, ningún momento de par será generado por las bisagras sobre la puerta siempre que estén *alineadas apropiadamente*. En vez de ello, las fuerzas F_x y $-F_x$ resisten la rotación causada por W .

EJEMPLO 5.14

Varios ejemplos de objetos junto con sus diagramas asociados de cuerpo libre se muestran en la figura 5-25. En todos los casos, los ejes x, y, z están establecidos y las componentes de reacción desconocidas están indicadas con sentido positivo. El peso de los objetos es ignorado.

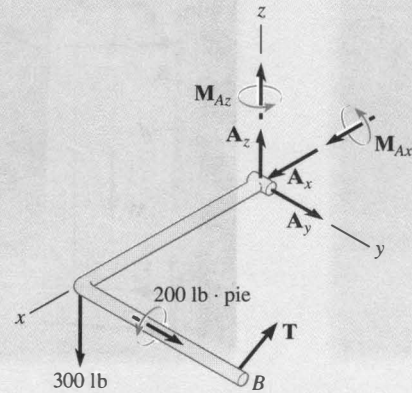
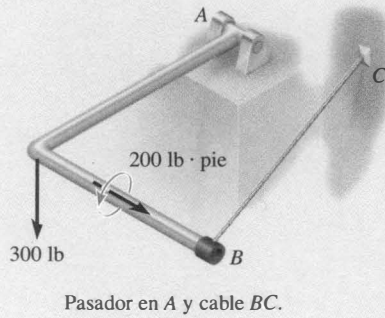


Cojinetes lisos en A, B, C, alineados apropiadamente

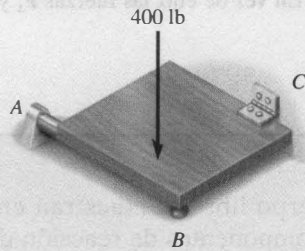
Las reacciones de fuerza desarrolladas mediante los cojinetes son suficientes para obtener el equilibrio ya que impiden que la flecha gire con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

(a)

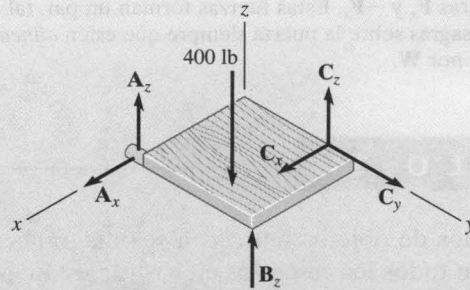
Fig. 5-25



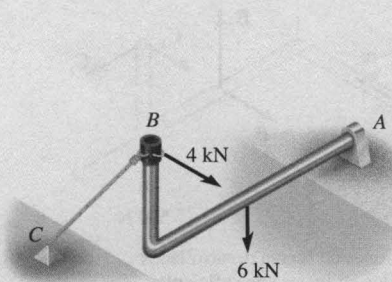
(b) Mediante el pasador colocado sobre la barra, se desarrollan componentes de momento para impedir rotaciones con respecto a los ejes x y z .



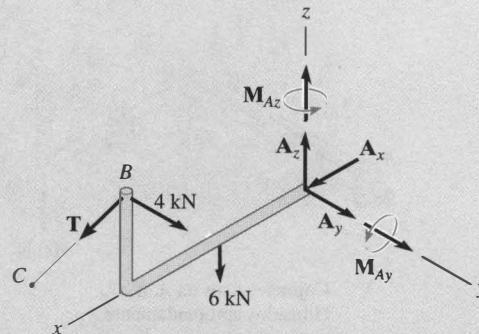
Cojinetes lisos alineados apropiadamente en A y articulación en C. Rodillo en B.



(c) Mediante el cojinete y la articulación colocada sobre la placa, se desarrollan sólo reacciones de fuerza para impedir rotaciones con respecto a cada eje coordinado. En la articulación no se desarrolla ningún momento.



Cojinete de empuje en A y cable BC.



(d) Mediante el cojinete colocado sobre la barra se desarrollan componentes de momento para impedir rotaciones con respecto a los ejes y y z .

Fig. 5-25

5.6 Ecuaciones de equilibrio

Como vimos en la sección 5.1, las condiciones para lograr el equilibrio de un cuerpo rígido sometido a un sistema tridimensional de fuerza requieren que la fuerza *resultante* y el momento de par *resultante* que actúan sobre el cuerpo sean iguales a *cero*.

Ecuaciones vectoriales de equilibrio. Las dos condiciones para lograr el equilibrio de un cuerpo rígido pueden ser expresadas matemáticamente en forma vectorial como

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} &= \mathbf{0} \\ \Sigma \mathbf{M}_O &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5-5)$$

donde $\Sigma \mathbf{F}$ es la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo y $\Sigma \mathbf{M}_O$ es la suma de los momentos de par y los momentos de todas las fuerzas con respecto a cualquier punto O localizado en o fuera del cuerpo.

Ecuaciones escalares de equilibrio. Si todas las fuerzas externas y los momentos de par aplicados son expresados en forma vectorial cartesiana y sustituidos en las ecuaciones 5-5, tenemos

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} &= \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \Sigma \mathbf{M}_O &= \Sigma M_x \mathbf{i} + \Sigma M_y \mathbf{j} + \Sigma M_z \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Como las componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} son independientes una de otra, las ecuaciones anteriores serán satisfechas siempre que

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma F_z &= 0 \end{aligned} \quad (5-6a)$$

y

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= 0 \\ \Sigma M_y &= 0 \\ \Sigma M_z &= 0 \end{aligned} \quad (5-6b)$$

Estas seis *ecuaciones escalares de equilibrio* pueden usarse para resolver cuando mucho seis incógnitas mostradas en el diagrama de cuerpo libre. Las ecuaciones 5-6a expresan el hecho de que la suma de las componentes externas de fuerza actuando en las direcciones x , y , y z debe ser cero, y las ecuaciones 5-6b requieren que la suma de las componentes de momento con respecto a los ejes x , y y z sea cero.

5.7 Restricciones para un cuerpo rígido

Para asegurar el equilibrio de un cuerpo rígido, no sólo es necesario satisfacer las ecuaciones de equilibrio, sino que el cuerpo también esté sostenido o restringido adecuadamente por sus soportes. Algunos cuerpos pueden tener más soportes que los necesarios por equilibrio, mientras que otros pueden no tener suficientes o estar arreglados de tal manera que ocasionen el colapso del cuerpo. Cada uno de esos casos será analizado en seguida.

Restricciones redundantes. Cuando un cuerpo tiene soportes redundantes, es decir, más de los necesarios para mantenerlo en equilibrio, se vuelve estáticamente indeterminado. *Estáticamente indeterminado* significa que habrá más cargas desconocidas sobre el cuerpo que ecuaciones de equilibrio disponibles para su solución. Por ejemplo, el problema bidimensional, figura 5-26a, y el problema tridimensional, figura 5-26b, mostrados junto con sus diagramas de cuerpo libre, son ambos estáticamente indeterminados debido a las reacciones adicionales en los soportes. En el caso bidimensional, hay cinco incógnitas: M_A , A_x , A_y , B_y y C_y , para las cuales sólo pueden ser escritas tres ecuaciones de equilibrio ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, y $\Sigma M_O = 0$, ecuaciones 5-2). El problema tridimensional tiene ocho incógnitas, para las cuales sólo pueden ser escritas seis ecuaciones de equilibrio, ecuaciones 5-6. Las ecuaciones adicionales necesarias para resolver problemas indeterminados del tipo mostrado en la figura 5-26 se obtienen generalmente a partir de las condiciones de deformación presentes en los puntos de soporte. Estas ecuaciones implican las propiedades físicas del cuerpo que se estudian en temas tratados en la mecánica de la deformación, tal como “mecánica de materiales”.*

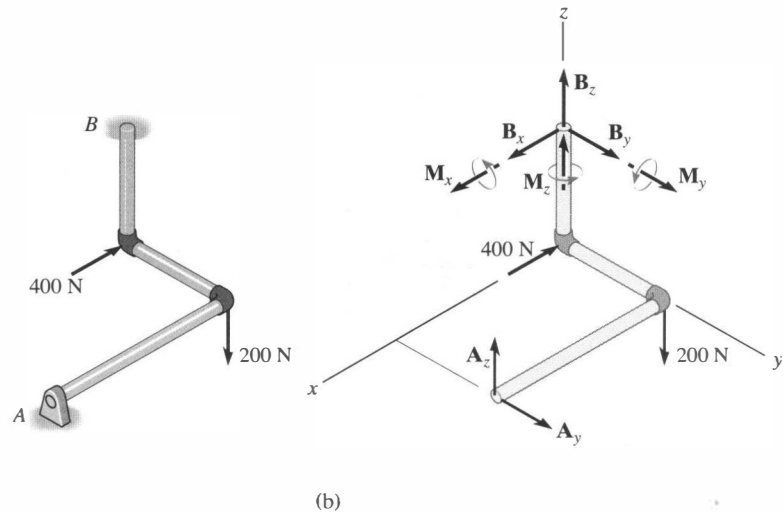
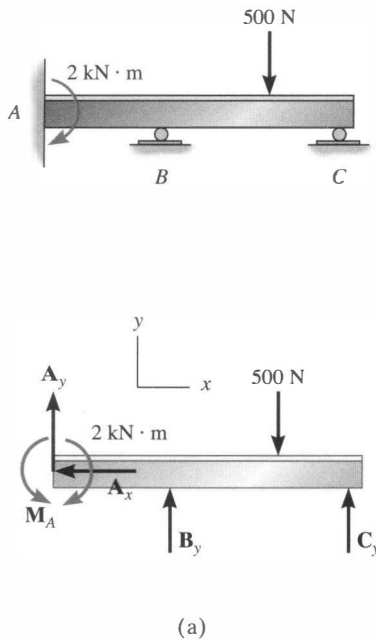


Fig. 5-26

*Vea R. C. Hibbeler, *Mecánica de Materiales*, 5a edición (Pearson Education/Prentice Hall, Inc., 2003).

Restricciones impropias. En algunos casos, puede haber tantas fuerzas desconocidas sobre el cuerpo como ecuaciones de equilibrio; sin embargo, puede presentarse *inestabilidad* del cuerpo debido a *restricciones impropias* de los soportes. En el caso de problemas tridimensionales, el cuerpo está impropriamente restringido si *todas* las reacciones en los soportes *intersecan un eje común*. En problemas bidimensionales, este eje es *perpendicular* al plano de las fuerzas y, por tanto, aparece como un punto. Por consiguiente, cuando todas las fuerzas de reacción son *concurrentes* en este punto, el cuerpo está restringido de modo impropio. Ejemplos de ambos casos están dados en la figura 5-27. A partir de los diagramas de cuerpo libre se advierte que la suma de momentos con respecto al eje x , figura 5-27a, o punto O , figura 5-27b, *no* será igual a cero; se tendrá entonces una rotación con respecto al eje x o al punto O . * Además, en ambos casos, resulta *imposible* determinar *completamente* todas las incógnitas ya que se puede escribir una ecuación de momento que *no contiene* ninguna de las reacciones desconocidas, y como resultado, esto reduce el número de ecuaciones de equilibrio disponibles en una.

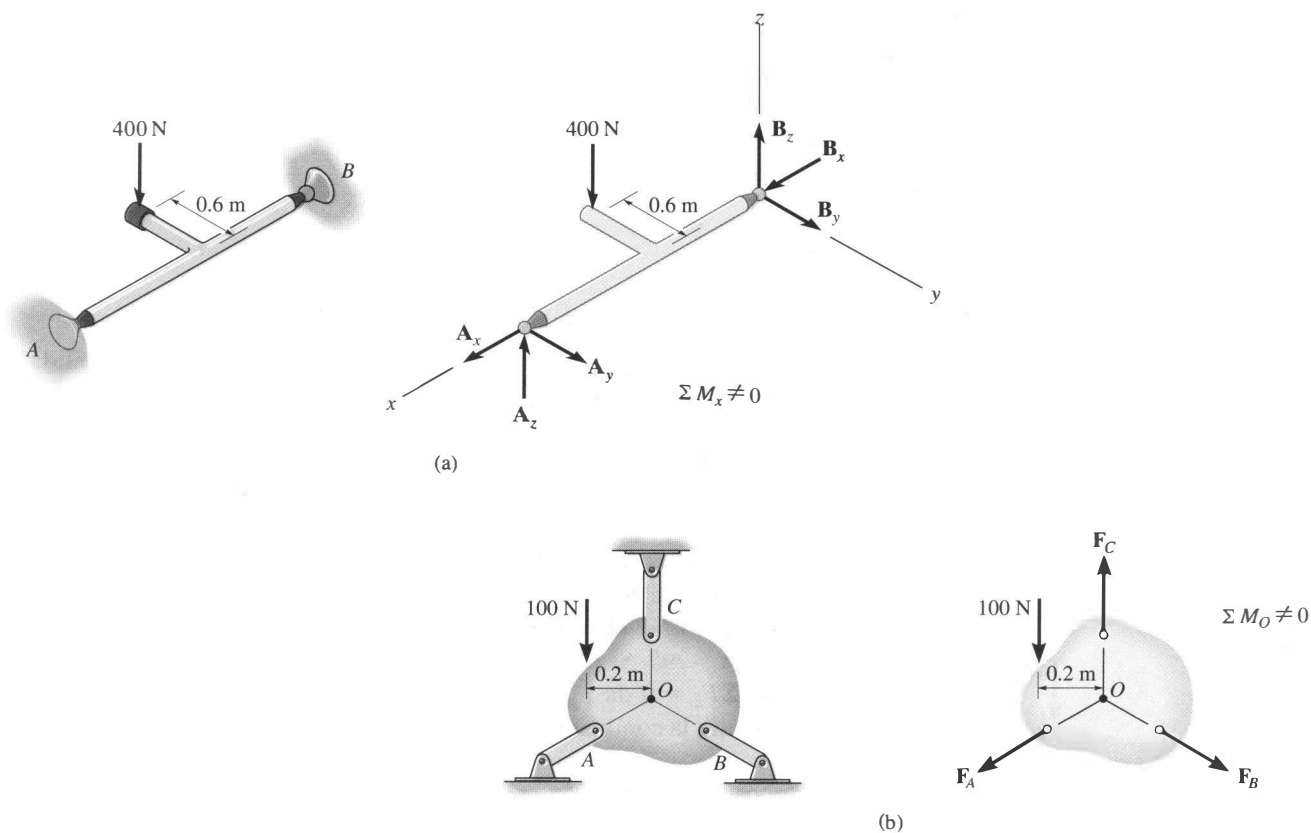


Fig. 5-27

*Para el problema tridimensional, $\Sigma M_x = (400 \text{ N})(0.6 \text{ m}) \neq 0$, y para el problema bidimensional, $\Sigma M_O = (100 \text{ N})(0.2 \text{ m}) \neq 0$.

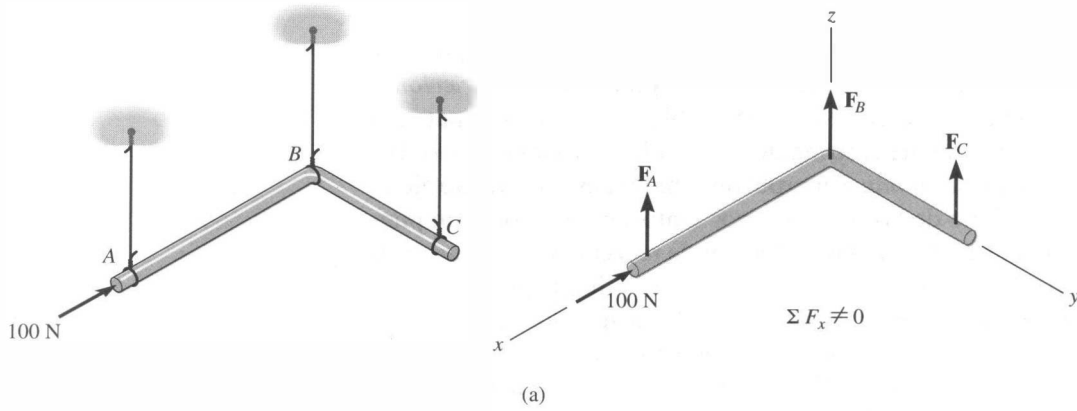


Fig. 5-28

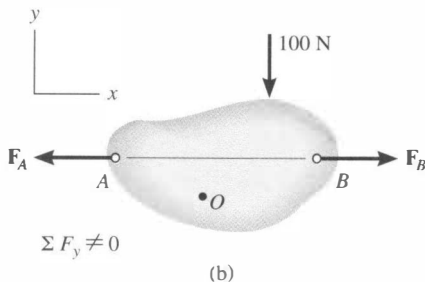
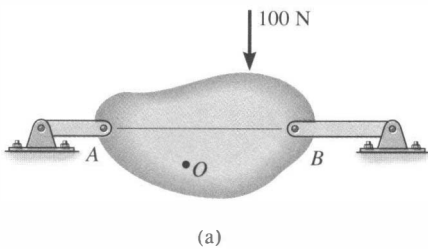
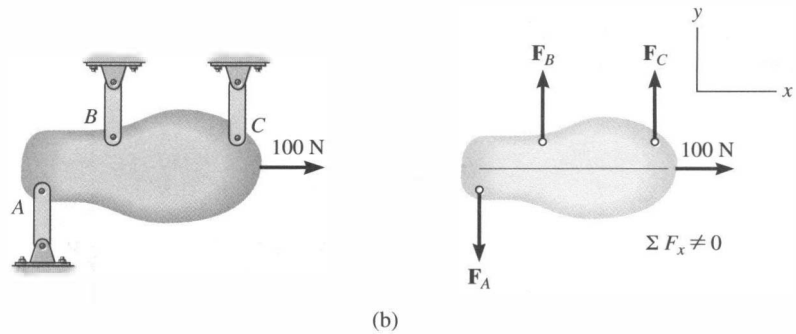


Fig. 5-29

Otra manera en que una restricción impropia conduce a inestabilidad ocurre cuando todas las *fuerzas de reacción* son *paralelas*. Ejemplos tridimensionales y bidimensionales de esto se muestran en la figura 5-28. En ambos casos, la suma de fuerzas a lo largo del eje x no será igual a cero.

En algunos casos, un cuerpo puede tener *menos* fuerzas de reacción que ecuaciones de equilibrio a ser satisfechas. El cuerpo está entonces sólo *parcialmente restringido*. Por ejemplo, considere el cuerpo mostrado en la figura 5-29a con su correspondiente diagrama de cuerpo libre en la figura 5-29b. Si O es un punto no localizado sobre la línea AB , la ecuación $\Sigma F_x = 0$ da $F_A = F_B$, pero $\Sigma M_O = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ no serán satisfechas para la condición de carga, y por tanto, no se mantendrá el equilibrio.

Entonces, una restricción apropiada requiere que (1) las líneas de acción de las fuerzas de reacción no intersequen puntos sobre un eje común, y (2) la fuerzas reactivas no deben ser todas paralelas entre sí. Cuando el número mínimo de fuerzas reactivas es necesario para restringir apropiadamente el cuerpo en consideración, el problema será estáticamente determinado, y por tanto, las ecuaciones de equilibrio pueden ser usadas para determinar *todas* las fuerzas reactivas.

PUNTOS IMPORTANTES

- Siempre trace primero el diagrama de cuerpo libre.
- Si un soporte *previene la traslación* de un cuerpo en una dirección específica, entonces el soporte ejerce una *fuerza* sobre el cuerpo en esa dirección.
- Si *la rotación con respecto a un eje es prevenida*, entonces el soporte ejerce un *momento de par* sobre el cuerpo con respecto al eje.
- Si un cuerpo está sometido a más reacciones desconocidas que ecuaciones disponibles de equilibrio, entonces el problema es *estáticamente indeterminado*.
- Para evitar la inestabilidad de un cuerpo se requiere que las líneas de acción de las fuerzas reactivas no corten un eje común y no sean paralelas entre sí.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Los problemas tridimensionales de equilibrio para un cuerpo rígido pueden ser resueltos usando el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre

- Trace el contorno del cuerpo.
- Muestre todas las fuerzas y los momentos de par que actúan sobre el cuerpo.
- Establezca el origen de los ejes x, y, z en un punto conveniente y oriente los ejes de manera que sean paralelos a tantas de las fuerzas y momentos externos como sea posible.
- Rotule todas las cargas y especifique sus direcciones relativas a los ejes x, y, z . En general, muestre todas las componentes desconocidas con un sentido positivo a lo largo de los ejes x, y, z si el sentido no puede ser determinado.
- Indique las dimensiones del cuerpo necesarias para calcular los momentos de las fuerzas.

Ecuaciones de equilibrio

- Si las componentes x, y, z de fuerza y momento parecen fáciles de determinar, entonces aplique las seis ecuaciones escalares de equilibrio; de otra manera, use las ecuaciones vectoriales.
- No es necesario que el conjunto de ejes seleccionados para la suma de fuerzas coincida con el conjunto de ejes elegidos para la suma de momentos. También, cualquier conjunto de ejes no ortogonales puede ser seleccionado para este fin.
- Elija la dirección de un eje para la suma de momentos de manera tal que interseque la línea de acción de tantas fuerzas desconocidas como sea posible. De esta manera, los momentos de las fuerzas que pasan por puntos sobre este eje y las fuerzas que son paralelas al eje serán entonces cero.
- Si la solución de las ecuaciones de equilibrio resulta en un escalar negativo para una magnitud de fuerza o de momento de par, ello indica que el sentido es contrario al supuesto en el diagrama de cuerpo libre.

EJEMPLO 5.15

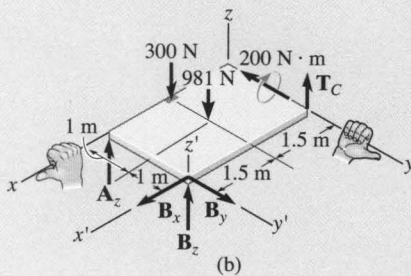
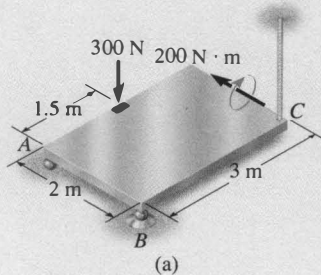


Fig. 5-30

La placa homogénea mostrada en la figura 5-30a tiene una masa de 100 kg y está sometida a una fuerza y un momento de par a lo largo de sus bordes. Si la placa está soportada en el plano horizontal por medio de un rodillo en A , una rótula esférica en B y una cuerda en C , determine las componentes de reacción en los soportes.

Solución (Análisis escalar)

Diagrama de cuerpo libre. Hay cinco reacciones desconocidas actuando sobre la placa, como se muestra en la figura 5-30b. Se supone que cada una de esas reacciones actúa en una dirección coordinada positiva.

Ecuaciones de equilibrio. Como la geometría tridimensional es bastante simple, un *análisis escalar* proporciona una *solución directa* a este problema. Una suma de fuerzas a lo largo de cada eje resulta en

$$\Sigma F_x = 0; \quad B_x = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad B_y = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad A_z + B_z + T_C - 300 \text{ N} - 981 \text{ N} = 0 \quad (1)$$

Recuerde que el momento de una fuerza con respecto a un eje es igual al producto de la magnitud de la fuerza y la distancia perpendicular (brazo de momento) de la línea de acción de la fuerza al eje. El sentido del momento es determinado por la regla de la mano derecha. También, las fuerzas que son paralelas a un eje o pasan por él no generan momento con respecto al eje. Por tanto, al sumar momentos de las fuerzas en el diagrama de cuerpo libre, con los momentos positivos actuando a lo largo de los ejes x o y positivos, tenemos

$$\Sigma M_x = 0; \quad T_C(2 \text{ m}) - 981 \text{ N}(1 \text{ m}) + B_z(2 \text{ m}) = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma M_y = 0;$$

$$300 \text{ N}(1.5 \text{ m}) + 981 \text{ N}(1.5 \text{ m}) - B_z(3 \text{ m}) - A_z(3 \text{ m}) - 200 \text{ N} \cdot \text{m} = 0 \quad (3)$$

Las componentes de fuerza en B pueden ser eliminadas si se usan los ejes x' , y' , z' . Obtenemos

$$\Sigma M_{x'} = 0; \quad 981 \text{ N}(1 \text{ m}) + 300 \text{ N}(2 \text{ m}) - A_z(2 \text{ m}) = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma M_{y'} = 0;$$

$$-300 \text{ N}(1.5 \text{ m}) - 981 \text{ N}(1.5 \text{ m}) - 200 \text{ N} \cdot \text{m} + T_C(3 \text{ m}) = 0 \quad (5)$$

Resolviendo las ecuaciones 1, 2 y 3, o las más convenientes 1, 4 y 5, resulta

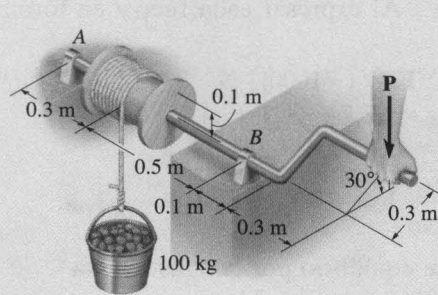
$$A_z = 790 \text{ N} \quad B_z = -217 \text{ N} \quad T_C = 707 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

El signo negativo indica que B_z actúa hacia abajo.

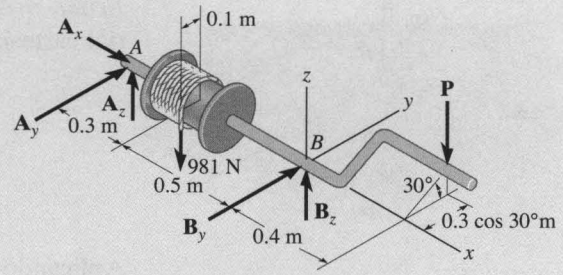
Observe que la solución de este problema no requiere el uso de una suma de momentos con respecto al eje z . La placa está parcialmente restringida ya que los soportes no pueden impedir que gire alrededor del eje z si se aplica una fuerza en el plano x - y .

EJEMPLO 5.16

El malacate que muestra la figura 5-31a está soportado por un cojinete de empuje en A y un cojinete liso en B , los cuales están alineados apropiadamente sobre la flecha. Determine la magnitud de la fuerza vertical P que debe aplicarse al manubrio para mantener el equilibrio de la cubeta de 100 kg. También calcule las reacciones en las chumaceras.



(a)



(b)

Fig. 5-31

Solución (Análisis escalar)

Diagrama de cuerpo libre. Como los cojinetes en A y B están alineados correctamente, en esos soportes *sólo* ocurren reacciones de fuerza, figura 5-31b. ¿Por qué no hay reacciones de momento?

Ecuaciones de equilibrio. Sumando momentos con respecto al eje x se obtiene una solución directa para P . ¿Por qué? Para efectuar una suma escalar de momentos, es necesario determinar el momento de cada fuerza como el producto de la magnitud de la fuerza y la *distancia perpendicular* del eje x a la línea de acción de la fuerza. Usando la regla de la mano derecha y suponiendo que los momentos positivos actúan en la dirección $+\mathbf{i}$, tenemos

$$\begin{aligned}\Sigma M_x = 0; \quad 981 \text{ N}(0.1 \text{ m}) - P(0.3 \cos 30^\circ \text{ m}) &= 0 \\ P &= 377.6 \text{ N} \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

Al emplear este resultado y sumar momentos con respecto a los ejes y y z resulta

$$\begin{aligned}\Sigma M_y = 0; \\ -981 \text{ N}(0.5 \text{ m}) + A_z(0.8 \text{ m}) + (377.6 \text{ N})(0.4 \text{ m}) &= 0 \\ A_z &= 424.3 \text{ N} \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

$$\Sigma M_z = 0; \quad -A_y(0.8 \text{ m}) = 0 \quad A_y = 0$$

Las reacciones en B son determinadas mediante una suma de fuerzas usando estos resultados.

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0; \quad A_x &= 0 \\ \Sigma F_y = 0; \quad 0 + B_y &= 0 \quad B_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0; \quad 424.3 - 981 + B_z - 377.6 &= 0 \quad B_z = 934 \text{ N} \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

EJEMPLO 5.17

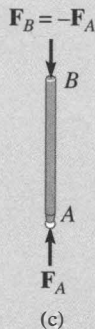
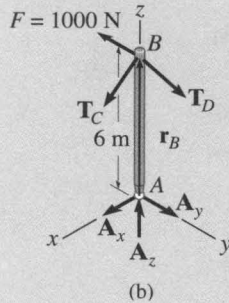
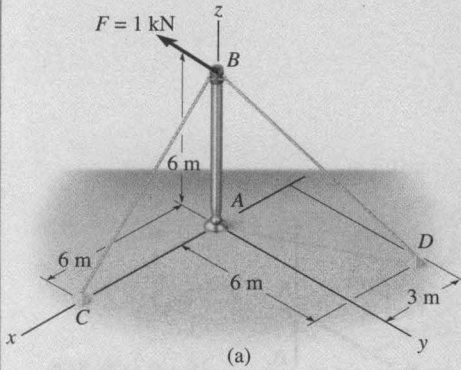


Fig. 5-32

Determine la tensión presente en los cables BC y BD y las reacciones en la junta A de rótula esférica para el mástil mostrado en la figura 5-32a.

Solución (Análisis vectorial)

Diagrama de cuerpo libre. Hay cinco magnitudes de fuerzas desconocidas mostradas en el diagrama de cuerpo libre, figura 5-32b.

Ecuaciones de equilibrio. Al expresar cada fuerza en forma vectorial cartesiana tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \{-1000\mathbf{j}\} \text{ N} \\ \mathbf{F}_A &= A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \\ \mathbf{T}_C &= 0.707T_C\mathbf{i} - 0.707T_C\mathbf{k} \\ \mathbf{T}_D &= T_D\left(\frac{\mathbf{r}_{BD}}{r_{BD}}\right) = -\frac{3}{9}T_D\mathbf{i} + \frac{6}{9}T_D\mathbf{j} - \frac{6}{9}T_D\mathbf{k} \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación de equilibrio por fuerzas resulta

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{F} + \mathbf{F}_A + \mathbf{T}_C + \mathbf{T}_D &= \mathbf{0} \\ (A_x + 0.707T_C - \frac{3}{9}T_D)\mathbf{i} + (-1000 + A_y + \frac{6}{9}T_D)\mathbf{j} \\ &+ (A_z - 0.707T_C - \frac{6}{9}T_D)\mathbf{k} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\Sigma F_x = 0; \quad A_x + 0.707T_C - \frac{3}{9}T_D = 0 \tag{1}$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad A_y + \frac{6}{9}T_D - 1000 = 0 \tag{2}$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad A_z - 0.707T_C - \frac{6}{9}T_D = 0 \tag{3}$$

Sumando momentos con respecto al punto A tenemos

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{M}_A = \mathbf{0}; \quad \mathbf{r}_B \times (\mathbf{F} + \mathbf{T}_C + \mathbf{T}_D) &= \mathbf{0} \\ 6\mathbf{k} \times (-1000\mathbf{j} + 0.707T_C\mathbf{i} - 0.707T_C\mathbf{k} \\ &- \frac{3}{9}T_D\mathbf{i} + \frac{6}{9}T_D\mathbf{j} - \frac{6}{9}T_D\mathbf{k}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Evaluando el producto cruz y combinando términos resulta

$$(-4T_D + 6000)\mathbf{i} + (4.24T_C - 2T_D)\mathbf{j} = \mathbf{0}$$

$$\Sigma M_x = 0; \quad -4T_D + 6000 = 0 \tag{4}$$

$$\Sigma M_y = 0; \quad 4.24T_C - 2T_D = 0 \tag{5}$$

La ecuación de momentos con respecto al eje z , $\Sigma M_z = 0$, es satisfecha automáticamente. ¿Por qué? Resolviendo las ecuaciones de la 1 a la 5 tenemos

$$\begin{aligned} T_C &= 707 \text{ N} & T_D &= 1500 \text{ N} & \text{Resp.} \\ A_x &= 0 \text{ N} & A_y &= 0 \text{ N} & A_z &= 1500 \text{ N} & \text{Resp.} \end{aligned}$$

Como el mástil es un miembro de dos fuerzas, figura 5-32c, observe que el valor $A_x = A_y = 0$ podría haber sido determinado *por inspección*.

EJEMPLO 5.18

La barra AB mostrada en la figura 5-33a está sometida a la fuerza de 200 N. Determine las reacciones en la junta de rótula esférica A y la tensión en los cables BD y BE .

Solución (Análisis vectorial)

Diagrama de cuerpo libre. Figura 5-33b.

Ecuaciones de equilibrio. Al representar cada fuerza en el diagrama de cuerpo libre en forma vectorial cartesiana tenemos

$$\mathbf{F}_A = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_E = T_E \mathbf{i}$$

$$\mathbf{T}_D = T_D \mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} = \{-200\mathbf{k}\} \text{ N}$$

Aplicando la ecuación de equilibrio de fuerzas:

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{F}_A + \mathbf{T}_E + \mathbf{T}_D + \mathbf{F} = \mathbf{0} \\ (A_x + T_E)\mathbf{i} + (A_y + T_D)\mathbf{j} + (A_z - 200)\mathbf{k} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\Sigma F_x = 0; \quad A_x + T_E = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad A_y + T_D = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad A_z - 200 = 0 \quad (3)$$

Sumando momentos con respecto al punto A resulta

$$\Sigma \mathbf{M}_A = \mathbf{0}; \quad \mathbf{r}_C \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (\mathbf{T}_E + \mathbf{T}_D) = \mathbf{0}$$

Como $\mathbf{r}_C = \frac{1}{2}\mathbf{r}_B$, entonces

$$(0.5\mathbf{i} + 1\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times (-200\mathbf{k}) + (1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \times (T_E\mathbf{i} + T_D\mathbf{j}) = \mathbf{0}$$

Desarrollando y reordenando términos resulta

$$(2T_D - 200)\mathbf{i} + (-2T_E + 100)\mathbf{j} + (T_D - 2T_E)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\Sigma M_x = 0; \quad 2T_D - 200 = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma M_y = 0; \quad -2T_E + 100 = 0 \quad (5)$$

$$\Sigma M_z = 0; \quad T_D - 2T_E = 0 \quad (6)$$

Al resolver las ecuaciones de la 1 a la 6 obtenemos

$$T_D = 100 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$T_E = 50 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$A_x = -50 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$A_y = -100 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$A_z = 200 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

El signo negativo indica que A_x y A_y tienen un sentido que es opuesto al mostrado en el diagrama de cuerpo libre, figura 5-33b.

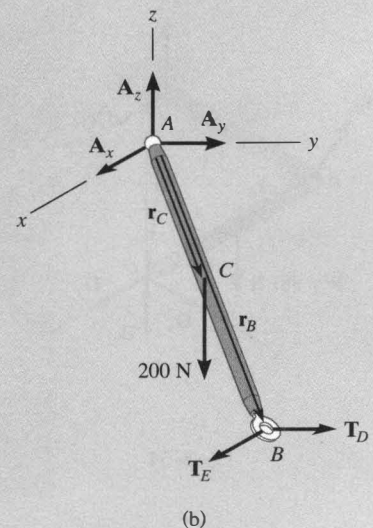
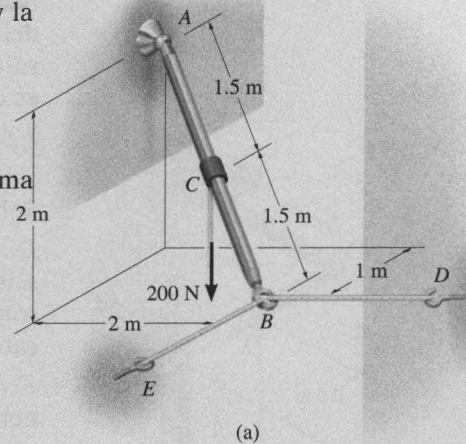
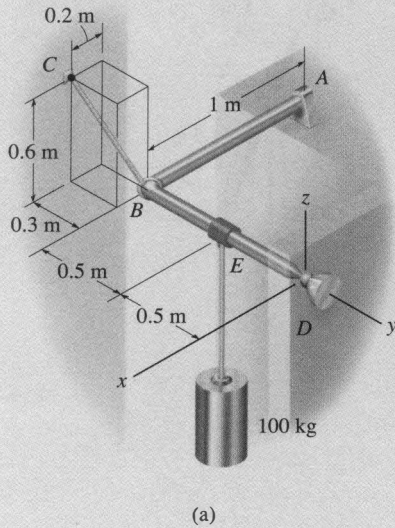
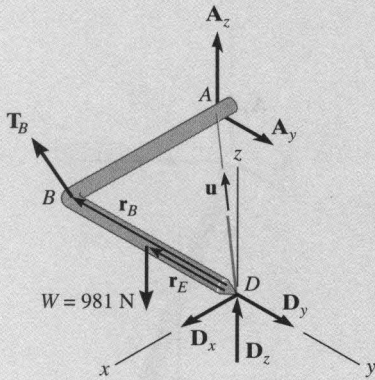


Fig. 5-33

EJEMPLO 5.19



(a)



(b)

Fig. 5-34

La barra doblada en la figura 5-34a está soportada en A por una chumacera lisa, en D por una junta de rótula esférica, y en B por medio del cable BC. Usando sólo una ecuación de equilibrio, obtenga una solución directa para la tensión en el cable BC. La chumacera en A es capaz de ejercer componentes de fuerza sólo en las direcciones z y y ya que está alineada apropiadamente sobre la flecha.

Solución (Análisis vectorial)

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 5-34b, hay seis incógnitas: tres componentes de fuerza causadas por la junta de rótula esférica, dos causadas por la chumacera, y una causada por el cable.

Ecuaciones de equilibrio. La tensión \mathbf{T}_B en el cable se puede obtener directamente sumando momentos con respecto a un eje que pase por los puntos D y A. ¿Por qué? La dirección del eje está definida por el vector unitario \mathbf{u} , donde

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \frac{\mathbf{r}_{DA}}{r_{DA}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \\ &= -0.707\mathbf{i} - 0.707\mathbf{j}\end{aligned}$$

Por tanto, la suma de los momentos con respecto a este eje será cero siempre que

$$\Sigma M_{DA} = \mathbf{u} \cdot \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0$$

Aquí \mathbf{r} representa un vector posición trazado desde cualquier punto sobre el eje DA hasta cualquier punto sobre la línea de acción de la fuerza \mathbf{F} (vea la ecuación 4-11). Con referencia a la figura 5-34b, podemos escribir

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{r}_B \times \mathbf{T}_B + \mathbf{r}_E \times \mathbf{W}) &= 0 \\ (-0.707\mathbf{i} - 0.707\mathbf{j}) \cdot [(-1\mathbf{j}) \times (\frac{0.2}{0.7}T_B\mathbf{i} - \frac{0.3}{0.7}T_B\mathbf{j} + \frac{0.6}{0.7}T_B\mathbf{k}) \\ &\quad + (-0.5\mathbf{j}) \times (-981\mathbf{k})] = 0 \\ (-0.707\mathbf{i} - 0.707\mathbf{j}) \cdot [(-0.857T_B + 490.5)\mathbf{i} + 0.286T_B\mathbf{k}] &= 0 \\ -0.707(-0.857T_B + 490.5) + 0 + 0 &= 0\end{aligned}$$

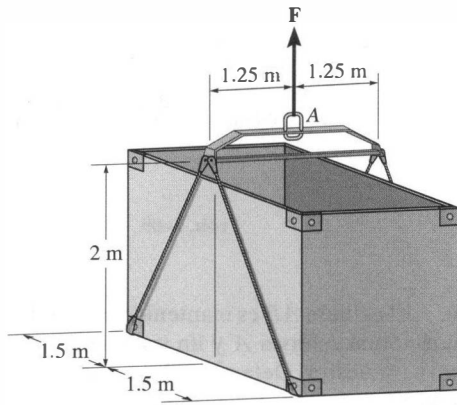
$$T_B = \frac{490.5}{0.857} = 572 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

Debe observarse la ventaja de usar vectores cartesianos para llegar a esta solución. Sería especialmente tedioso determinar la distancia perpendicular del eje DA a la línea de acción de \mathbf{T}_B usando métodos escalares.

Nota: De manera similar, podemos obtener $D_z (= 490.5 \text{ N})$ sumando momentos con respecto a un eje que pase por AB. También, $A_z (= 0)$ se obtiene sumando momentos con respecto al eje y.

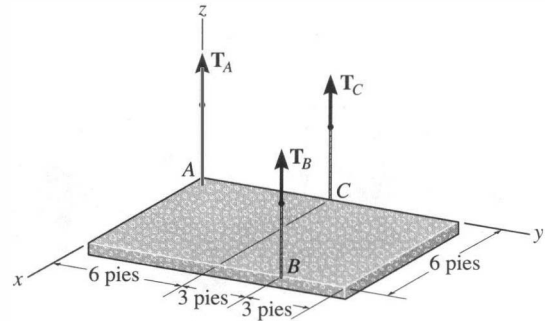
PROBLEMAS

5-63. La carga uniforme tiene una masa de 600 kg y es levantada usando una viga reforzada uniforme de 30 kg y cuatro alambres como se muestra. Determine la tensión en cada segmento de alambre y la fuerza que debe aplicarse a la eslinga ubicada en A .



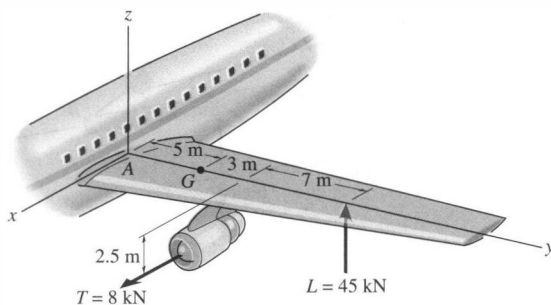
Prob. 5-63

5-65. La losa uniforme de concreto tiene un peso de 5500 lb. Determine la tensión existente en cada uno de los tres cables paralelos soportantes cuando la losa es mantenida en el plano horizontal, como se muestra.



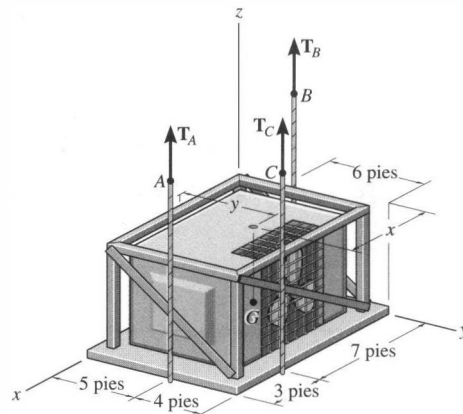
Prob. 5-65

*5-64. El ala del avión a chorro está sometida al empuje $T = 8$ kN de su motor y a la fuerza de levantamiento resultante $L = 45$ kN. Si la masa del ala es de 2.1 Mg y su centro de masa está en G , determine las componentes x, y, z de reacción donde el ala está fija al fuselaje en A .



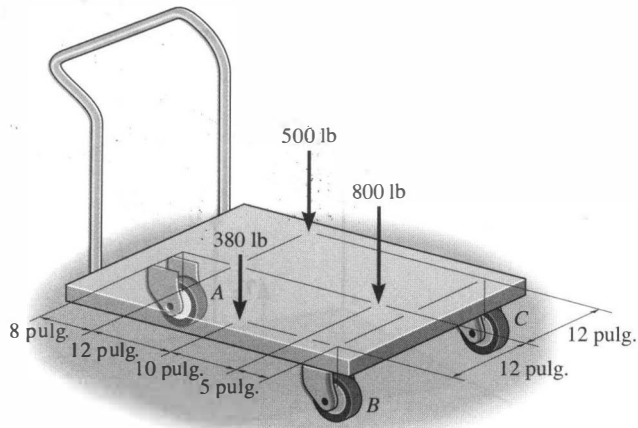
Prob. 5-64

5-66. La unidad acondicionadora de aire es levantada hasta el techo de un edificio usando los tres cables. Si las tensiones en los cables son $T_A = 250$ lb, $T_B = 300$ lb, y $T_C = 200$ lb, determine el peso de la unidad y la ubicación (x, y) de su centro de gravedad G .



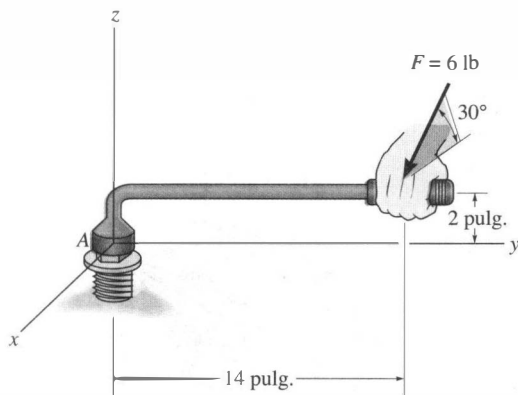
Prob. 5-66

5-67. La plataforma soporta las tres cargas mostradas. Determine las reacciones normales sobre cada una de sus tres ruedas.



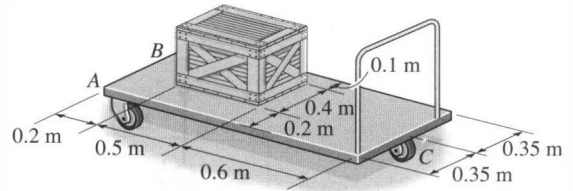
Prob. 5-67

*5-68. La llave se usa para apretar el perno localizado en A. Si la fuerza $F = 6$ lb se aplica al mango como se muestra, determine las magnitudes de la fuerza y el momento resultantes que la cabeza del perno ejerce sobre la llave. La fuerza F está en un plano paralelo al plano x - z .



Prob. 5-68

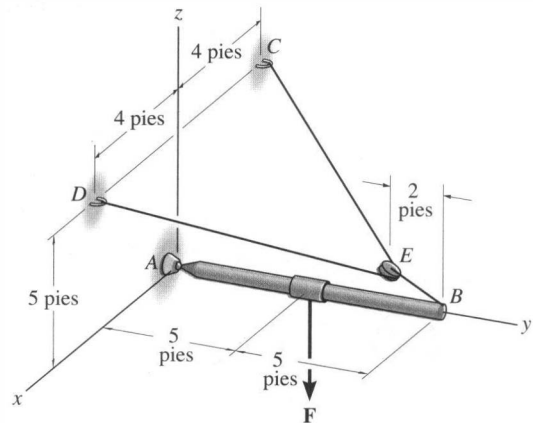
5-69. La carretilla soporta la caja uniforme que tiene una masa de 85 kg. Determine las reacciones verticales sobre las tres ruedas en A, B y C. La rueda en B no se muestra. Ignore la masa de la carretilla y suponga que las ruedas en A y B están en la esquinas posteriores de ésta.



Prob. 5-69

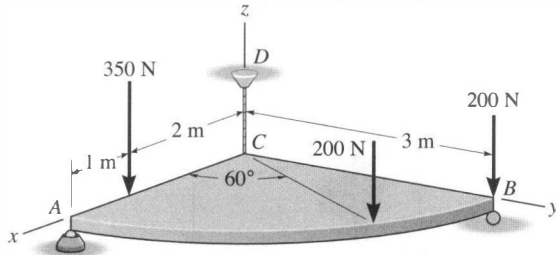
5-70. El aguilón AB es mantenido en equilibrio mediante una rótula esférica A y un sistema de polea y cuerda como se muestra. Determine las componentes x , y , z de la reacción en A y la tensión en el cable DEC si $F = \{-1500\mathbf{k}\}$ lb.

5-71. El cable CED puede resistir una tensión máxima de 800 lb antes de fallar. Determine la máxima fuerza vertical F que puede ser aplicada al aguilón. También, ¿cuáles son las componentes x , y , z de reacción en la rótula esférica A?



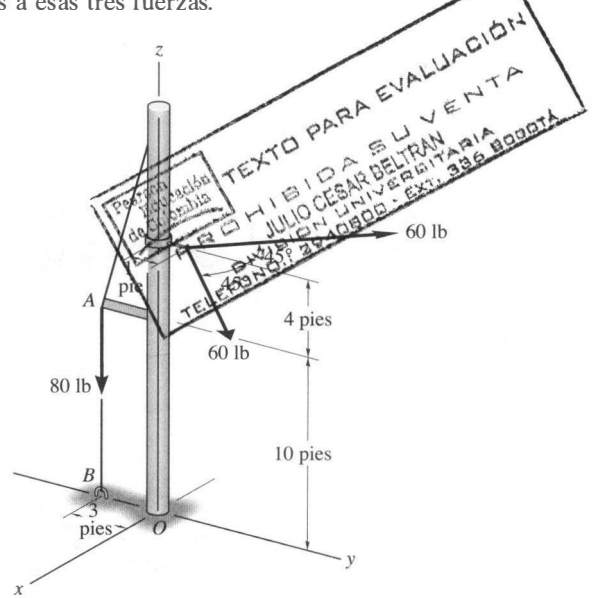
Prob. 5-70

***5-72.** Determine las componentes de fuerza que actúan sobre la rótula esférica en A , la reacción en el rodillo B y la tensión en la cuerda CD necesarias para el equilibrio de la placa de cuadrante circular.



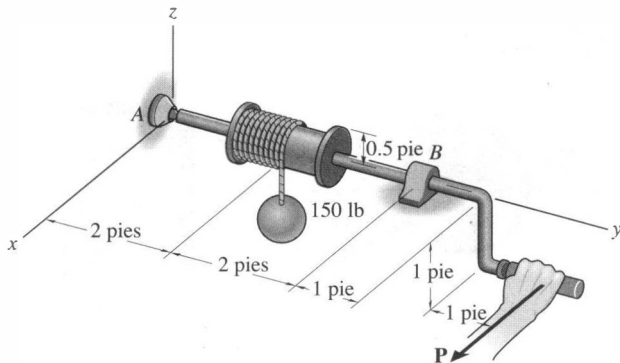
Prob. 5-72

5-74. El poste está sometido a las dos fuerzas de cable de 60 lb, cada una en un plano paralelo al plano $x-y$. Si la tensión en la retenida AB es de 80 lb, determine las componentes de reacción x, y, z en la base O del poste debidas a esas tres fuerzas.



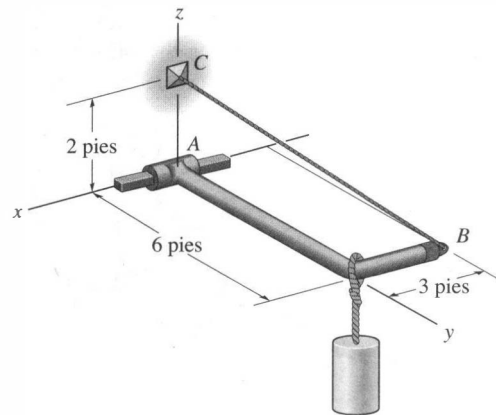
Prob. 5-74

5-73. El malacate está sometido a una carga de 150 lb. Determine la fuerza horizontal P necesaria para mantener la manija en la posición mostrada, y las componentes de reacción en la rótula esférica A y la chumacera lisa B . La chumacera en B está alineada correctamente y sólo ejerce fuerzas de reacción sobre el malacate.



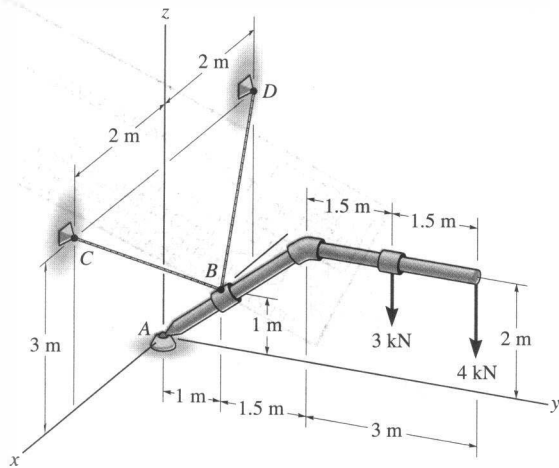
Prob. 5-73

5-75. El miembro AB está soportado mediante un cable BC y en A por una barra *cuadrada* que se ajusta libremente a través del orificio cuadrado localizado en la junta extrema del miembro como se muestra. Determine las componentes de reacción en A y la tensión necesaria en el cable para mantener en equilibrio el cilindro de 800 lb.



Prob. 5-75

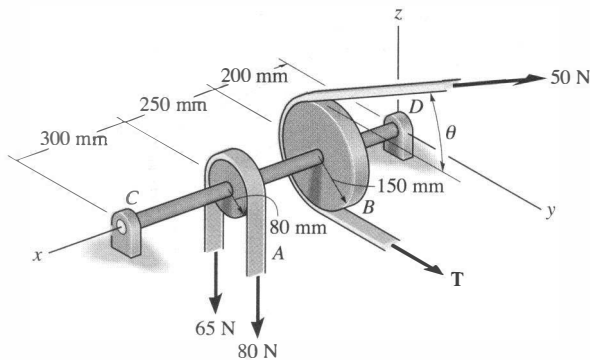
*5-76. La tubería soporta las cargas verticales mostradas. Determine las componentes de reacción en la junta de rótula esférica A y la tensión en los cables de soporte BC y BD .



Prob. 5-76

5-77. Ambas poleas están fijadas a la flecha y conforme ésta gira con velocidad angular constante, la potencia de la polea A es transmitida a la polea B . Determine la tensión horizontal T existente en la banda sobre la polea B y las componentes de reacción x, y, z en la chumacera lisa C y en la chumacera de empuje D si $\theta = 0^\circ$. Las chumaceras están alineadas correctamente y ejercen sólo fuerzas de reacción sobre la flecha.

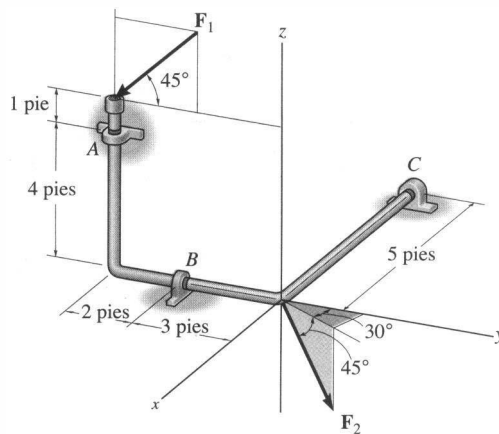
5-78. Ambas poleas están fijadas a la flecha y conforme ésta gira con velocidad angular constante, la potencia de la polea A es transmitida a la polea B . Determine la tensión horizontal T en la banda sobre la polea B y las componentes de reacción x, y, z en la chumacera lisa C y en la chumacera D de empuje, si $\theta = 45^\circ$. Las chumaceras están alineadas correctamente y ejercen sólo reacciones de fuerza sobre la flecha.



Probs. 5-77/78

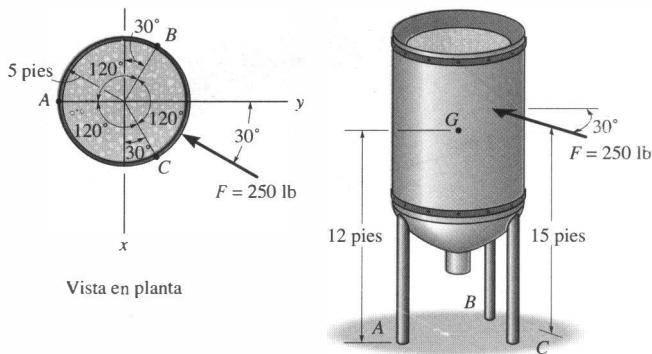
5-79. La barra doblada está soportada en A, B y C por chumaceras lisas. Calcule las componentes de reacción x, y, z en las chumaceras si la barra está sometida a las fuerzas $F_1 = 300$ lb y $F_2 = 250$ lb. F_1 se encuentra en el plano $y-z$. Las chumaceras están alineadas correctamente y ejercen sólo fuerzas de reacción sobre la barra.

*5-80. La barra doblada está soportada en A, B y C por chumaceras lisas. Determine la magnitud de F_2 que hará que la reacción C_y en la chumacera C sea igual a cero. Las chumaceras están alineadas correctamente y ejercen sólo fuerzas reactivas sobre la barra. Haga $F_1 = 300$ lb.



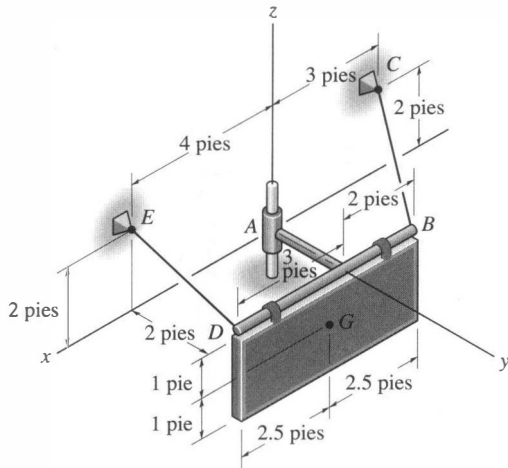
Probs. 5-79/80

5-81. El silo tiene un peso de 3500 lb y centro de gravedad en G . Determine la componente vertical de fuerza que cada uno de los tres puntales en A, B y C ejerce sobre el silo si éste se encuentra sometido a una carga de viento resultante de 250 lb que actúa en la dirección mostrada.



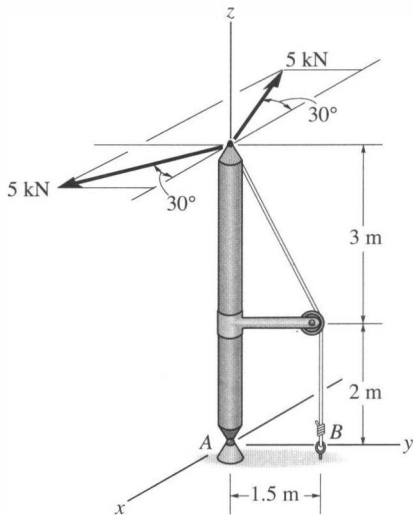
Prob. 5-81

5-82. Determine las tensiones en los cables y las componentes de reacción que actúan sobre el collar liso en A necesarias para mantener el letrero de 50 lb en equilibrio. El centro de gravedad del letrero está en G .



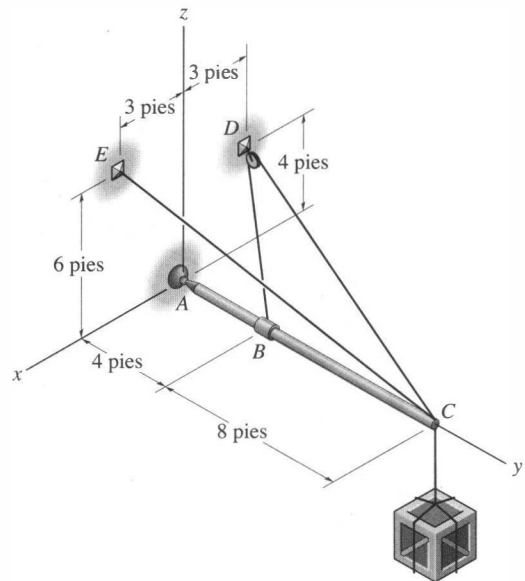
Prob. 5-82

5-83. El poste está soportado por una junta de rótula esférica en A y una retenida en B . Si las cargas de 5 kN se encuentran en un plano que es paralelo al plano x - y , determine las componentes de reacción x , y , z en A y la tensión existente en el cable en B .



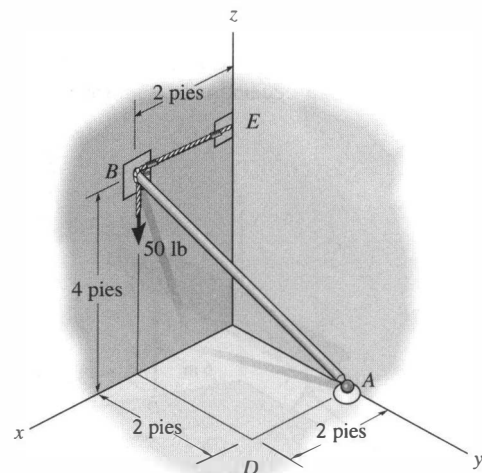
Prob. 5-83

*5-84. El pescante AC está soportado en A por una junta de rótula esférica y por dos cables BDC y CE . El cable BDC es continuo y pasa sobre una polea en D . Calcule la tensión en los cables y las componentes de reacción x , y , z en A si la caja pesa 80 lb.



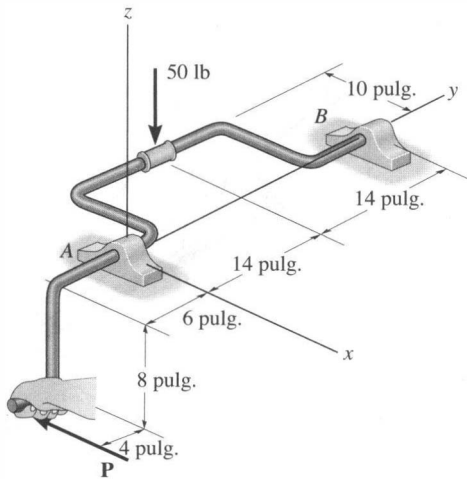
Prob. 5-84

5-85. La barra AB está soportada por una junta de rótula esférica en A y un cable en B . Determine las componentes de reacción x , y , z en esos soportes si la barra está sometida a 50 lb de fuerza vertical como se muestra.



Prob. 5-85

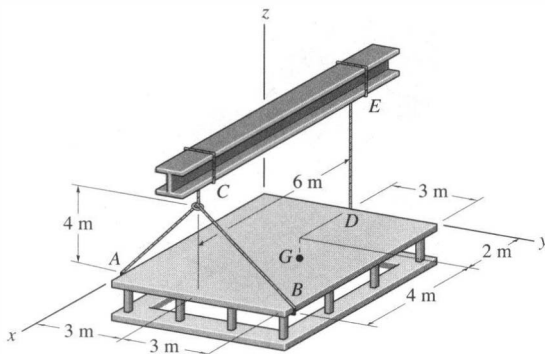
5-86. Una fuerza vertical de 50 lb actúa sobre la manivela. Determine la fuerza horizontal P de equilibrio que debe aplicarse al mango y a las componentes x , y , z de reacción en la chumacera lisa A y en la chumacera B de empuje. Las chumaceras están alineadas correctamente y ejercen sólo fuerzas de reacción sobre la flecha.



Prob. 5-86

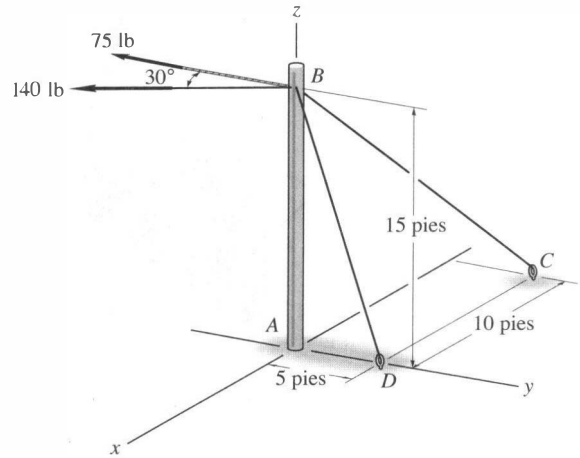
5-87. La plataforma tiene una masa de 3 Mg y su centro de masa está localizado en G . Si es levantada con velocidad constante usando los tres cables, determine la fuerza presente en cada uno de los cables.

***5-88.** La plataforma tiene una masa de 2 Mg y centro de masa en G . Si es levantada usando los tres cables, determine la fuerza presente en cada cable. Encuentre cada fuerza usando una sola ecuación de equilibrio de momentos.



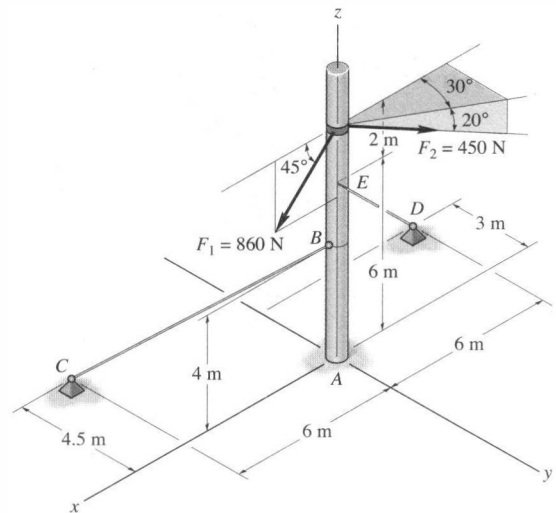
Probs. 5-87/88

5-89. Los cables ejercen las fuerzas mostradas sobre el poste. Suponiendo que el poste está soportado por una rótula esférica en su base, determine las componentes de reacción en A . Las fuerzas de 140 lb y 75 lb se encuentran en un plano horizontal.



Prob. 5-89

5-90. El poste está sometido a las dos fuerzas mostradas. Determine las componentes de reacción en A suponiendo que el soporte es una rótula esférica. Calcule también la tensión en cada una de las retenidas BC y ED .



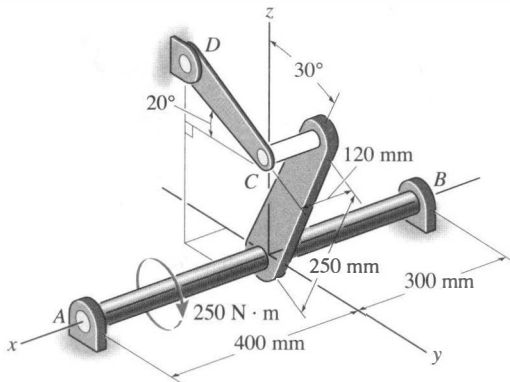
Prob. 5-90

REPASO DEL CAPÍTULO

- **Diagrama de cuerpo libre.** Antes de analizar cualquier problema de equilibrio es necesario trazar primero un diagrama de cuerpo libre. Este diagrama es una forma delineada que muestra todas las fuerzas y los momentos de par que actúan sobre el cuerpo. Recuerde que un soporte ejercerá una *fuerza* sobre el cuerpo en una dirección particular si previene la *traslación* del cuerpo en esa dirección, y ejercerá un *momento de par* sobre el cuerpo si previene una *rotación*. Los ángulos usados para resolver fuerzas, y las dimensiones aplicadas para tomar momentos de las fuerzas, también deben mostrarse en el diagrama de cuerpo libre.
- **Dos dimensiones.** Normalmente, las tres ecuaciones escalares de equilibrio, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_o = 0$, pueden aplicarse al resolver problemas en dos dimensiones, ya que la geometría es fácil de visualizar. Para encontrar la solución más directa, trate de sumar fuerzas a lo largo de un eje que elimine tantas fuerzas desconocidas como sea posible. Sume momentos con respecto a un punto O que pase por la línea de acción de tantas fuerzas desconocidas como sea posible.
- **Tres dimensiones.** En tres dimensiones, a menudo es conveniente usar un análisis vectorial cartesiano para aplicar las ecuaciones de equilibrio. Para hacer esto, exprese primero, en forma de vector cartesiano, cada fuerza y cada momento de par conocidos y desconocidos mostrados en el diagrama de cuerpo libre. Luego haga la suma de fuerzas igual a cero, $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Tome momentos con respecto a un punto O que se encuentre sobre la línea de acción de tantas componentes desconocidas de fuerza como sea posible. Desde el punto O dirija vectores de posición hacia cada fuerza, y luego use el producto cruz para determinar el momento de cada fuerza. Requiera que $\Sigma \mathbf{M}_o = \Sigma \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Las seis ecuaciones escalares de equilibrio son establecidas haciendo las respectivas componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} de esas sumas de fuerzas y de momentos iguales a cero.

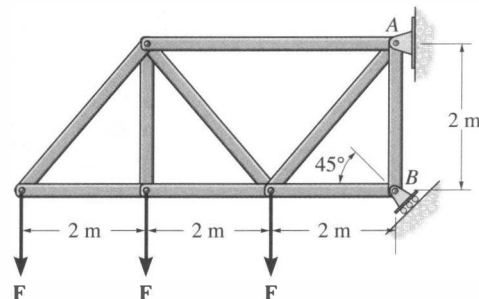
PROBLEMAS DE REPASO

5-91. La flecha está soportada por dos chumaceras lisas A y B y un eslabón corto DC . Si se aplica un momento de par a la flecha como se muestra, determine las componentes de fuerza de reacción en las chumaceras y la fuerza presente en el eslabón. El eslabón se encuentra en un plano paralelo al plano y - z y las chumaceras están adecuadamente alineadas con la flecha.



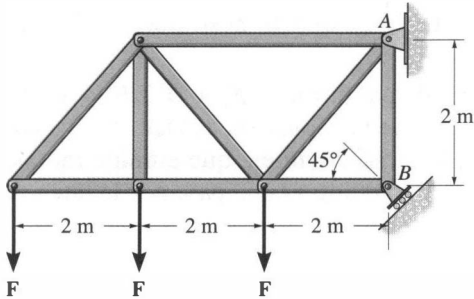
Prob. 5-91

5-92. Determine las componentes de reacción horizontal y vertical en el pasador A y la reacción en el rodillo B requeridas para soportar la armadura. Considere $F = 600$ N.



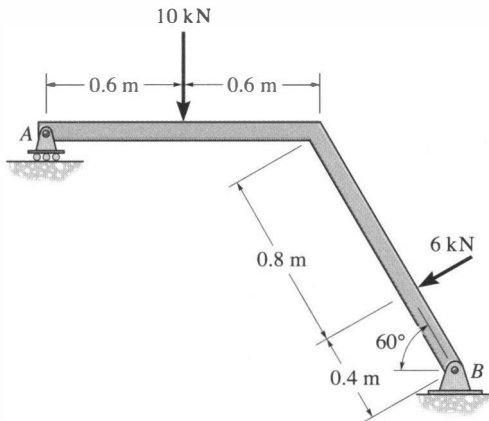
Prob. 5-92

5-93. Si el rodillo localizado en B puede soportar una carga máxima de 3 kN, determine la magnitud más grande de cada una de las tres fuerzas F que pueden ser soportadas por la armadura.



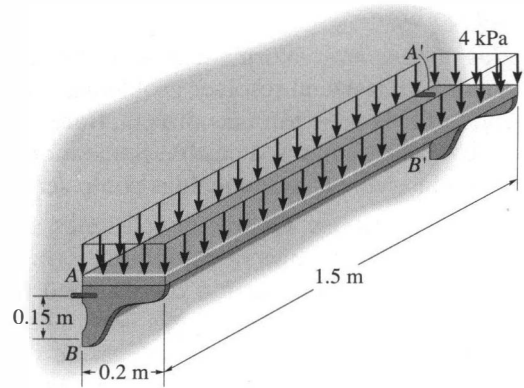
Prob. 5-93

5-94. Determine la reacción normal en el rodillo A y las componentes horizontal y vertical en el pasador B por equilibrio del miembro.



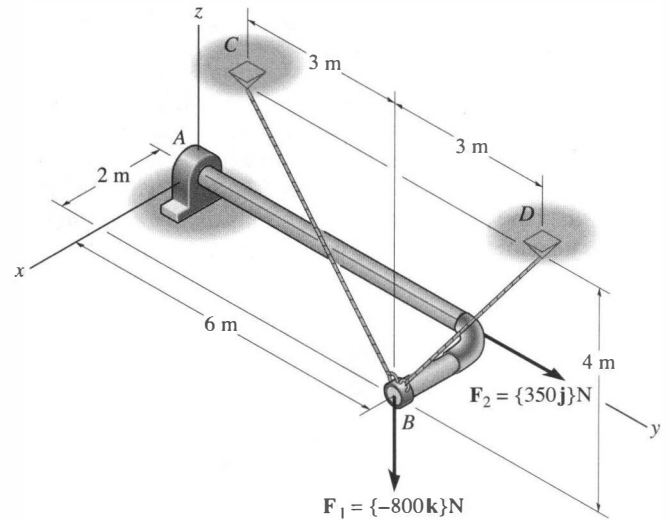
Prob. 5-94

5-95. La repisa simétrica está sometida a una carga uniforme de 4 kPa. El soporte es proporcionado mediante un perno (o pasador) localizado en cada extremo A y A' y por las ménsulas simétricas que se apoyan sobre la pared lisa en ambos lados B y B' . Determine la fuerza resistida por cada perno en la pared y la fuerza normal en B por equilibrio.



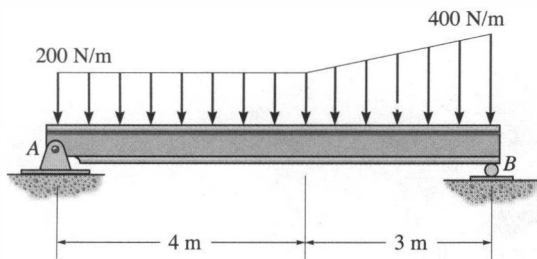
Prob. 5-95

5-96. Determine las componentes x y z de reacción en la chumacera A , y la tensión en las cuerdas BC y BD necesaria para el obtener equilibrio de la barra.



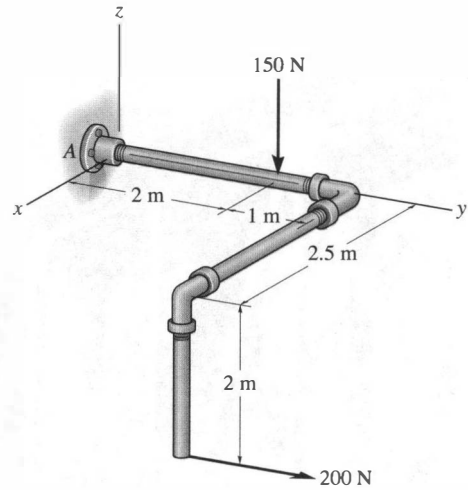
Prob. 5-96

5-97. Determine las reacciones en los soportes A y B por equilibrio de la viga.



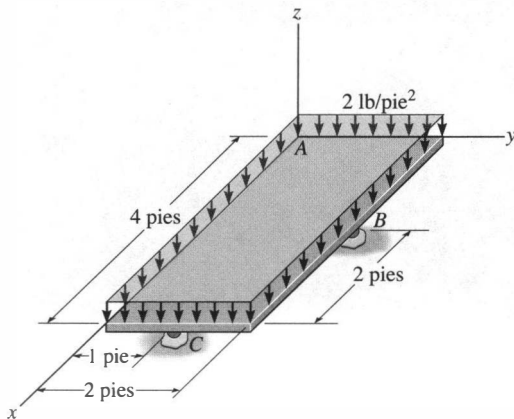
Prob. 5-97

5-99. Determine las componentes x, y, z de reacción en el empotramiento A . La fuerza de 150 N es paralela al eje z y la de 200 N es paralela al eje y .



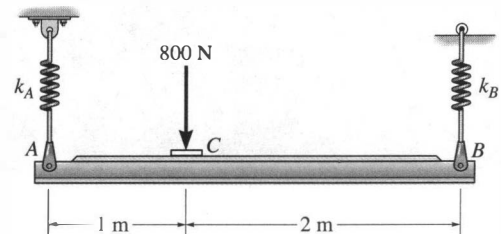
Prob. 5-99

5-98. Determine las componentes de reacción x, y, z en los soportes de bola B y C y en la rótula esférica A (no mostrada) para la placa uniformemente cargada.



Prob. 5-98

*5-100. La viga horizontal está soportada por resortes en sus extremos. Si la rigidez del resorte situado en A es $k_A = 5 \text{ kN/m}$, determine la rigidez requerida en el resorte ubicado en B de manera que si la viga es cargada con la fuerza de 800 N, permanezca en posición horizontal antes y después de la carga.



Prob. 5-100

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Mostrar cómo determinar las fuerzas en los miembros de una armadura usando el método de los nudos y el método de las secciones.
- Analizar las fuerzas que actúan sobre los miembros de bastidores y máquinas compuestas por miembros conectados mediante pasadores.

6.1 Armaduras simples

Una *armadura* es una estructura compuesta de miembros esbeltos unidos entre sí en sus puntos extremos. Los miembros usados comúnmente en construcción consisten en puntales de madera o barras metálicas. Las conexiones en los nudos están formadas usualmente por pernos o soldadura en los extremos de los miembros unidos a una placa común, llamada *placa de unión*, como se muestra en la figura 6-1a, o simplemente pasando un gran perno o pasador a través de cada uno de los miembros, figura 6-1b.

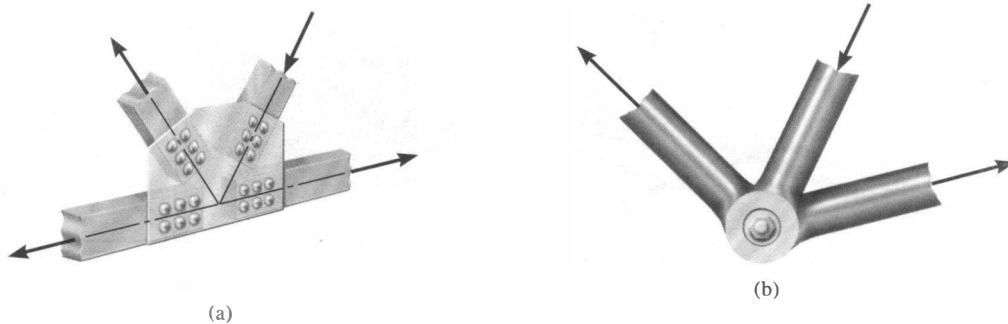


Fig. 6-1

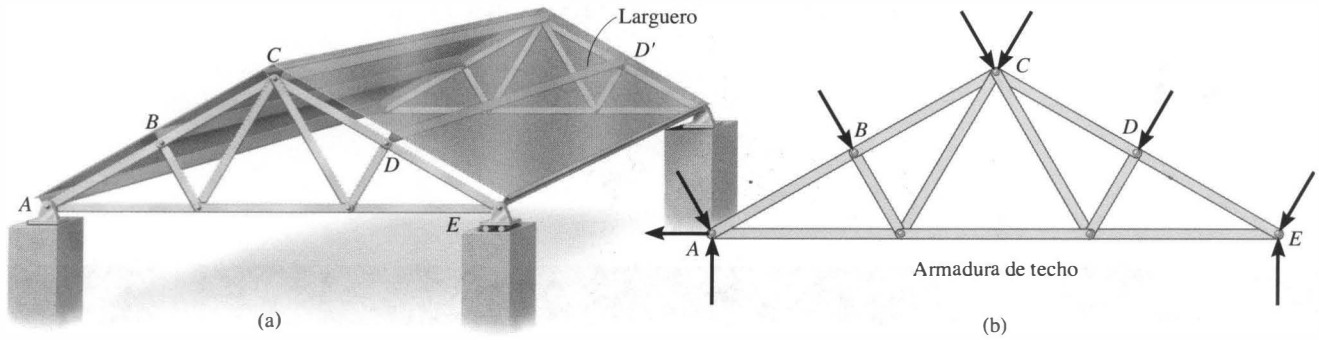


Fig. 6-2

Armaduras planas. Las armaduras *planas* se tienden en un solo plano y a menudo son usadas para soportar techos y puentes. La armadura *ABCDE*, mostrada en la figura 6-2a, es ejemplo de una armadura típica para techo. En esta figura, la carga del techo es transmitida a la armadura *en los nudos* por medio de una serie de *largueros*, como el *DD'*. Como la carga impuesta actúa en el mismo plano que la armadura, figura 6-2b, el análisis de las fuerzas desarrolladas en los miembros de la armadura es bidimensional.

En el caso de un puente, como el mostrado en la figura 6-3a, la carga sobre la cubierta es transmitida primero a los *largueros*, luego a las *vigas de piso*, y finalmente a los *nudos B, C y D* de las dos armaduras laterales de soporte. Igual que en la armadura de techo, la carga en la armadura de puente es también coplanar, figura 6-3b.

Cuando las armaduras de puente o de techo se extienden sobre grandes distancias, comúnmente se usa un soporte o rodillo para soportar un extremo, por ejemplo, el nudo *E* en las figuras 6-2a y 6-3a. Este tipo de soporte permite la expansión o la contracción de los miembros debidas a los cambios de temperatura o a la aplicación de cargas.

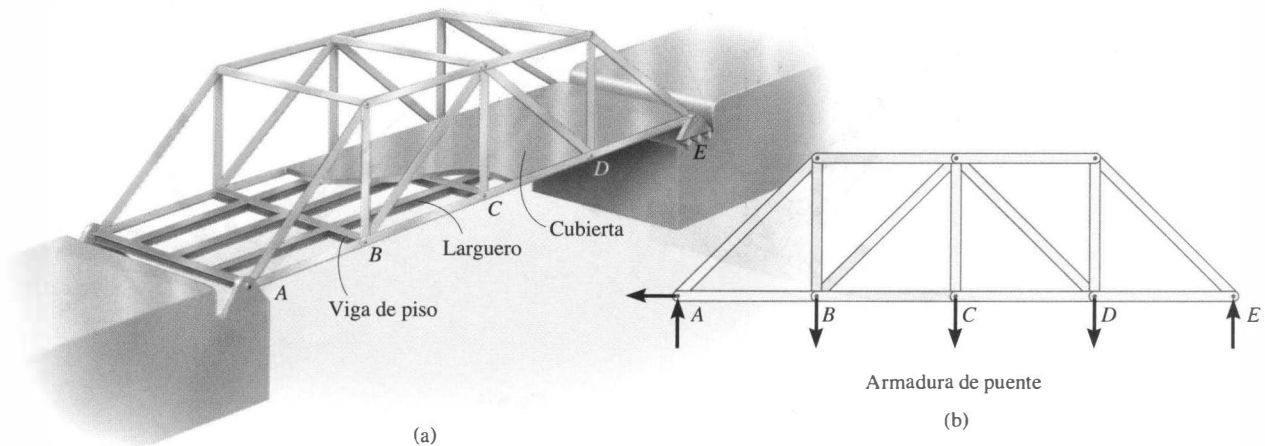


Fig. 6-3

Hipótesis de diseño. Para diseñar los miembros y las conexiones de una armadura, es necesario determinar primero la *fuerza* desarrollada en cada miembro cuando la armadura está sometida a una carga dada. Con respecto a esto, formularemos dos importantes hipótesis:

1. *Todas las cargas están aplicadas en los nudos.* En la mayoría de los casos, como en armaduras de puentes y de techos, esta hipótesis se cumple. A menudo, en el análisis de fuerzas, el peso de los miembros es ignorado ya que las fuerzas soportadas por los miembros son usualmente grandes en comparación con sus pesos. Si el peso del miembro debe ser incluido en el análisis, es generalmente satisfactorio aplicarlo como una fuerza vertical, la mitad de su magnitud aplicada a cada extremo del miembro.
2. *Los miembros están unidos entre sí mediante pasadores lisos.* En los casos en que se usen conexiones con pernos o soldadura, esta hipótesis es satisfactoria siempre que las líneas de los centros de los miembros conectados sean *concurrentes*, como en la figura 6-1a.

Debido a estas dos hipótesis, *cada miembro de armadura actúa como un miembro de dos fuerzas*, y por tanto, las fuerzas en los extremos del miembro deben estar dirigidas a lo largo del eje del miembro. Si la fuerza tiende a *alargar* el miembro, es una *fuerza de tensión* (T), figura 6-4a; mientras que si tiende a *acortarlo*, es una *fuerza de compresión* (C), figura 6-4b. En el diseño real de una armadura, es importante establecer si la fuerza en el miembro es de tensión o de compresión. A menudo, los miembros a compresión deben ser más *robustos* que los miembros a tensión debido al efecto de pandeo o efecto de columna que ocurre cuando un miembro está sujeto a compresión.

Armadura simple. Para prevenir el colapso, la forma de una armadura debe ser rígida. Es claro que la forma *ABCD* de cuatro barras que aparece en la figura 6-5 se colapsará a menos que un miembro diagonal, como el *AC*, se le agregue como soporte. La forma más sencilla que es rígida o estable es un *triángulo*. En consecuencia, una *armadura simple* es construida *comenzando* con un elemento básico triangular, como el *ABC* que se muestra en la figura 6-6, y conectando dos miembros (*AD* y *BD*) para formar un elemento adicional. Con cada elemento adicional que consista en dos miembros y un nudo colocado sobre la armadura, es posible construir una armadura simple.

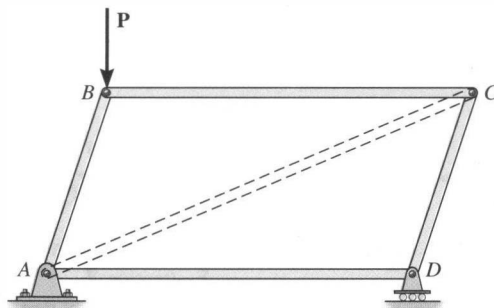


Fig. 6-5

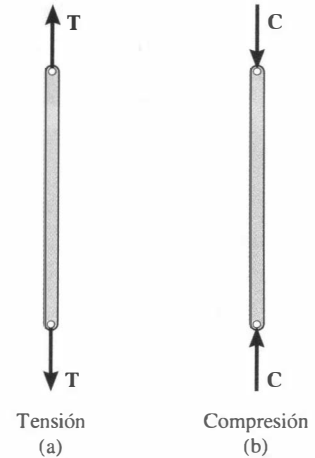


Fig. 6-4

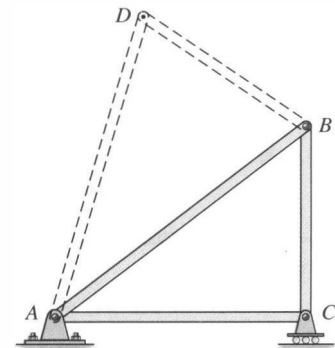


Fig. 6-6

6.2 El método de los nudos



Estas armaduras Howe se usan para soportar el techo del edificio metálico. Observe cómo los miembros confluyen hacia un punto común sobre la placa de nudo y cómo los largueros de techo transmiten la carga a los nudos.

Para analizar o diseñar una armadura, debemos obtener la fuerza en cada uno de sus miembros. Si fuésemos a considerar un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura, entonces las fuerzas en los miembros serían *fuerzas internas*, y no podrían obtenerse a partir de un análisis de equilibrio. Si en vez de esto consideramos el equilibrio de un nudo de la armadura, entonces una fuerza de miembro se vuelve una *fuerza externa* en el diagrama de cuerpo libre del nudo, y las ecuaciones de equilibrio pueden ser aplicadas para obtener su magnitud. Esta es la base del *método de los nudos*.

Como los miembros de la armadura son todos miembros rectos de dos fuerzas que se tienden en el mismo plano, el sistema de fuerzas que actúa en cada nudo es *coplanar y concurrente*. En consecuencia, el equilibrio rotatorio o por momento es automáticamente satisfecho en el nudo (o pasador), y sólo es necesario satisfacer $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para garantizar el equilibrio.

Al usar el método de los nudos, es necesario trazar *primero* el diagrama de cuerpo libre del nudo, antes de aplicar las ecuaciones de equilibrio. Para hacer esto, recuerde que la *línea de acción* de cada fuerza de miembro que actúa sobre el nudo es *especificada* a partir de la geometría de la armadura ya que la fuerza en un miembro pasa a lo largo del eje del miembro. Por ejemplo, considere el pasador situado en el nudo *B* de la armadura que aparece en la figura 6-7a. Tres fuerzas actúan sobre el pasador, esto es, la fuerza de 500 N y las fuerzas ejercidas por los miembros *BA* y *BC*. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 6-7b. Como se muestra, F_{BA} está “jalando” al pasador, lo que significa que el miembro *BA* está en *tensión*; mientras que F_{BC} está “empujando” sobre el pasador, y en consecuencia, el miembro *BC* está en *compresión*. Estos efectos son claramente demostrados aislando el nudo con pequeños segmentos del miembro conectado al pasador, figura 6-7c. El jalón o el empuje sobre esos pequeños segmentos indica el efecto del miembro trabajando en tensión o en compresión.

En todos los casos, el análisis debe comenzar en un nudo que tenga por lo menos una fuerza conocida y cuando mucho dos fuerzas desconocidas, como en la figura 6-7b. De esta manera, la aplicación de $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ resulta en dos ecuaciones algebraicas que pueden ser resueltas para las dos incógnitas. Al aplicar esas ecuaciones, el sentido correcto de una fuerza de miembro desconocida puede ser determinado usando uno de dos posibles métodos:

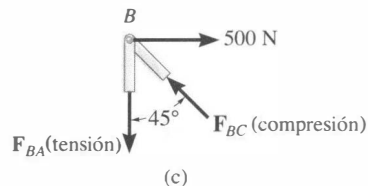
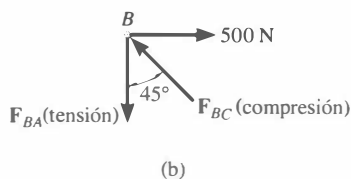
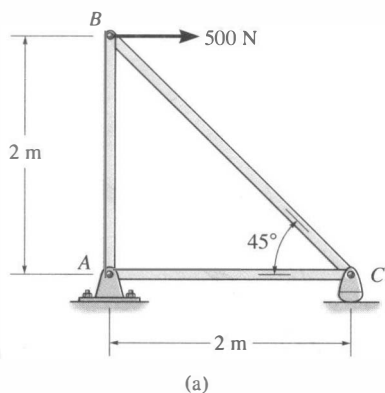


Fig. 6-7

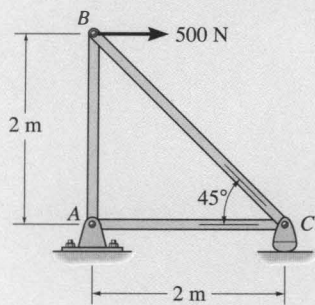
- *Suponga siempre* que las fuerzas desconocidas en los miembros que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre del nudo están en *tensión*, es decir, “jalando” al pasador. Si se hace así, entonces la solución numérica de las ecuaciones de equilibrio darán *escalares positivos para miembros en tensión y escalares negativos para miembros en compresión*. Una vez que la fuerza desconocida de un miembro sea encontrada, aplique su magnitud y su sentido *correctos* (T o C) en los subsecuentes diagramas de cuerpo libre de los nudos.
- El sentido *correcto* de la fuerza desconocida de un miembro puede, en muchos casos, ser determinado “por inspección”. Por ejemplo, F_{BC} en la figura 6-7b debe empujar sobre el pasador (compresión) ya que su componente horizontal, $F_{BC} \sin 45^\circ$, debe equilibrar la fuerza de 500 N ($\Sigma F_x = 0$). De la misma manera, F_{BA} es una fuerza de tensión ya que equilibra a la componente vertical, $F_{BC} \cos 45^\circ$ ($\Sigma F_y = 0$). En casos más complicados, el sentido de la fuerza desconocida de un miembro puede ser *supuesto*; luego, después de aplicar las ecuaciones de equilibrio, el sentido supuesto puede ser verificado a partir de los resultados numéricos. Una respuesta *positiva* indica que el sentido es *correcto*, mientras que una respuesta *negativa* indica que el sentido mostrado en el diagrama de cuerpo libre debe ser *invertido*. Este es el método que usaremos en los problemas de ejemplo de esta sección.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

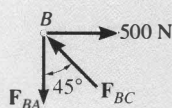
El siguiente procedimiento proporciona una manera típica de analizar una armadura usando el método de los nudos.

- Trace el diagrama de cuerpo libre de un nudo que tenga por lo menos una fuerza conocida y cuando mucho dos fuerzas desconocidas. (Si este nudo está en uno de los soportes, entonces puede ser necesario conocer las reacciones externas en los soportes de la armadura).
- Use uno de los dos métodos descritos líneas arriba para establecer el sentido de una fuerza desconocida.
- Oriente los ejes x y y de manera que las fuerzas en el diagrama de cuerpo libre puedan ser resueltas fácilmente en sus componentes x y y , y luego aplique las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. Obtenga las dos fuerzas de miembro desconocidas y verifique su sentido correcto.
- Continúe con el análisis de cada uno de los otros nudos, donde de nuevo es necesario seleccionar un nudo que tenga cuando mucho dos incógnitas y por lo menos una fuerza conocida.
- Una vez que se encuentra la fuerza en un miembro a partir del análisis de un nudo en uno de sus extremos, el resultado puede usarse para analizar las fuerzas que actúan sobre el nudo en su otro extremo. Recuerde que un miembro en *compresión* “empuja” sobre el nudo y un miembro en *tensión* “jala” al nudo.

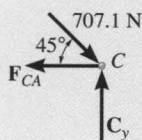
EJEMPLO 6.1



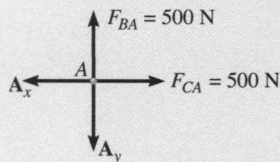
(a)



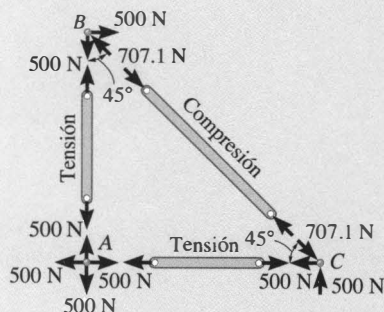
(b)



(c)



(d)



(e)

Fig. 6-8

Determine la fuerza en cada miembro de la armadura mostrada en la figura 6-8a e indique si los miembros están en compresión o en tensión.

Solución

Por inspección de la figura 6-8a, vemos que hay dos fuerzas de miembro desconocidas en el nudo B, dos fuerzas de miembro desconocidas y una fuerza desconocida de reacción en el nudo C, y dos fuerzas de miembro desconocidas y dos fuerzas de reacción desconocidas en el nudo A. Como no debemos tener más de dos incógnitas en el nudo, y por lo menos contar con una fuerza conocida actuando ahí, comenzaremos el análisis en la junta B.

Nudo B. El diagrama de cuerpo libre del pasador ubicado en B se muestra en la figura 6-8b. Aplicando las ecuaciones de equilibrio de nudo, tenemos

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 500 \text{ N} - F_{BC} \text{ sen } 45^\circ = 0 \quad F_{BC} = 707.1 \text{ N (C)} \\ \text{Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{BC} \text{ cos } 45^\circ - F_{BA} = 0 \quad F_{BA} = 500 \text{ N (T)} \\ \text{Resp.} \end{aligned}$$

Como la fuerza en el miembro BC ha sido calculada, podemos proceder a analizar el nudo C para determinar la fuerza en el miembro CA y la reacción en el soporte de mecedora.

Nudo C. A partir del diagrama de cuerpo libre del nudo C, figura 6.8c, tenemos

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad -F_{CA} + 707.1 \text{ cos } 45^\circ \text{ N} = 0 \quad F_{CA} = 500 \text{ N (T)} \\ \text{Resp.} \end{aligned}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad C_y - 707.1 \text{ sen } 45^\circ \text{ N} = 0 \quad C_y = 500 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

Nudo A. Aunque no es necesario, podemos determinar las reacciones en el soporte A usando los resultados de $F_{CA} = 500 \text{ N}$ y $F_{BA} = 500 \text{ N}$. A partir del diagrama de cuerpo libre, figura 6-8d, tenemos

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 500 \text{ N} - A_x = 0 \quad A_x = 500 \text{ N}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 500 \text{ N} - A_y = 0 \quad A_y = 500 \text{ N}$$

Los resultados del análisis están resumidos en la figura 6-8e. Observe que el diagrama de cuerpo libre de cada pasador muestra los efectos de todos los miembros conectados y las fuerzas externas aplicadas al pasador, mientras que el diagrama de cuerpo libre de cada miembro muestra sólo los efectos de los pasadores extremos sobre el miembro.

EJEMPLO 6.2

Determine las fuerzas que actúan en todos los miembros de la armadura mostrada en la figura 6-9a.

Solución

Por inspección, vemos que hay más de dos incógnitas en cada nudo. En consecuencia, las reacciones de soporte en la armadura deben ser determinadas primero. Demuestre que han sido calculadas correctamente en el diagrama de cuerpo libre que aparece en la figura 6-9b. Ahora podemos empezar el análisis en el nudo C. ¿Por qué?

Nudo C. A partir del diagrama de cuerpo libre, figura 6-9c,

$$\begin{aligned} \pm \Sigma F_x = 0; & \quad -F_{CD} \cos 30^\circ + F_{CB} \sin 45^\circ = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; & \quad 1.5 \text{ kN} + F_{CD} \sin 30^\circ - F_{CB} \cos 45^\circ = 0 \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones deben ser resueltas *simultáneamente* para cada una de las dos incógnitas. Sin embargo, observe que puede obtenerse una *solución directa* para una de las fuerzas desconocidas aplicando una suma de fuerzas a lo largo de un eje que sea *perpendicular* a la dirección de la otra fuerza desconocida. Por ejemplo, sumando fuerzas a lo largo del eje y' , que es perpendicular a la dirección de F_{CD} , figura 6-9d, se obtiene una solución directa para F_{CB} .

$$\begin{aligned} + \nearrow \Sigma F_{y'} = 0; \\ 1.5 \cos 30^\circ \text{ kN} - F_{CB} \sin 15^\circ = 0 \quad F_{CB} = 5.02 \text{ kN (C)} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

De la misma manera, sumando fuerzas a lo largo del eje y'' , figura 6-9e, se obtiene una solución directa para F_{CD} .

$$\begin{aligned} + \nearrow \Sigma F_{y''} = 0; \\ 1.5 \cos 45^\circ \text{ kN} - F_{CD} \sin 15^\circ = 0 \quad F_{CD} = 4.10 \text{ kN (T)} \end{aligned}$$

Resp.

Nudo D. Ahora podemos proceder al análisis del nudo D. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 6-9f.

$$\begin{aligned} \pm \Sigma F_x = 0; & \quad -F_{DA} \cos 30^\circ + 4.10 \cos 30^\circ \text{ kN} = 0 \\ & \quad F_{DA} = 4.10 \text{ kN (T)} \quad \text{Resp.} \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; & \quad F_{DB} - 2(4.10 \sin 30^\circ \text{ kN}) = 0 \\ & \quad F_{DB} = 4.10 \text{ kN (T)} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

La fuerza BA en el último miembro puede obtenerse a partir del nudo B o del nudo A. Como un ejercicio, trace el diagrama de cuerpo libre del nudo B, sume las fuerzas en la dirección horizontal, y demuestre que $F_{BA} = 0.776 \text{ kN (C)}$.

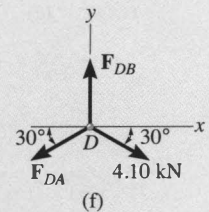
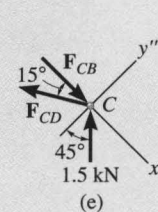
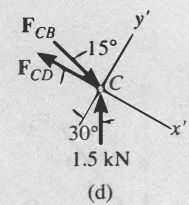
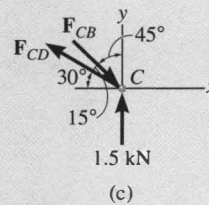
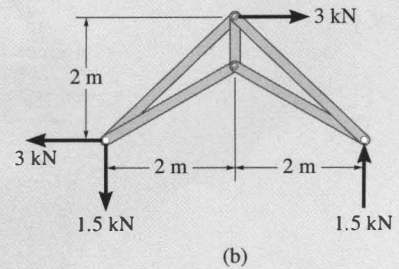
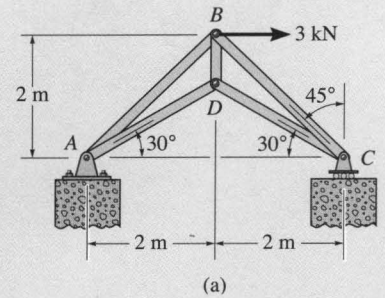


Fig. 6-9

EJEMPLO 6.3

Determine la fuerza en cada miembro de la armadura mostrada en la figura 6-10a. Indique si los miembros están en tensión o en compresión.

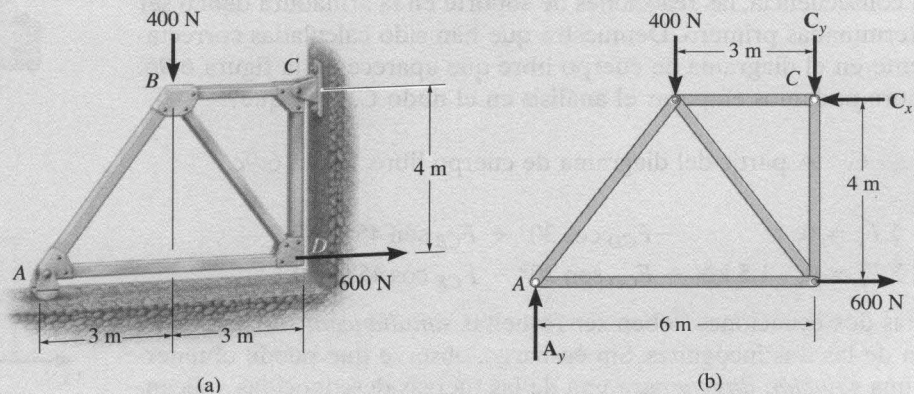


Fig. 6-10

Solución

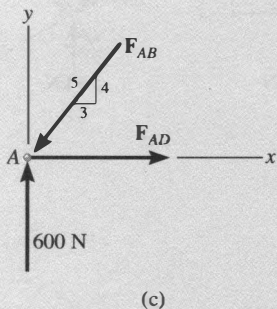
Reacciones en los soportes. Ningún nudo puede ser analizado hasta que se hayan determinado las reacciones en los soportes. ¿Por qué? Un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura está dado en la figura 6-10b. Aplicando las ecuaciones de equilibrio, tenemos

$$\begin{aligned} \pm \Sigma F_x = 0; \quad 600 \text{ N} - C_x = 0 \quad C_x = 600 \text{ N} \\ \downarrow + \Sigma M_C = 0; \quad -A_y(6 \text{ m}) + 400 \text{ N}(3 \text{ m}) + 600 \text{ N}(4 \text{ m}) = 0 \\ A_y = 600 \text{ N} \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 600 \text{ N} - 400 \text{ N} - C_y = 0 \quad C_y = 200 \text{ N} \end{aligned}$$

El análisis puede empezar ahora en cualquiera de los nudos A o C. La selección es arbitraria ya que hay una fuerza conocida y dos fuerzas de miembro desconocidas actuando sobre el pasador en cada uno de esos nudos.

Nudo A (Figura 6-10c). Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, hay tres fuerzas que actúan sobre el pasador ubicado en el nudo A. La inclinación de F_{AB} está determinada a partir de la geometría de la armadura. Por inspección, ¿puede ver usted por qué se supone que esta fuerza es de compresión y F_{AD} de tensión? Aplicando las ecuaciones de equilibrio, tenemos

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 600 \text{ N} - \frac{4}{5} F_{AB} = 0 \quad F_{AB} = 750 \text{ N (C)} \quad \text{Resp.} \\ \pm \Sigma F_x = 0; \quad F_{AD} - \frac{3}{5}(750 \text{ N}) = 0 \quad F_{AD} = 450 \text{ N (T)} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$



Nudo D (Figura 6-10d). El pasador ubicado en este nudo es seleccionado a continuación ya que, por inspección de la figura 6-10a, la fuerza en AD es conocida y las fuerzas desconocidas en DB y DC pueden ser determinadas. Sumando fuerzas en la dirección horizontal, figura 6-10d, tenemos

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad -450 \text{ N} + \frac{3}{5}F_{DB} + 600 \text{ N} = 0 \quad F_{DB} = -250 \text{ N}$$

El signo negativo indica que F_{DB} actúa en *sentido opuesto* al mostrado en la figura 6-10d. Por tanto,

$$F_{DB} = 250 \text{ N} \quad (\text{T}) \quad \text{Resp.}$$

Para determinar F_{DC} , podemos corregir el sentido de F_{DB} y luego aplicar $\Sigma F_y = 0$, o aplicar esta ecuación y retener el signo negativo para F_{DB} , esto es,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -F_{DC} - \frac{4}{5}(-250 \text{ N}) = 0 \quad F_{DC} = 200 \text{ N} \quad (\text{C}) \quad \text{Resp.}$$

Nudo C (Figura 6-10e).

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad F_{CB} - 600 \text{ N} = 0 \quad F_{CB} = 600 \text{ N} \quad (\text{C}) \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 200 \text{ N} - 200 \text{ N} \equiv 0 \quad (\text{comprobación})$$

En la figura 6-10f se presenta un análisis que muestra el diagrama de cuerpo libre correcto para cada pasador y cada miembro.

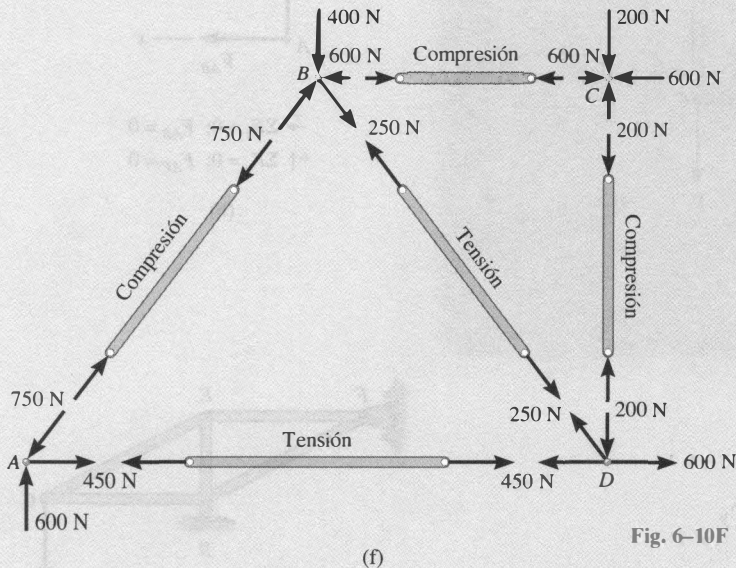
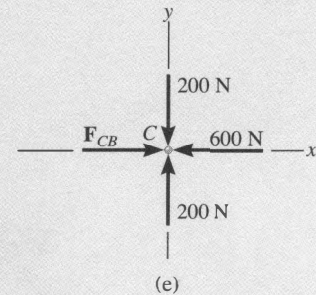
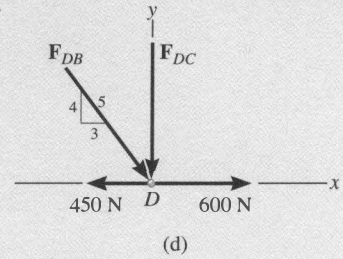


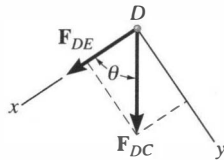
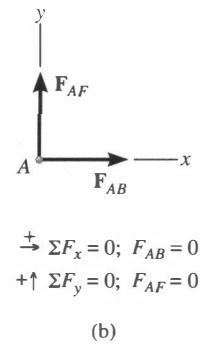
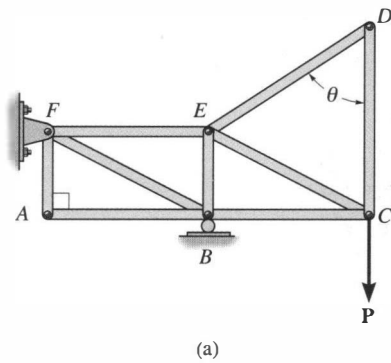
Fig. 6-10F

*El sentido correcto podría haber sido determinado por inspección, antes de aplicar $\Sigma F_x = 0$.

6.3 Miembros de fuerza cero

El análisis de armaduras usando el método de los nudos se simplifica considerablemente cuando es posible determinar primero qué miembros *no soportan carga*. Esos *miembros de fuerza cero* se usan para incrementar la estabilidad de la armadura durante la construcción y para proporcionar soporte si la carga aplicada se modifica.

Los miembros de fuerza cero de una armadura generalmente pueden ser determinados *por inspección* de cada uno de sus nudos. Por ejemplo, considere la armadura mostrada en la figura 6-11a. Si se traza un diagrama de cuerpo libre del pasador situado en el nudo *A*, figura 6-11b, se advierte que los miembros *AB* y *AF* son miembros de fuerza cero. Por otra parte, observe que no podríamos haber llegado a esta conclusión si hubiésemos considerado los diagramas de cuerpo libre de los nudos *F* o *B* simplemente porque hay cinco incógnitas en cada uno de esos nudos. De manera similar, considere el diagrama de cuerpo libre del nudo *D*, figura 6-11c. Aquí se ve de nuevo que *DC* y *DE* son miembros de fuerza cero. Como regla general, *si sólo dos miembros forman un nudo de armadura y ninguna carga externa o reacción de soporte es aplicada al nudo, los miembros deben ser miembros de fuerza cero*. Por tanto, la carga sobre la armadura que aparece en la figura 6-11a está soportada por sólo cinco miembros como se muestra en la figura 6-11d.



$$\begin{aligned} +\searrow \Sigma F_y = 0; F_{DC} \sin \theta = 0; F_{DC} = 0 \text{ ya que } \sin \theta \neq 0 \\ +\swarrow \Sigma F_x = 0; F_{DE} + 0 = 0; F_{DE} = 0 \end{aligned}$$

(c)

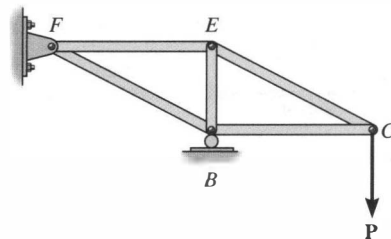
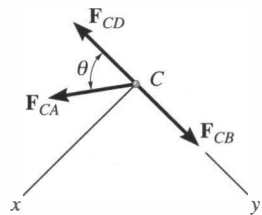
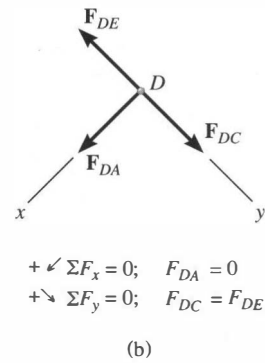
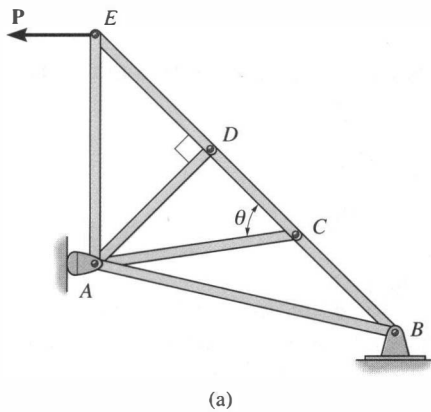


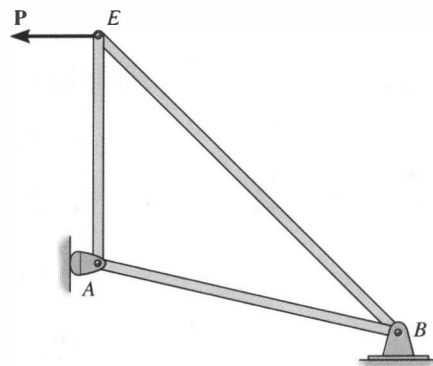
Fig. 6-11

Ahora considere la armadura mostrada en la figura 6-12a. El diagrama de cuerpo libre del pasador en el nudo D se muestra en la figura 6-12b. Orientando el eje y a lo largo de los miembros DC y DE y el eje x a lo largo del miembro DA , se ve que DA es un miembro de fuerza cero. Observe que este es también el caso del miembro CA , figura 6.12c. En general, si tres miembros forman un nudo de armadura en el cual dos de los miembros son colineales, el tercer miembro es un miembro de fuerza cero siempre que ninguna fuerza exterior o reacción de soporte esté aplicada al nudo. La armadura mostrada en la figura 6-12d es, por tanto, adecuada para soportar la carga P .



$+ \swarrow \Sigma F_x = 0; \quad F_{CA} \text{ sen } \theta = 0; \quad F_{CA} = 0 \text{ ya que } \text{sen } \theta \neq 0;$
 $+ \searrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{CB} = F_{CD}$

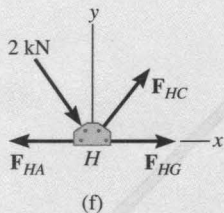
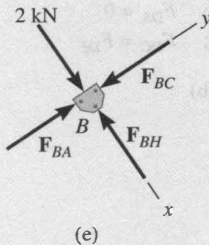
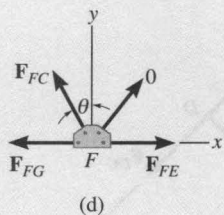
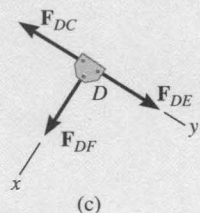
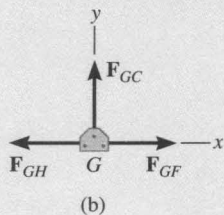
(c)



(d)

Fig. 6-12

EJEMPLO 6.4



Usando el método de los nudos, determine todos los miembros de fuerza cero de la *armadura de techo Fink* mostrada en la figura 6-13a. Suponga que todos los nudos están conectados mediante pasadores.

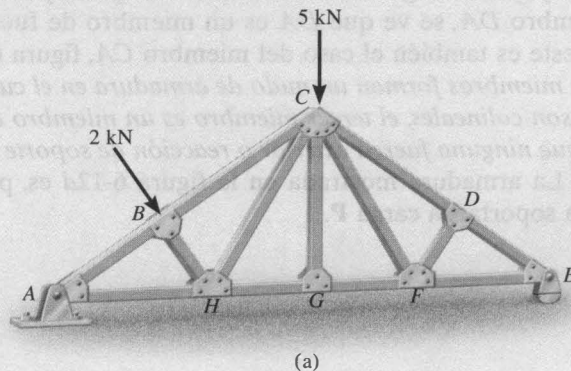


Fig. 6-13

Solución

Busque geometrías de nudos que tengan tres miembros de los cuales dos sean colineales. Tenemos

Nudo G (Figura 6-13b).

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{GC} = 0$$

Resp.

Advierta que no pudimos concluir que *GC* es un miembro de fuerza cero considerando el nudo *C*, donde se tienen cinco incógnitas. El hecho de que *GC* es un miembro de fuerza cero significa que la carga de 5 kN en *C* debe ser soportada por los miembros *CB*, *CH*, *CF* y *CD*.

Nudo D (Figura 6-13c).

$$+\swarrow \Sigma F_x = 0; \quad F_{DF} = 0$$

Resp.

Nudo F (Figura 6-13d).

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{FC} \cos \theta = 0 \quad \text{Como } \theta \neq 90^\circ, \quad F_{FC} = 0 \quad \text{Resp.}$$

Observe que si se analiza el nudo *B*, figura 6-13e,

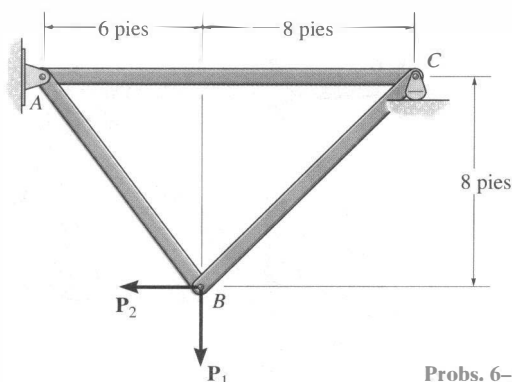
$$+\searrow \Sigma F_x = 0; \quad 2 \text{ kN} - F_{BH} = 0 \quad F_{BH} = 2 \text{ kN} \quad (C)$$

Advierta que *F_{HC}* debe satisfacer $\Sigma F_y = 0$, figura 6-13f, y por tanto, *HC* no es un miembro de fuerza cero.

PROBLEMAS

6-1. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 800$ lb y $P_2 = 400$ lb.

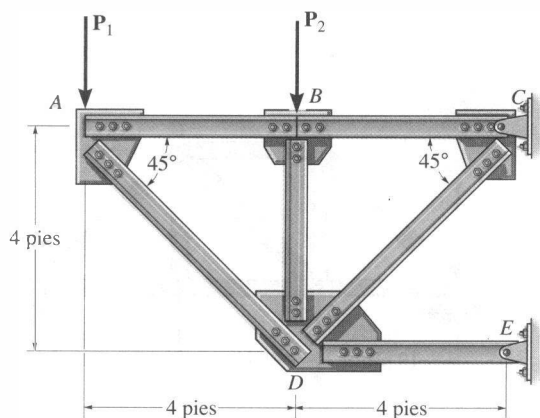
6-2. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 500$ lb y $P_2 = 100$ lb.



Probs. 6-1/2

6-3. La armadura, usada para soportar un balcón, está sometida a la carga mostrada. Aproxime cada nudo como un pasador y determine la fuerza en cada miembro. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 600$ lb, $P_2 = 400$ lb.

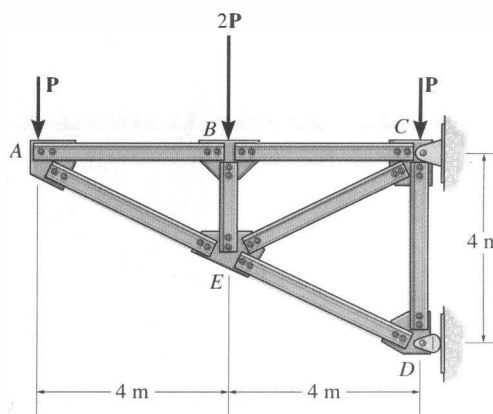
*6-4. La armadura, usada para soportar un balcón, está sometida a la carga mostrada. Aproxime cada nudo como un pasador y determine la fuerza en cada miembro. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 800$ lb, $P_2 = 0$.



Probs. 6-3/4

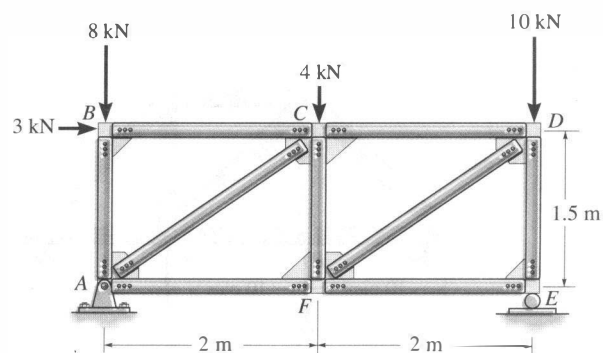
6-5. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Suponga que cada nudo es un pasador. Considere $P = 4$ kN.

6-6. Suponga que cada miembro de la armadura está hecho de acero con una masa por longitud de 4 kg/m. Establezca $P = 0$, determine la fuerza en cada miembro, e indique si los miembros están en tensión o en compresión. Ignore el peso de las placas de nudo y suponga que cada nudo es un pasador. Resuelva el problema suponiendo que el peso de cada miembro puede ser representado como una fuerza vertical, la mitad de la cual está aplicada en el extremo de cada miembro.



Probs. 6-5/6

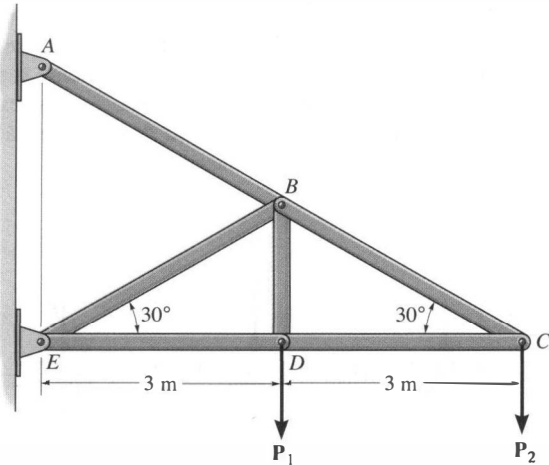
6-7. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6-7

*6-8. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 2 \text{ kN}$ y $P_2 = 1.5 \text{ kN}$.

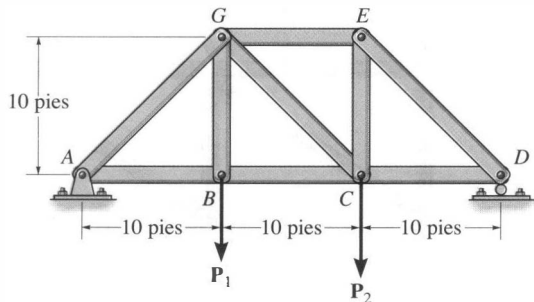
6-9. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = P_2 = 4 \text{ kN}$.



Probs. 6-8/9

6-10. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 0$, $P_2 = 1000 \text{ lb}$.

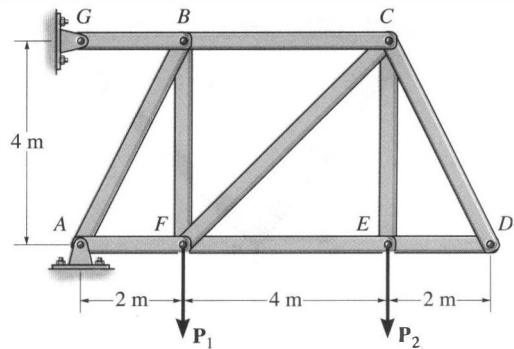
6-11. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Establezca $P_1 = 500 \text{ lb}$, $P_2 = 1500 \text{ lb}$.



Probs. 6-10/11

*6-12. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 10 \text{ kN}$, $P_2 = 15 \text{ kN}$.

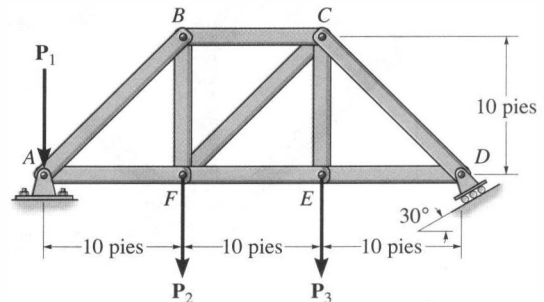
6-13. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 0$, $P_2 = 20 \text{ kN}$.



Probs. 6-12/13

6-14. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 100 \text{ lb}$, $P_2 = 200 \text{ lb}$, $P_3 = 300 \text{ lb}$.

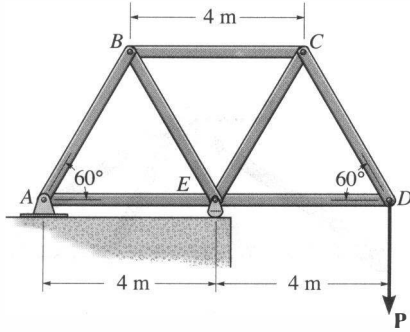
6-15. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 400 \text{ lb}$, $P_2 = 400 \text{ lb}$, $P_3 = 0$.



Probs. 6-14/15

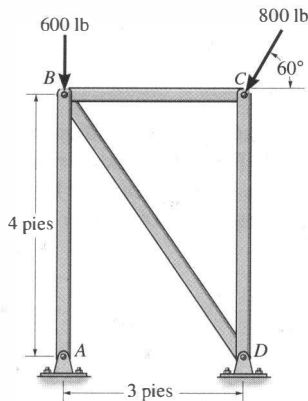
*6-16. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Considere $P = 8 \text{ kN}$.

6-17. Si la fuerza máxima que cualquier miembro puede soportar es de 8 kN en tensión y de 6 kN en compresión, determine la fuerza P máxima que puede ser soportada en el nudo D .



Probs. 6-16/17

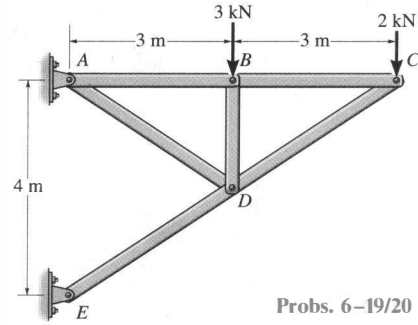
6-18. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. *Sugerencia:* La componente horizontal de fuerza en A debe ser cero. ¿Por qué?



Prob. 6-18

6-19. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. *Sugerencia:* La fuerza resultante en el pasador E actúa a lo largo del miembro ED . ¿Por qué?

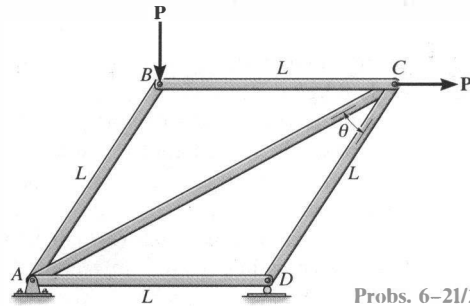
*6-20. Cada miembro de la armadura es uniforme y tiene una masa de 8 kg/m . Retire las cargas externas de 3 y 2 kN y determine la fuerza aproximada en cada miembro debido al peso de la armadura. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Resuelva el problema suponiendo que el peso de cada miembro puede ser representado como una fuerza vertical, la mitad de la cual está aplicada en cada extremo del miembro.



Probs. 6-19/20

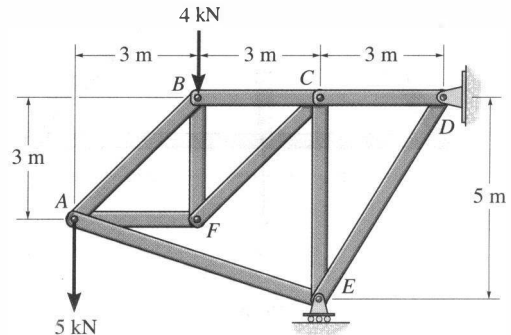
6-21. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura en términos de la carga externa y establezca si los miembros están en tensión o en compresión.

6-22. La fuerza de tensión máxima permisible en los miembros de la armadura es $(F_t)_{\text{máx}} = 2 \text{ kN}$, y la fuerza de compresión máxima permisible es $(F_c)_{\text{máx}} = 1.2 \text{ kN}$. Determine la magnitud P máxima de las dos cargas que puede ser aplicada a la armadura. Considere $L = 2 \text{ m}$ y $\theta = 30^\circ$.



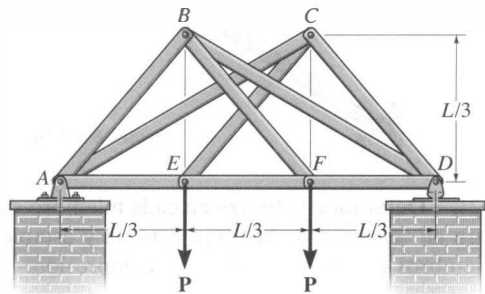
Probs. 6-21/22

6-23. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6-23

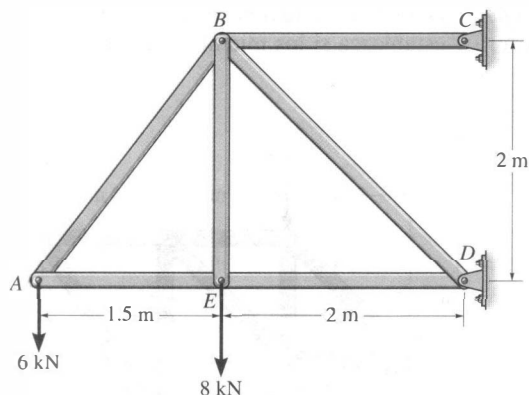
*6-24. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura de doble tijera en términos de la carga P y establezca si los miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6-24

6-25. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. *Sugerencia:* La componente vertical de fuerza en C debe ser cero. ¿Por qué?

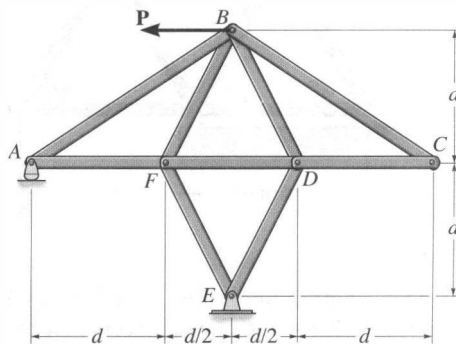
6-26. Cada miembro de la armadura es uniforme y tiene una masa de 8 kg/m. Retire las cargas externas de 6 y 8 kN y determine la fuerza aproximada en cada miembro debido al peso de la armadura. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Resuelva el problema *suponiendo* que el peso de cada miembro puede ser representado como una fuerza vertical, la mitad de la cual es aplicada en cada extremo del miembro.



Probs. 6-25/26

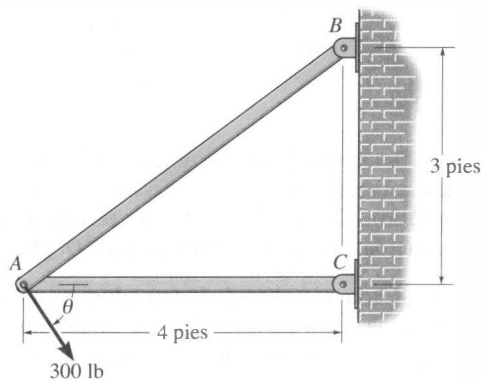
6-27. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura en términos de la carga P , e indique si los miembros están en tensión o en compresión.

*6-28. Si la fuerza máxima que cualquier miembro puede soportar es de 4 kN en tensión y 3 kN en compresión, determine la fuerza máxima P que puede ser soportada en el punto B. Considere $d = 1$ m.



Probs. 6-27/28

6-29. La armadura de dos miembros está sometida a la fuerza de 300 lb. Determine el rango de θ para aplicación de la carga de manera que la fuerza en cualquier miembro no exceda de 400 lb (T) o de 200 lb (C).



Prob. 6-29

6.4 El método de las secciones

El *método de las secciones* se usa para determinar las cargas que actúan dentro de un cuerpo. Este método se basa en el principio de que si un cuerpo está en equilibrio, entonces cualquier parte del cuerpo está también en equilibrio. Por ejemplo, considere los dos miembros de armadura mostrados a la izquierda en la figura 6-14. Si las fuerzas dentro de los miembros deben ser determinadas, entonces una sección imaginaria, indicada por la línea azul puede utilizarse para cortar cada miembro en dos partes y en consecuencia “exponer” cada fuerza interna como “externa” como se indica en los diagramas de la derecha. Se puede observar con claridad que para que haya equilibrio el miembro que está en tensión (T) está sujeto a un “jalón”, mientras que el miembro en compresión (C) esté sometido a un “empuje”.

El método de las secciones puede usarse también para “cortar” o seccionar los miembros de toda una armadura. Si la sección pasa por la armadura y se traza el diagrama de cuerpo libre de cualquiera de sus dos partes, entonces podemos aplicar las ecuaciones de equilibrio a esa parte para determinar las fuerzas del miembro en la “sección cortada”. Como sólo *tres* ecuaciones independientes de equilibrio ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_O = 0$) pueden ser aplicadas a la parte aislada de la armadura, trate de seleccionar una sección que, en general, pase por no más de *tres* miembros en que las fuerzas sean desconocidas. Por ejemplo, considere la armadura que muestra la figura 6-15a. Si la fuerza en el miembro *GC* debe ser determinada, la sección *aa* sería apropiada. Los diagramas de cuerpo libre de las dos partes se muestran en las figuras 6-15b y 6-15c. En particular, advierta que la línea de acción de cada fuerza del miembro es especificada a partir de la *geometría* de la armadura, ya que la fuerza en un miembro pasa a lo largo de su eje. Además, las fuerzas del miembro que actúan sobre una parte de la armadura son iguales pero opuestas a las que actúan sobre la otra parte (tercera ley de Newton). Como se indicó líneas arriba, los miembros supuestos en *tensión* (*BC* y *GC*) están sometidos a un “jalón”, mientras que el miembro en *compresión* (*GF*) está sometido a un “empuje”.

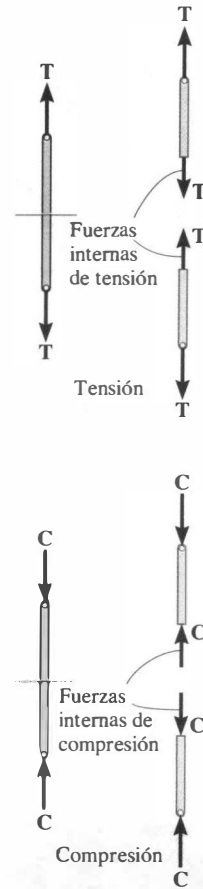


Fig. 6-14

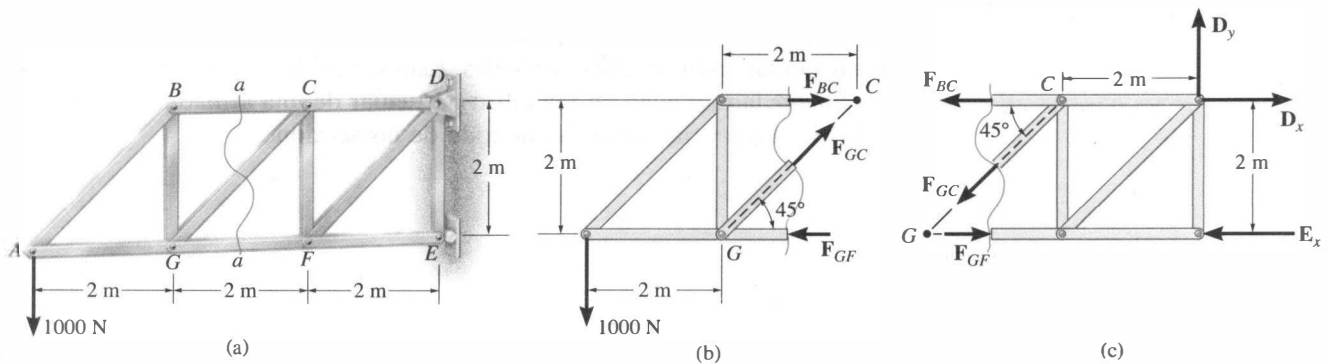


Fig. 6-15

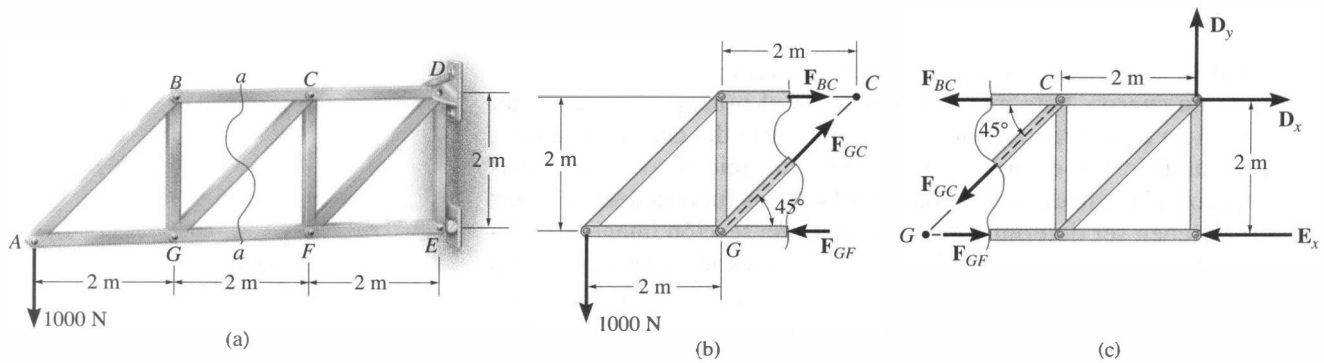
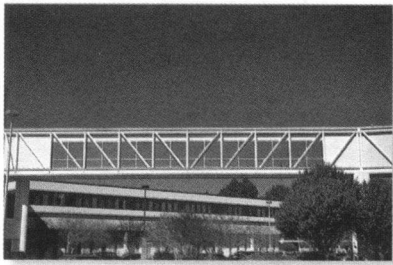


Fig. 6-15



Las dos armaduras Pratt se usan para construir este puente peatonal.

Las tres fuerzas de miembro desconocidas F_{BC} , F_{GC} , y F_{GF} pueden obtenerse aplicando las tres ecuaciones de equilibrio al diagrama de cuerpo libre de la figura 6-15b. Sin embargo, si se considera el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 6-15c, las tres reacciones de soporte D_x , D_y y E_x tendrán que ser determinadas *primero*. ¿Por qué? (Esto, por supuesto, se hace de la manera usual considerando un diagrama de cuerpo libre de *toda la armadura*).

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, debemos considerar maneras de escribir las ecuaciones en forma tal que den una *solución directa* para cada una de las incógnitas, en vez de tener que resolver ecuaciones simultáneas. Por ejemplo, sumando momentos con respecto a C en la figura 6-15b, se obtiene una solución directa para F_{GF} ya que F_{BC} y F_{GC} no producen ningún momento con respecto a C . De la misma manera, F_{BC} puede obtenerse directamente a partir de una suma de momentos con respecto a G . Finalmente, F_{GC} puede encontrarse directamente a partir de una suma de fuerzas en la dirección vertical ya que F_{GF} y F_{BC} no tienen componentes verticales. Esta capacidad de *determinar directamente* la fuerza en un miembro particular de una armadura es una de las ventajas principales del método de las secciones.*

*Por comparación, si el método de los nudos se usara para determinar, digamos, la fuerza en el miembro GC , sería necesario analizar los nudos A , B y G en secuencia.

Igual que en el método de los nudos, hay dos maneras en que se puede determinar el sentido correcto de una fuerza de miembro desconocida:

- *Siempre suponga* que las fuerzas desconocidas en miembros de la sección cortada están en *tensión*, es decir, “jalando” en el miembro. Haciendo esto, la solución numérica de las ecuaciones de equilibrio dará *escalares positivos para miembros en tensión y escalares negativos para miembros en compresión*.
- El sentido correcto de una fuerza de miembro desconocida, en muchos casos puede ser determinado “por inspección”. Por ejemplo, F_{BC} es una fuerza de tensión tal como se representa en la figura 6-15b, ya que el equilibrio por momentos con respecto a G requiere que F_{BC} genere un momento opuesto al de la fuerza de 1000 N. Además, F_{GC} es de tensión ya que su componente vertical debe equilibrar la fuerza de 1000 N que actúa hacia abajo. En casos más complicados, el sentido de una fuerza de miembro desconocida puede ser *supuesto*. Si la solución da un escalar negativo, esto indica que el sentido de la fuerza es *opuesto* al mostrado en el diagrama de cuerpo libre. Este es el método que usaremos en los problemas de ejemplo de esta sección.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Las fuerzas en los miembros de una armadura pueden ser determinados a partir del método de las secciones usando el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre

- Tome una decisión acerca de cómo “cortar” o seccionar la armadura a través de los miembros cuyas fuerzas deben determinarse.
- Antes de aislar la sección apropiada, puede ser necesario determinar primero las reacciones *externas* de la armadura. Se tienen entonces tres ecuaciones de equilibrio para encontrar las fuerzas en los miembros en la sección cortada.
- Trace el diagrama de cuerpo libre de la parte seccionada de la armadura sobre la que actúe el menor número de fuerzas.
- Use uno de los dos métodos descritos líneas arriba para establecer el sentido de una fuerza de miembro desconocida.

Ecuaciones de equilibrio

- Los momentos deben sumarse con respecto a un punto que se encuentre en la intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas, de manera que la tercera fuerza desconocida sea determinada directamente a partir de la ecuación de momento.
- Si dos de las fuerzas desconocidas son *paralelas*, las otras fuerzas pueden ser sumadas *perpendicularmente* a la dirección de esas incógnitas para determinar *directamente* la tercera fuerza desconocida.

EJEMPLO 6.5

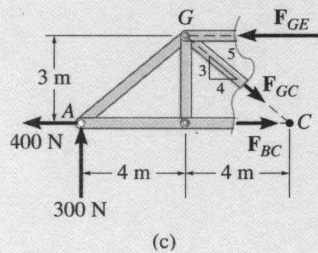
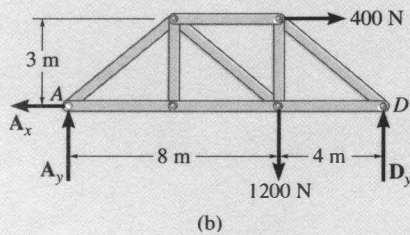
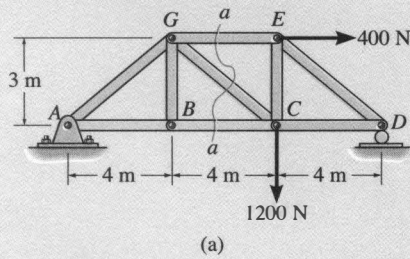


Fig. 6-16

Determine la fuerza en los miembros GE , GC , y BC de la armadura mostrada en la figura 6-16a. Indique si los miembros están en tensión o en compresión.

Solución

La sección aa que muestra la figura 6-16a ha sido seleccionada ya que corta a través de los *tres* miembros cuyas fuerzas deben ser determinadas. Sin embargo, para usar el método de las secciones, es necesario determinar *primero* las reacciones externas en A o en D . ¿Por qué? Un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura se muestra en la figura 6-16b. Aplicando las ecuaciones de equilibrio, tenemos

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 400 \text{ N} - A_x = 0 \quad A_x = 400 \text{ N} \\ \downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad -1200 \text{ N}(8 \text{ m}) - 400 \text{ N}(3 \text{ m}) + D_y(12 \text{ m}) = 0 \\ D_y = 900 \text{ N} \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 1200 \text{ N} + 900 \text{ N} = 0 \quad A_y = 300 \text{ N} \end{aligned}$$

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la armadura seccionada se muestra en la figura 6-16c. Este diagrama será usado para efectuar el análisis ya que implica el menor número de fuerzas.

Ecuaciones de equilibrio. Sumando momentos con respecto al punto G se eliminan F_{GE} y F_{GC} y se obtiene una solución directa para F_{BC} .

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_G = 0; \quad -300 \text{ N}(4 \text{ m}) - 400 \text{ N}(3 \text{ m}) + F_{BC}(3 \text{ m}) = 0 \\ F_{BC} = 800 \text{ N (T)} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

De la misma manera, sumando momentos con respecto al punto C obtenemos una solución directa para F_{GE} .

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_C = 0; \quad -300 \text{ N}(8 \text{ m}) + F_{GE}(3 \text{ m}) = 0 \\ F_{GE} = 800 \text{ N (C)} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

Como F_{BC} y F_{GE} no tienen componentes verticales, sumando fuerzas en la dirección y obtenemos directamente F_{GC} , esto es,

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma F_y = 0 \quad 300 \text{ N} - \frac{3}{5} F_{GC} = 0 \\ F_{GC} = 500 \text{ N (T)} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

Como ejercicio, obtenga estos resultados aplicando las ecuaciones de equilibrio al diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la armadura seccionada.

EJEMPLO 6.6

Determine la fuerza presente en el miembro CF de la armadura de puente mostrada en la figura 6-17a. Indique si el miembro está en tensión o en compresión. Suponga que cada miembro está conectado mediante pasadores.

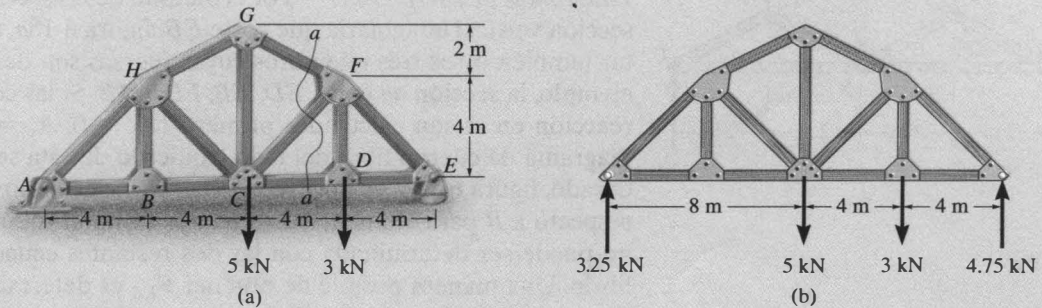


Fig. 6-17

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Será usada la sección aa que se muestra en la figura 6-17a ya que es la que “expondrá” la fuerza interna en el miembro CF como “externa” en el diagrama de cuerpo libre de la porción derecha o bien de la izquierda de la armadura. Sin embargo, primero es necesario determinar las reacciones externas en el lado izquierdo o en el derecho. Verifique los resultados mostrados en el diagrama de cuerpo libre en la figura 6-17b.

El diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la armadura, que es la más fácil de analizar, se muestra en la figura 6-17c. Se tienen tres incógnitas, F_{FG} , F_{CF} y F_{CD} .

Ecuaciones de equilibrio. El método más directo para resolver este problema consiste en aplicar la ecuación de momento con respecto a un punto que elimina dos de las fuerzas desconocidas. Por consiguiente, para obtener F_{CF} , eliminaremos F_{FG} y F_{CD} sumando momentos con respecto al punto O , figura 6-17c. Observe que la posición del punto O medida desde E es determinada por triángulos semejantes, esto es, $4/(4+x) = 6/(8+x)$, $x = 4$ m. O, dicho de otra manera, la pendiente del miembro GF tiene una caída de 2 m en una distancia horizontal de 4 m. Como FD es de 4 m, figura 6-17c, entonces la distancia desde D hasta O debe ser de 8 m.

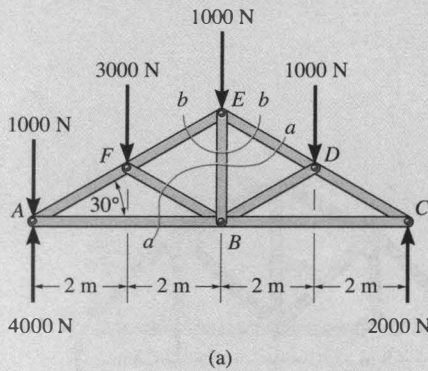
Una manera fácil de determinar el momento de F_{CF} con respecto al punto O es usar el principio de transmisibilidad y trasladar F_{CF} al punto C , y luego resolver F_{CF} en sus dos componentes rectangulares. Tenemos

$$\downarrow + \Sigma M_O = 0;$$

$$-F_{CF} \sin 45^\circ (12 \text{ m}) + (3 \text{ kN})(8 \text{ m}) - (4.75 \text{ kN})(4 \text{ m}) = 0$$

$$F_{CF} = 0.589 \text{ kN} \quad (\text{C}) \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 6.7



Determine la fuerza en el miembro EB de la armadura de techo mostrada en la figura 6-18a. Indique si el miembro está en tensión o en compresión.

Solución

Diagramas de cuerpo libre. Por el método de las secciones, cualquier sección vertical imaginaria que corte EB , figura 6-18a, tendrá que cortar también otros tres miembros cuyas fuerzas son desconocidas. Por ejemplo, la sección aa corta ED , EB , FB y AB . Si las componentes de reacción en A son calculadas primero ($A_x = 0$, $A_y = 4000$ N) y un diagrama de cuerpo libre del lado izquierdo de esta sección es considerado, figura 6-18b, es posible obtener F_{ED} sumando momentos con respecto a B para eliminar las otras tres incógnitas; sin embargo, F_{EB} no puede ser determinada con las dos restantes ecuaciones de equilibrio. Una manera posible de obtener F_{EB} es determinando primero F_{ED} a partir de la sección aa , y luego usar este resultado en la sección bb , figura 6-18a, la cual se muestra en la figura 6-18c. Aquí el sistema de fuerzas es concurrente y nuestro diagrama de cuerpo libre seccionado es el mismo que el diagrama de cuerpo libre para el pasador ubicado en E (método de los nudos).

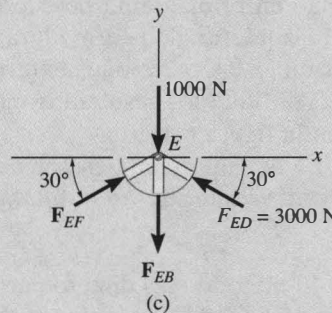
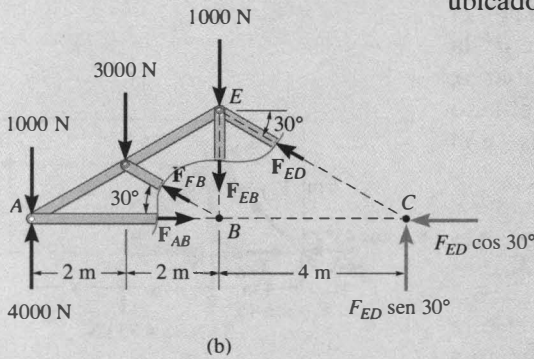


Fig. 6-18

Ecuaciones de equilibrio. Para determinar el momento de F_{ED} con respecto al punto B , figura 6-18b, resolveremos la fuerza en sus componentes rectangulares y, por el principio de transmisibilidad, la extenderemos hasta el punto C como se muestra. Los momentos de 1000 N, F_{AB} , F_{FB} , F_{EB} y $F_{ED} \cos 30^\circ$ son todos cero con respecto a B . Por tanto,

$$\begin{aligned} \downarrow + \sum M_B = 0; & \quad 1000 \text{ N}(4 \text{ m}) + 3000 \text{ N}(2 \text{ m}) - 4000 \text{ N}(4 \text{ m}) \\ & \quad + F_{ED} \sin 30^\circ(4) = 0 \\ & \quad F_{ED} = 3000 \text{ N} \quad (C) \end{aligned}$$

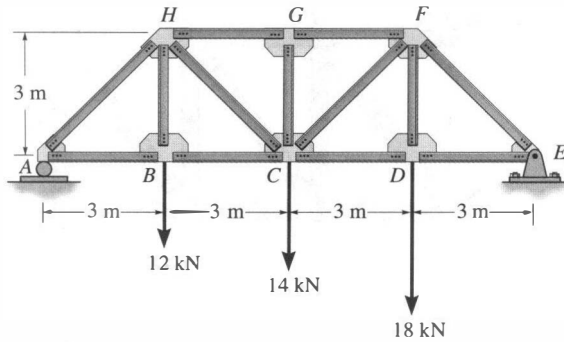
Considerando ahora el diagrama de cuerpo libre de la sección bb , figura 6-18c, tenemos

$$\begin{aligned} \rightarrow + \sum F_x = 0; & \quad F_{EF} \cos 30^\circ - 3000 \cos 30^\circ \text{ N} = 0 \\ & \quad F_{EF} = 3000 \text{ N} \quad (C) \\ + \uparrow \sum F_y = 0; & \quad 2(3000 \sin 30^\circ \text{ N}) - 1000 \text{ N} - F_{EB} = 0 \\ & \quad F_{EB} = 2000 \text{ N} \quad (T) \end{aligned}$$

Resp.

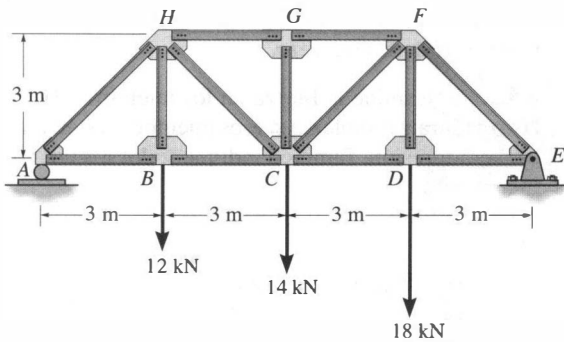
PROBLEMAS

6-30. Determine la fuerza en los miembros BC , HC y HG de la armadura de puente, e indique si los miembros están en tensión o en compresión.



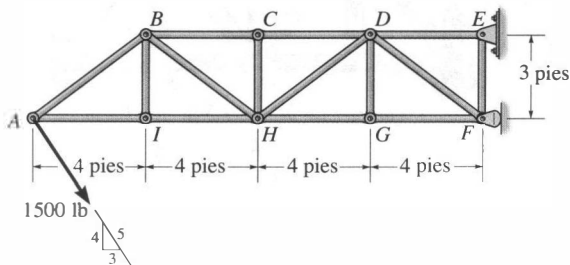
Prob. 6-30

6-31. Determine la fuerza en los miembros GF , CF y CD de la armadura de puente, e indique si los miembros están en tensión o en compresión.



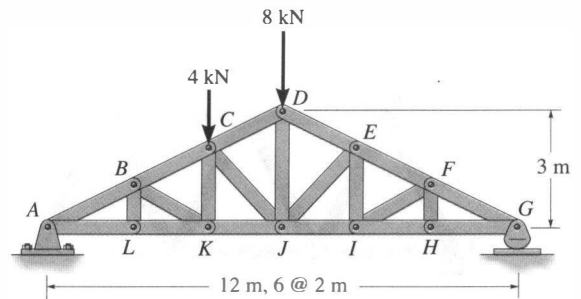
Prob. 6-31

***6-32.** Determine la fuerza en los miembros DE , DF y GF de la armadura en voladizo y establezca si los miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6-32

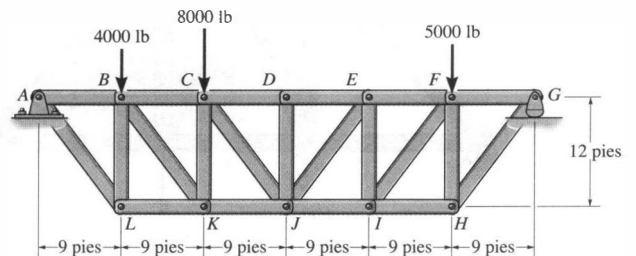
6-33. La armadura de techo soporta la carga vertical mostrada. Determine la fuerza en los miembros BC , CK y KJ y establezca si esos miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6-33

6-34. Determine la fuerza en los miembros CD , CJ , KJ y DJ de la armadura que sirve para soportar la cubierta de un puente. Establezca si esos miembros están en tensión o en compresión.

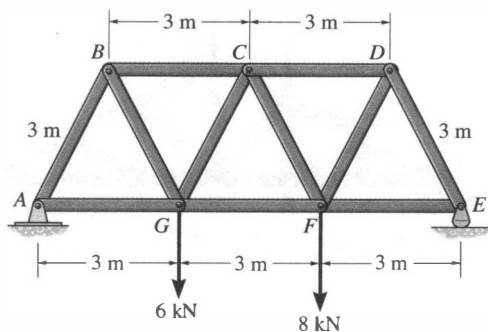
6-35. Determine la fuerza en los miembros EI y JI de la armadura que sirve para soportar la cubierta de un puente. Establezca si esos miembros están en tensión o en compresión.



Probs. 6-34/35

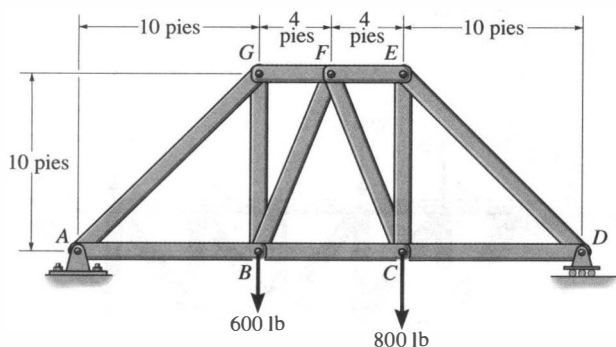
*6-36. Determine la fuerza en los miembros BC , CG y GF de la armadura Warren. Indique si los miembros están en tensión o en compresión.

6-37. Determine la fuerza en los miembros CD , CF y FG de la armadura Warren. Indique si los miembros están en tensión o en compresión.



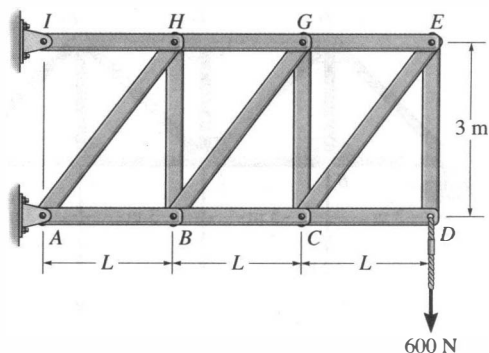
Probs. 6-36/37

6-38. Determine la fuerza desarrollada en los miembros GB y GF de la armadura de puente y establezca si esos miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6-38

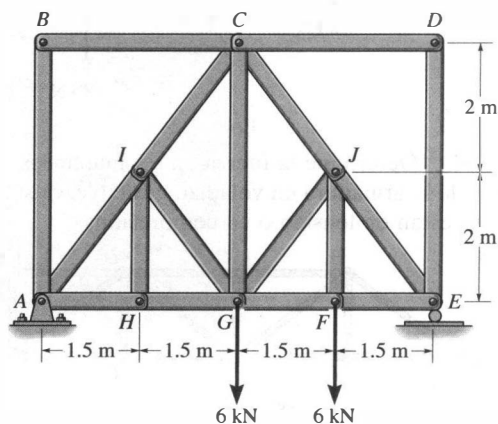
■6-39. La armadura soporta la carga vertical de 600 N. Determine la fuerza en los miembros BC , BG y HG al variar la dimensión L . Grafique los resultados de F (ordenada con tensión como positiva) contra L (abscisa) para $0 \leq L \leq 3 \text{ m}$.



Prob. 6-39

*6-40. Determine la fuerza en los miembros IC y CG de la armadura y establezca si esos miembros están en tensión o en compresión. También indique todos los miembros de fuerza cero.

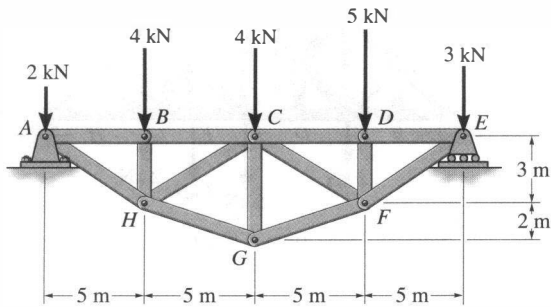
6-41. Determine la fuerza en los miembros JE y GF de la armadura y establezca si esos miembros están en tensión o en compresión. También indique todos los miembros de fuerza cero.



Probs. 6-40/41

6-42. Determine la fuerza en los miembros BC , HC y HG . Después de seccionar la armadura, use una sola ecuación de equilibrio para efectuar el cálculo de cada fuerza. Establezca si esos miembros están en tensión o en compresión.

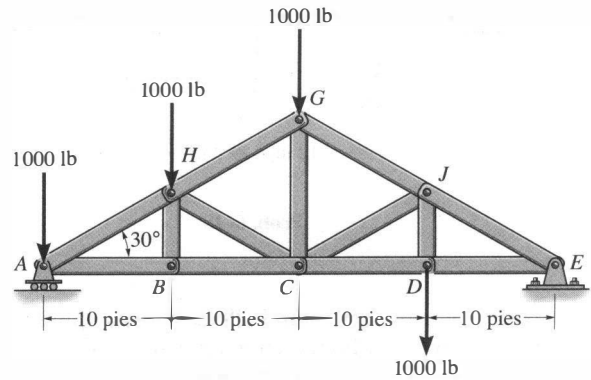
6-43. Determine la fuerza en los miembros CD , CF y CG y establezca si esos miembros están en tensión o en compresión.



Probs. 6-42/43

6-45. Determine la fuerza en el miembro GJ de la armadura y establezca si este miembro está en tensión o en compresión.

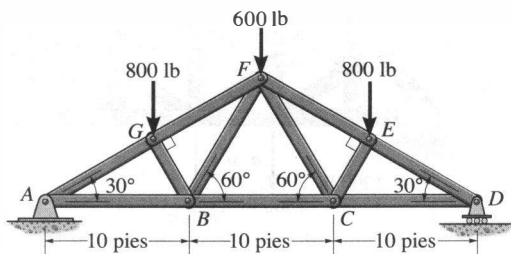
6-46. Determine la fuerza en el miembro GC de la armadura y establezca si este miembro está en tensión o en compresión.



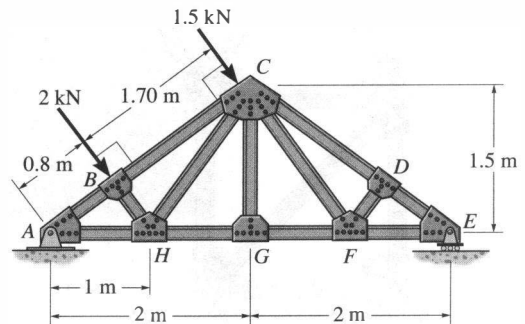
Probs. 6-45/46

*6-44. Determine la fuerza en los miembros GF , FB y BC de la armadura Fink y establezca si los miembros están en tensión o en compresión.

6-47. Determine la fuerza en los miembros GF , CF y CD de la armadura de techo e indique si los miembros están en tensión o en compresión.

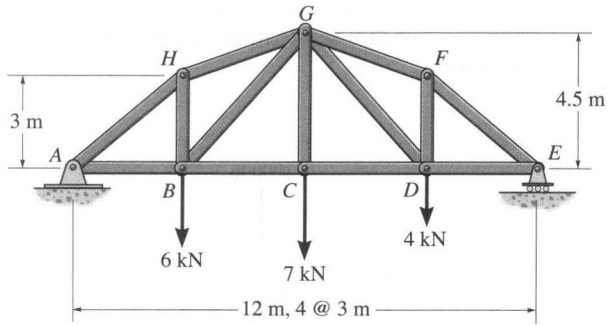


Prob. 6-44



Prob. 6-47

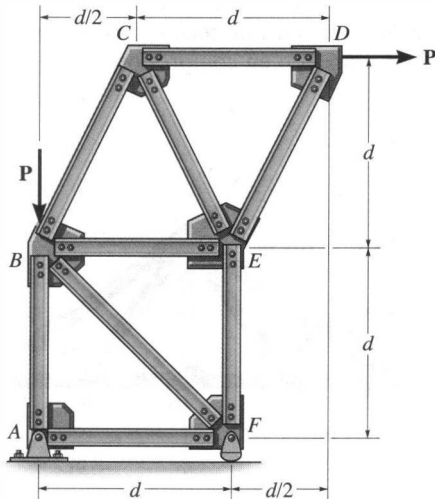
*6-48. Determine la fuerza en los miembros BG , HG y BC de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6-48

6-49. La armadura sesgada lleva la carga que se muestra. Determine la fuerza en los miembros CB , BE y EF y establezca si esos miembros están en tensión o en compresión. Suponga que todos los nudos están articulados.

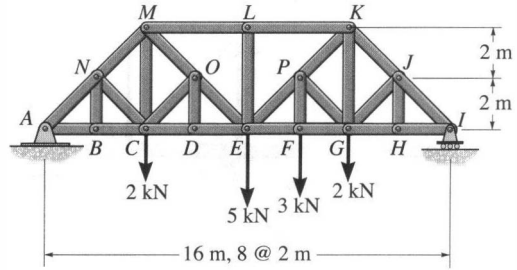
6-50. La armadura sesgada lleva la carga que se muestra. Determine la fuerza en los miembros AB , BF y EF , y establezca si esos miembros están en tensión o en compresión. Suponga que todos los nudos están articulados.



Probs. 6-49/50

6-51. Determine la fuerza en los miembros CD y CM de la armadura Baltimore para puente y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. También indique todos los miembros de fuerza cero.

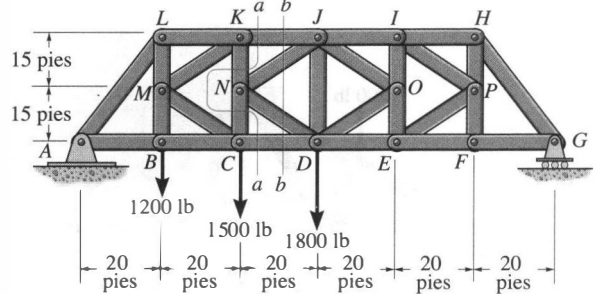
*6-52. Determine la fuerza en los miembros EF , EP y LK de la armadura Baltimore para puente y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. También indique todos los miembros de fuerza cero.



Probs. 6-51/52

6-53. Determine la fuerza en los miembros KJ , NJ , ND y CD de la armadura K . Indique si los miembros están en tensión o en compresión. Sugerencia: Use las secciones aa y bb .

6-54. Determine la fuerza en los miembros JI y DE de la armadura K . Indique si los miembros están en tensión o en compresión.



Probs. 6-53/54

*6.5 Armaduras espaciales

Una *armadura espacial* consiste en miembros unidos en sus extremos para formar una estructura estable tridimensional. El elemento más simple de una armadura espacial es un *tetraedro*, formado al conectar seis miembros entre sí, como se muestra en la figura 6-19. Cualquier miembro adicional agregado a este elemento básico sería redundante en el soporte de la fuerza **P**. Una *armadura espacial simple* puede construirse a partir de este tetraedro básico agregando tres miembros adicionales y un nudo, formando un sistema de tetraedros multiconectados.

Hipótesis de diseño. Los miembros de una armadura espacial pueden ser tratados como miembros de dos fuerzas si la carga externa está aplicada en los nudos y éstos consisten en conexiones de rótula esférica. Estas hipótesis se justifican cuando las conexiones, soldadas o a base de pernos, de los miembros unidos se intersectan en un punto común y el peso de los miembros puede ser ignorado. En casos donde el peso de un miembro debe ser incluido en el análisis, generalmente resulta satisfactorio aplicarlo como una fuerza vertical, la mitad de su magnitud aplicada en cada extremo del miembro.

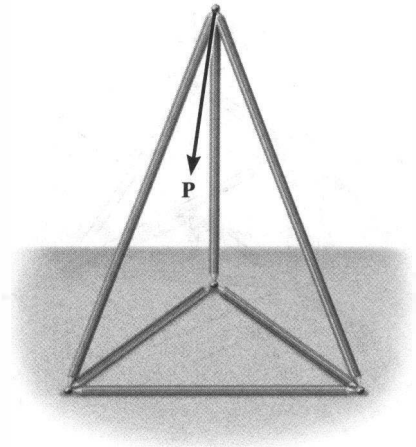


Fig. 6-19

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

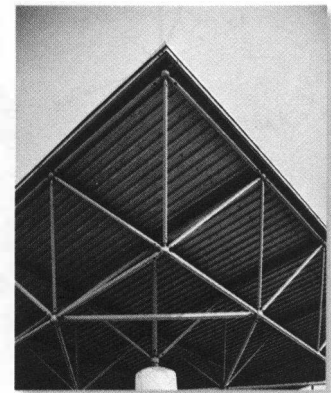
El método de los nudos o el método de las secciones pueden ser usados para determinar las fuerzas desarrolladas en los miembros de una armadura espacial simple.

Método de los nudos.

Generalmente, si en *todos* los miembros de la armadura deben ser determinadas las fuerzas, el método de los nudos es el más adecuado para efectuar el análisis. Al usar este método, es necesario resolver las tres ecuaciones escalares de equilibrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$ en cada nudo. La solución de muchas ecuaciones simultáneas puede evitarse si el análisis de fuerzas empieza en un nudo que tenga por lo menos una fuerza conocida y cuando mucho tres fuerzas desconocidas. Si la geometría tridimensional del sistema de fuerzas existente en el nudo es difícil de visualizar, se recomienda utilizar un análisis vectorial cartesiano para encontrar la solución.

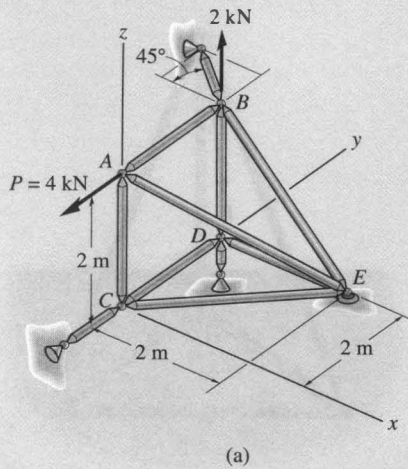
Método de las secciones.

Si sólo unas *pocas* fuerzas de miembro deben determinarse, se puede usar el método de las secciones. Cuando se pasa una sección imaginaria por una armadura y ésta queda separada en dos partes, el sistema de fuerzas que actúa sobre una de las partes debe satisfacer las seis ecuaciones escalares de equilibrio: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$, $\Sigma M_x = 0$, $\Sigma M_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$ (Ecuaciones 5-6). Por medio de una selección apropiada de la sección y los ejes para sumar fuerzas y momentos, muchas de las fuerzas de miembro desconocidas en una armadura espacial pueden ser calculadas *directamente*, usando una sola ecuación de equilibrio.



Armadura espacial típica para soporte de techo. Observe el uso de las rótulas esféricas en las conexiones.

EJEMPLO 6.8



Determine las fuerzas que actúan en los miembros de la armadura espacial mostrada en la figura 6-20a. Indique si los miembros están en tensión o en compresión.

Solución

Como hay una fuerza conocida y tres fuerzas desconocidas actuando en el nudo A, el análisis de fuerzas de esta armadura comenzará en este nudo.

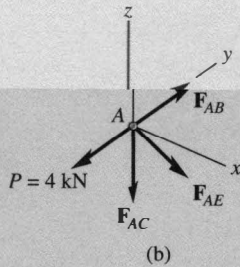
Nudo A (Figura 6-20b). Expresando cada fuerza que actúa en el diagrama de cuerpo libre del nudo A en notación vectorial, tenemos

$$\mathbf{P} = \{-4\mathbf{j}\} \text{ kN}, \quad \mathbf{F}_{AB} = F_{AB}\mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_{AC} = -F_{AC}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{F}_{AE} = F_{AE} \left(\frac{\mathbf{r}_{AE}}{r_{AE}} \right) = F_{AE}(0.577\mathbf{i} + 0.577\mathbf{j} - 0.577\mathbf{k})$$

Por equilibrio,

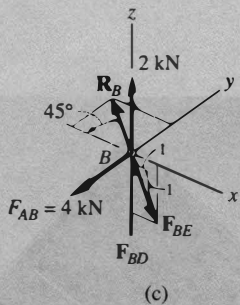
$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} &= \mathbf{0}; & \mathbf{P} + \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC} + \mathbf{F}_{AE} &= \mathbf{0} \\ -4\mathbf{j} + F_{AB}\mathbf{j} - F_{AC}\mathbf{k} + 0.577F_{AE}\mathbf{i} + 0.577F_{AE}\mathbf{j} - 0.577F_{AE}\mathbf{k} &= \mathbf{0} \\ \Sigma F_x &= 0; & 0.577F_{AE} &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0; & -4 + F_{AB} + 0.577F_{AE} &= 0 \\ \Sigma F_z &= 0; & -F_{AC} - 0.577F_{AE} &= 0 \\ & & F_{AC} = F_{AE} &= 0 \quad \text{Resp.} \\ & & F_{AB} = 4 \text{ kN (T)} & \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$



Como F_{AB} es conocida, se puede proceder con el análisis del nudo B.

Nudo B (Figura 6-20c).

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0; & -R_B \cos 45^\circ + 0.707F_{BE} &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0; & -4 + R_B \sin 45^\circ &= 0 \\ \Sigma F_z &= 0; & 2 + F_{BD} - 0.707F_{BE} &= 0 \\ & & R_B = F_{BE} = 5.66 \text{ kN (T)}, & \quad F_{BD} = 2 \text{ kN (C)} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$



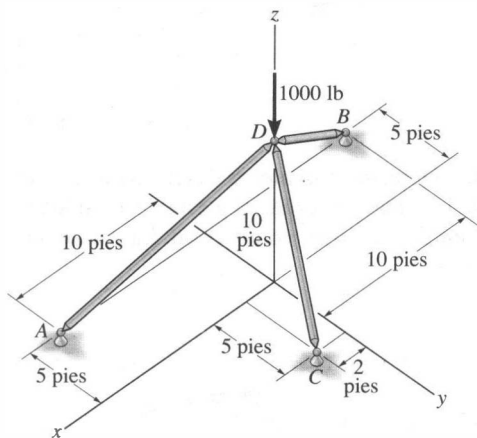
Las ecuaciones *escalares* de equilibrio también pueden aplicarse directamente a sistemas de fuerzas en los diagramas de cuerpo libre de los nudos D y C, ya que las componentes de fuerzas son determinadas fácilmente. Demuestre que

$$F_{DE} = F_{DC} = F_{CE} = 0 \quad \text{Resp.}$$

Fig. 6-20

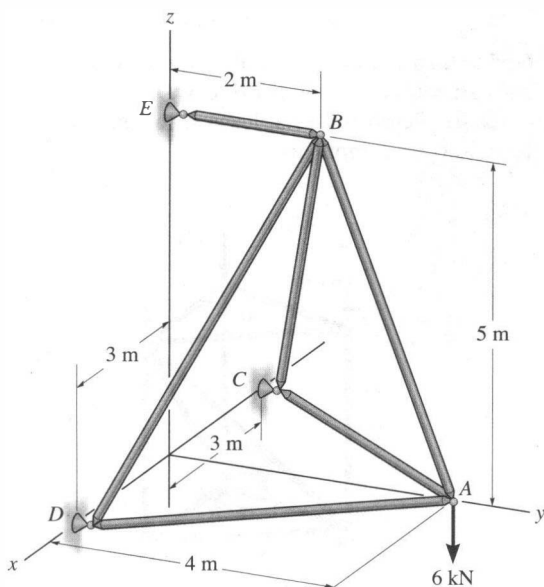
PROBLEMAS

6-55. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura espacial de tres miembros que soporta la carga de 1000 lb, y establezca si los miembros están en tensión o en compresión.



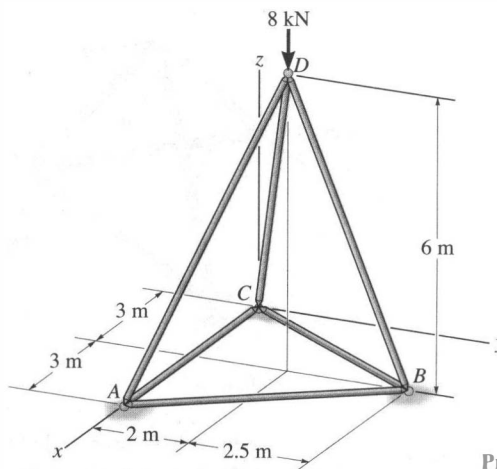
Prob. 6-55

*6-56. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura espacial y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. *Sugerencia:* La reacción en el soporte en E actúa a lo largo del miembro EB. ¿Por qué?



Prob. 6-56

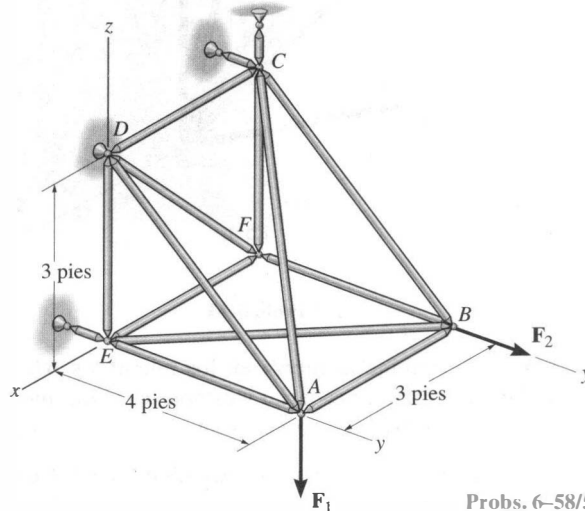
6-57. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura espacial y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. La armadura está soportada por rodillos en A, B y C.



Prob. 6-57

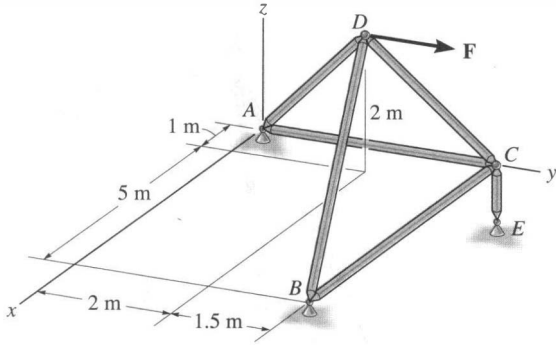
6-58. La armadura espacial está soportada por una rótula esférica en D y eslabones cortos en C y E. Determine la fuerza en cada miembro y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Considere $F_1 = \{-500\mathbf{k}\}$ lb y $F_2 = \{400\mathbf{j}\}$ lb.

6-59. La armadura espacial está soportada por una rótula esférica en D y eslabones cortos en C y E. Determine la fuerza en cada miembro y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Considere $F_1 = \{200\mathbf{i} + 300\mathbf{j} - 500\mathbf{k}\}$ lb y $F_2 = \{400\mathbf{j}\}$ lb.



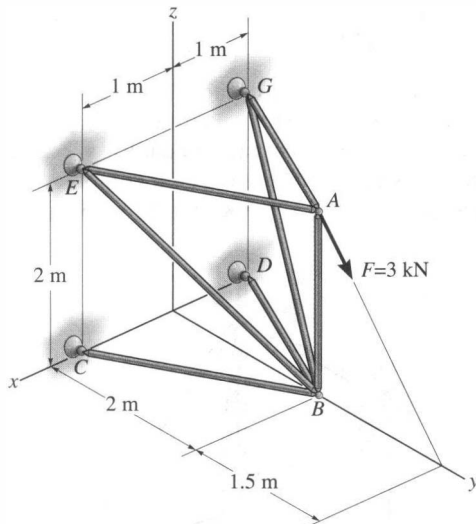
Probs. 6-58/59

***6-60.** Determine la fuerza en cada miembro de la armadura espacial y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. La armadura está soportada por rótulas esféricas en A , B y E . Considere $\mathbf{F} = \{-200\mathbf{i} + 400\mathbf{j}\}$ N. *Sugerencia:* La reacción en el soporte E actúa a lo largo del miembro EC . ¿Por qué?



Prob. 6-60

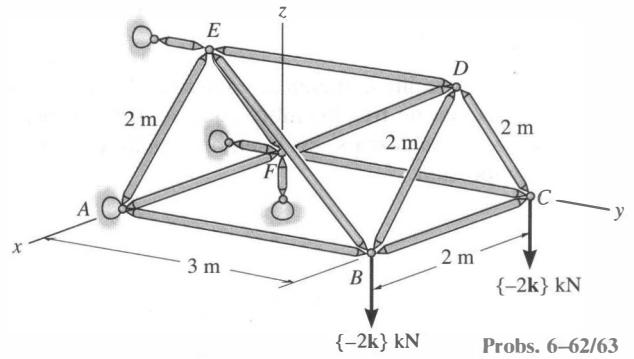
6-61. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura espacial y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. La armadura está soportada por rótulas esféricas en los nudos C , D , E y G .



Prob. 6-61

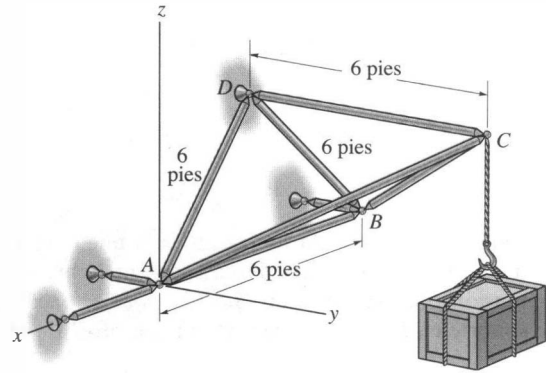
6-62. Determine la fuerza en los miembros BE , DF y BC de la armadura espacial y establezca si los miembros están en tensión o en compresión.

6-63. Determine la fuerza en los miembros AB , CD , ED y CF de la armadura espacial y establezca si los miembros están en tensión o en compresión.



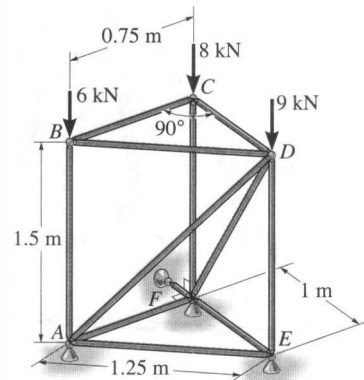
Probs. 6-62/63

***6-64.** Determine la fuerza desarrollada en cada miembro de la armadura espacial y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. La caja tiene un peso de 150 lb.



Prob. 6-64

6-65. La armadura espacial se usa para soportar las fuerzas verticales en los nudos B , C y D . Determine la fuerza en cada miembro y establezca si los miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6-65

6.6 Bastidores y máquinas

Los bastidores y las máquinas son dos tipos comunes de estructuras que a menudo están compuestas por *miembros multifuerza* conectados mediante pasadores, es decir, miembros que están sometidos a más de dos fuerzas. Los *bastidores* son generalmente estacionarios y se usan para soportar cargas, mientras que las *máquinas* contienen partes móviles y están diseñadas para transmitir y alterar el efecto de las fuerzas. Siempre que un bastidor o una máquina estén apropiadamente restringidos y no contengan más soportes o miembros que los necesarios para prevenir el colapso, las fuerzas que actúan en los nudos y soportes pueden ser determinadas aplicando las ecuaciones de equilibrio a cada miembro. Una vez obtenidas las fuerzas en los nudos, es posible *diseñar* el tamaño de los miembros, conexiones y soportes usando la teoría de la mecánica de materiales y un código de ingeniería adecuado.

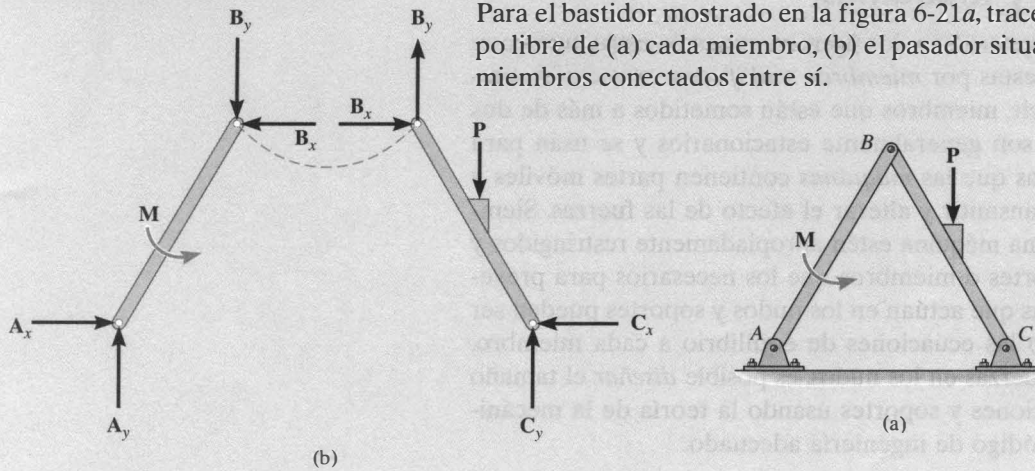
Diagramas de cuerpo libre. Para determinar las fuerzas que actúan en los nudos y soportes de un bastidor o una máquina, la estructura debe ser desmembrada y trazados los diagramas de cuerpo libre de sus partes. Los siguientes importantes puntos *deben* ser cumplidos:

- Aisle cada parte delineando su *contorno*. Entonces muestre todas las fuerzas y/o los momentos de par que actúan sobre la parte. Asegúrese de *rotular* o *identificar* cada fuerza y momento de par conocidos o desconocidos con referencia a un sistema coordenado x, y establecido. Indique también cualesquiera dimensiones empleadas para tomar momentos. A menudo las ecuaciones de equilibrio son más fáciles de aplicar si las fuerzas están representadas por sus componentes rectangulares. Como siempre, el sentido desconocido de una fuerza o de un momento de par puede ser supuesto.
- Identifique todos los miembros de dos fuerzas existentes en la estructura y represente sus diagramas de cuerpo libre con dos fuerzas iguales colineales pero opuestas en sus puntos de aplicación. (Vea la sección 5.4). Reconociendo los miembros de dos fuerzas, podemos evitar la resolución de un número innecesario de ecuaciones de equilibrio.
- Fuerzas comunes a dos cualesquiera miembros en *contacto* actúan con magnitudes iguales pero con sentidos opuestos sobre los miembros respectivos. Si los dos miembros son tratados como un “*sistema*” de miembros conectados, entonces esas fuerzas son “*internas*” y *no se muestran* en el *diagrama de cuerpo libre del sistema*; sin embargo, si se traza el diagrama de cuerpo libre de *cada miembro*, las fuerzas son “*externas*” y *deben* mostrarse en cada uno de los diagramas de cuerpo libre.

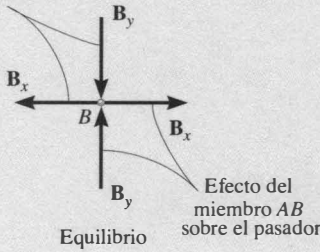
Los siguientes ejemplos ilustran gráficamente la aplicación de estos puntos al trazar los diagramas de cuerpo libre desmembrado de un bastidor o de una máquina. En todos los casos, el peso de los miembros es ignorado.

EJEMPLO 6.9

Para el bastidor mostrado en la figura 6-21a, trace el diagrama de cuerpo libre de (a) cada miembro, (b) el pasador situado en B, y (c) los dos miembros conectados entre sí.



Efecto del miembro BC sobre el pasador



Equilibrio

Efecto del miembro AB sobre el pasador

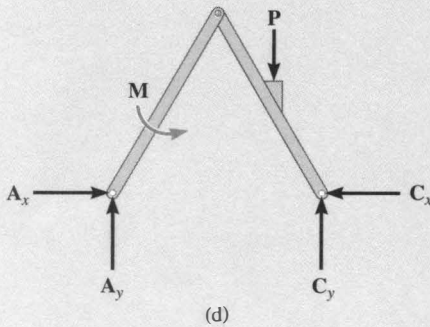
(c)

Solución

Parte (a). Por inspección, los miembros BA y BC *no* son miembros de dos fuerzas. En vez de eso, como se aprecia en los diagramas de cuerpo libre, figura 6-21b, BC está sometido *no* a cinco sino a *tres* fuerzas, la cuales son la fuerza resultante de los pasadores B y C y la fuerza externa P. Igualmente, AB está sometido a las fuerzas *resultantes* de los pasadores en A y B y al momento de par externo M.

Parte (b). En la figura 6-21a puede verse que el pasador situado en B está sometido a sólo *dos* fuerzas, esto es, la fuerza del miembro BC sobre el pasador y la fuerza del miembro AB sobre el pasador. Por *equilibrio*, esas fuerzas, y por tanto, sus respectivas componentes, deben ser iguales pero opuestas, figura 6-21c. Observe atentamente cómo la tercera ley de Newton es aplicada entre el pasador y sus miembros en contacto, es decir, el efecto del pasador sobre los dos miembros, figura 6-21b, y el efecto igual pero opuesto de los dos miembros sobre el pasador, figura 6-21c. Observe también que B_x y B_y , mostradas iguales pero opuestas en la figura 6-21b sobre los miembros AB y BC, *no* presentan el efecto de la tercera ley de Newton; sino que esto resulta del análisis de *equilibrio* del pasador, figura 6-21c.

Parte (c). El diagrama de cuerpo libre de ambos miembros conectados entre sí, pero retirados de los pasadores soportantes en A y C, se muestra en la figura 6-21d. Las componentes de fuerza B_x y B_y *no* se *muestran* en este diagrama ya que forman iguales pero opuestos pares de fuerzas *internas* (Figura 6-21b), y por tanto se cancelan. Además, para ser consistentes cuando apliquemos las ecuaciones de equilibrio, las componentes desconocidas de fuerza en A y C deben actuar en el *mismo* sentido que las mostradas en la figura 6-21b. Aquí, el momento de par M puede ser aplicado en cualquier punto sobre el bastidor para determinar las reacciones en A y C. Sin embargo, observe que en la figura 6-21b debe actuar sobre el miembro AB y *no* sobre el miembro BC.

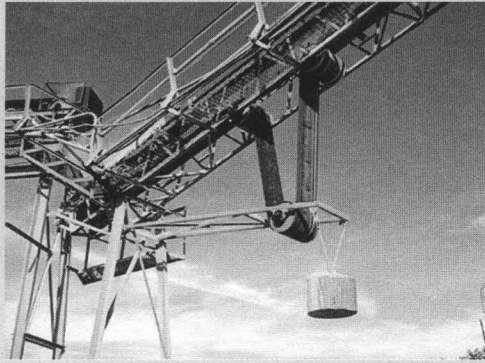


(d)

Fig. 6-21

EJEMPLO 6.10

La tensión constante en la banda transportadora es mantenida usando el dispositivo mostrado en la figura 6-22a. Trace los diagramas de cuerpo libre del bastidor y del cilindro que soporta a la banda. El bloque suspendido tiene un peso de W .

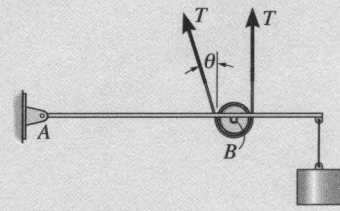


(a)

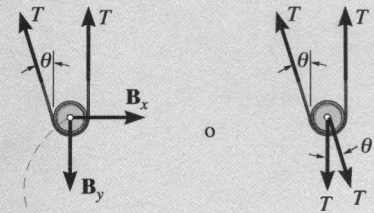
Fig. 6-22

Solución

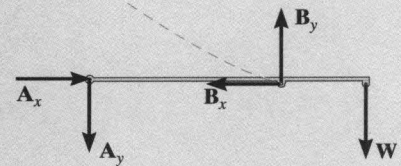
El modelo idealizado de este dispositivo se muestra en la figura 6-22b. Aquí se supone que el ángulo θ es conocido. Advierta que la tensión en la banda es la misma a cada lado del cilindro, ya que éste puede girar libremente. A partir de este modelo, los diagramas de cuerpo libre del bastidor y del cilindro se muestran en las figuras 6-22c y 6-22d, respectivamente. Observe que la fuerza que el pasador situado en B ejerce sobre el cilindro puede ser representada por cualquiera de sus componentes horizontal y vertical B_x y B_y , las cuales pueden ser determinadas usando las ecuaciones de equilibrio de fuerzas aplicadas al cilindro, o por las dos componentes T , las cuales proporcionan momentos de par iguales pero opuestos sobre el cilindro e impiden así que gire. Vea también que una vez determinadas las reacciones del pasador situado en A , la mitad de sus valores actúan a cada lado del bastidor ya que se tienen conexiones de pasador en cada lado, figura 6-22a.



(b)



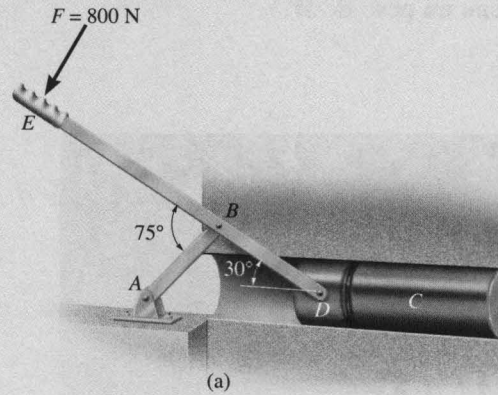
(c)



(d)

EJEMPLO 6.11

Trace el diagrama de cuerpo libre de cada parte del mecanismo de pistón liso y eslabón usado para aplastar botes reciclados, el cual se muestra en la figura 6-23a.



Solución

Por inspección, el miembro AB es un miembro de dos fuerzas. Los diagramas de cuerpo libre de las partes se muestran en la figura 6-23b. Como los pasadores en B y D conectan *sólo dos partes entre sí*, ahí las fuerzas se muestran como iguales pero opuestas en los diagramas de cuerpo libre separados de sus miembros conectados. En particular, cuatro componentes de fuerza actúan sobre el pistón: D_x y D_y representan el efecto del pasador (o palanca EBD), N_w es la *fuerza resultante* del piso, y P es la fuerza resultante de compresión causada por el bote C .

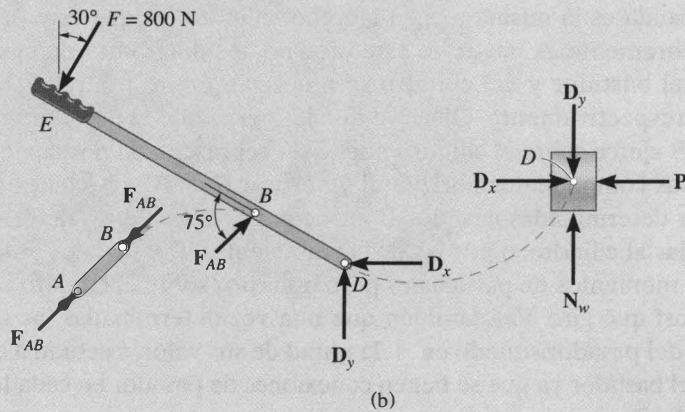
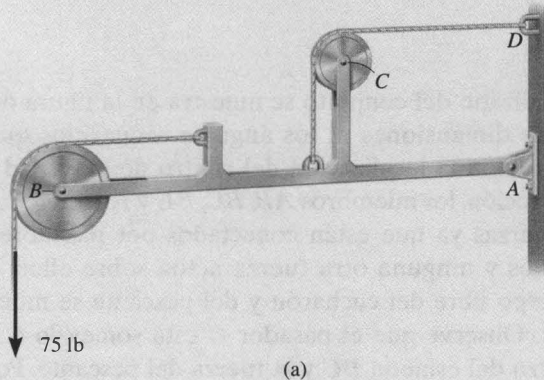


Fig. 6-23

EJEMPLO 6.12

Para la estructura mostrada en la figura 6-24a, trace los diagramas de cuerpo libre de (a) toda la estructura, incluyendo poleas y cuerdas, (b) la estructura sin poleas ni cuerdas, y (c) cada una de las poleas.



Solución

Parte (a). Cuando toda la estructura es considerada, incluidas las poleas y las cuerdas, las interacciones en los puntos donde poleas y cuerdas están conectadas a la estructura se vuelven pares de *fuerzas internas* que se cancelan entre sí, y por tanto, no se muestran sobre el diagrama de cuerpo libre, figura 6-24b.

Parte (b). Cuando las cuerdas y las poleas son retiradas, deben mostrarse sus efectos *sobre la estructura*, figura 6-24c.

Parte (c). Las componentes de fuerza B_x , B_y , C_x , C_y de los pasadores ubicados sobre las poleas, figura 6-24d, son iguales pero opuestas a las componentes de fuerza ejercidas por los pasadores sobre la estructura, figura 6-24c. ¿Por qué?

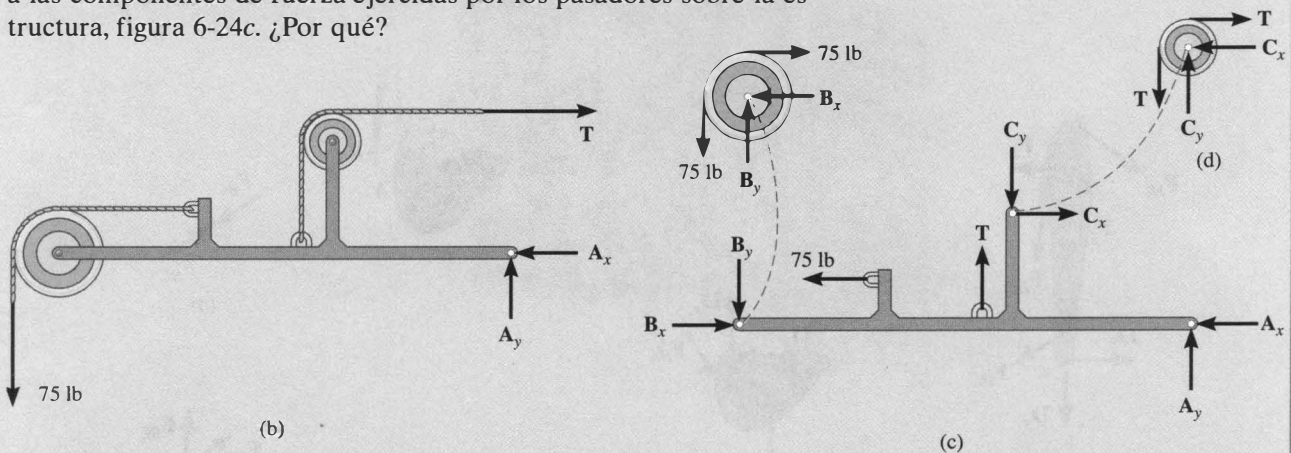
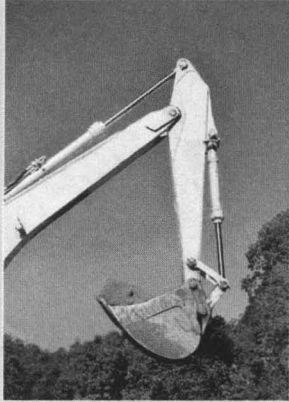


Fig. 6-24

EJEMPLO 6.13



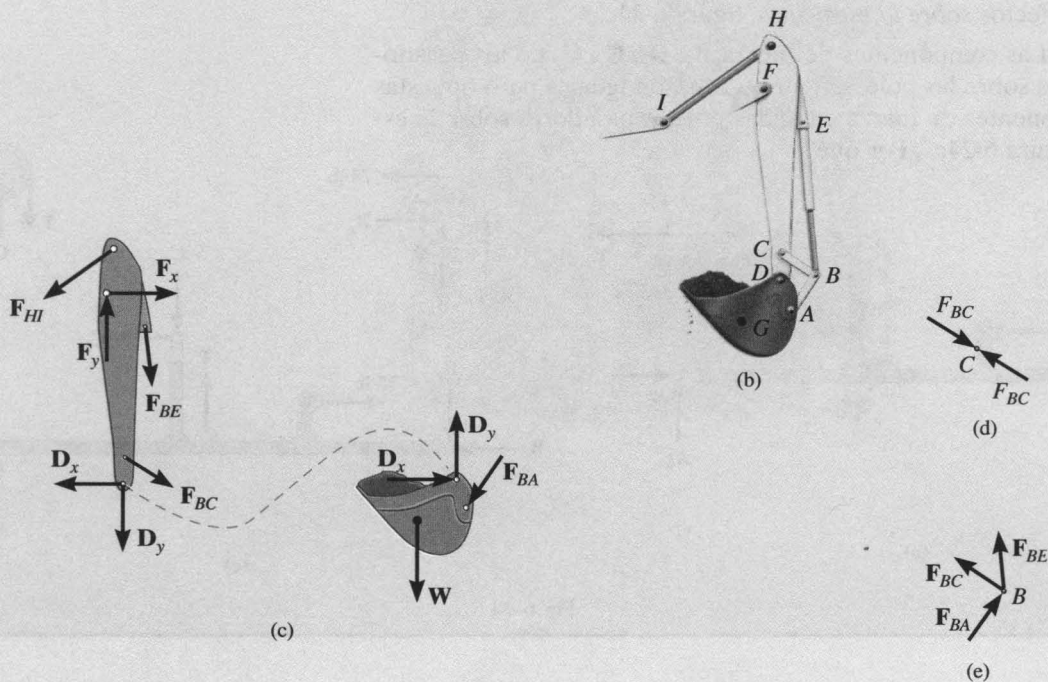
(a)

Fig. 6-25

Trace los diagramas de cuerpo libre del cucharón y del pescante vertical de la retroexcavadora mostrada en la fotografía, figura 6-25a. El cucharón y su contenido tienen un peso W . Ignore el peso de los miembros.

Solución

El modelo idealizado del conjunto se muestra en la figura 6-25b. No se muestran las dimensiones ni los ángulos requeridos que deben obtenerse, junto con la localización del centro de gravedad G de la carga. Por inspección, los miembros AB , BC , BE y HI son todos miembros de dos fuerzas ya que están conectados por pasadores en sus puntos extremos y ninguna otra fuerza actúa sobre ellos. Los diagramas de cuerpo libre del cucharón y del pescante se muestran en la figura 6.25c. Observe que el pasador C está sometido a sólo dos fuerzas, la fuerza del eslabón BC y la fuerza del pescante. Por equilibrio, esas fuerzas deben ser iguales en magnitud pero opuestas en dirección, figura 6-25d. El pasador en B está sometido a tres fuerzas, figura 6-25e. La fuerza F_{BE} es generada por el cilindro hidráulico, y las fuerzas F_{BA} y F_{BC} son causadas por los eslabones. Esas tres fuerzas están relacionadas por las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas aplicadas al pasador.



Antes de seguir adelante, se recomienda cubrir las soluciones de los ejemplos previos e intentar trazar los diagramas de cuerpo libre requeridos. Al hacerlo, asegúrese de que el trabajo sea limpio y ordenado, y de que todas las fuerzas y momentos de par estén rotulados apropiadamente.

Ecuaciones de equilibrio. Siempre que la estructura (bastidor o máquina) esté soportada apropiadamente y no contenga más soportes o miembros que los necesarios para prevenir su colapso, las fuerzas desconocidas en los soportes y las conexiones pueden ser determinadas con las ecuaciones de equilibrio. Si la estructura se encuentra en el plano x - y , entonces, para *cada* diagrama de cuerpo libre trazado, la carga debe satisfacer $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, y $\Sigma M_O = 0$. La selección de los diagramas de cuerpo libre usados para efectuar el análisis es *completamente arbitraria*. Éstos pueden representar cada uno de los miembros de la estructura, una porción de la estructura, o su totalidad. Por ejemplo, considere encontrar las seis componentes de las reacciones de pasador en A , B y C para el bastidor mostrado en la figura 6-26a. Si el bastidor está desmembrado, como en la figura 6-26b, esas incógnitas pueden ser determinadas aplicando las tres ecuaciones de equilibrio a cada uno de los dos miembros (un total de seis ecuaciones). El diagrama de cuerpo libre de *todo el bastidor* puede usarse también para efectuar parte del análisis, figura 6-26c. Por tanto, si así se desea, las seis incógnitas pueden ser determinadas aplicando las tres ecuaciones de equilibrio a todo el bastidor, figura 6-26c, y también a cualquiera de sus miembros. Además, las respuestas pueden ser verificadas en parte aplicando las tres ecuaciones de equilibrio al restante “segundo” miembro. En general, entonces, este problema puede ser resuelto escribiendo *cuando mucho* seis ecuaciones de equilibrio usando diagramas de cuerpo libre de los miembros y/o la combinación de miembros conectados. Más de seis ecuaciones escritas *no* serían únicas con respecto a las seis originales y servirían sólo para verificar los resultados.

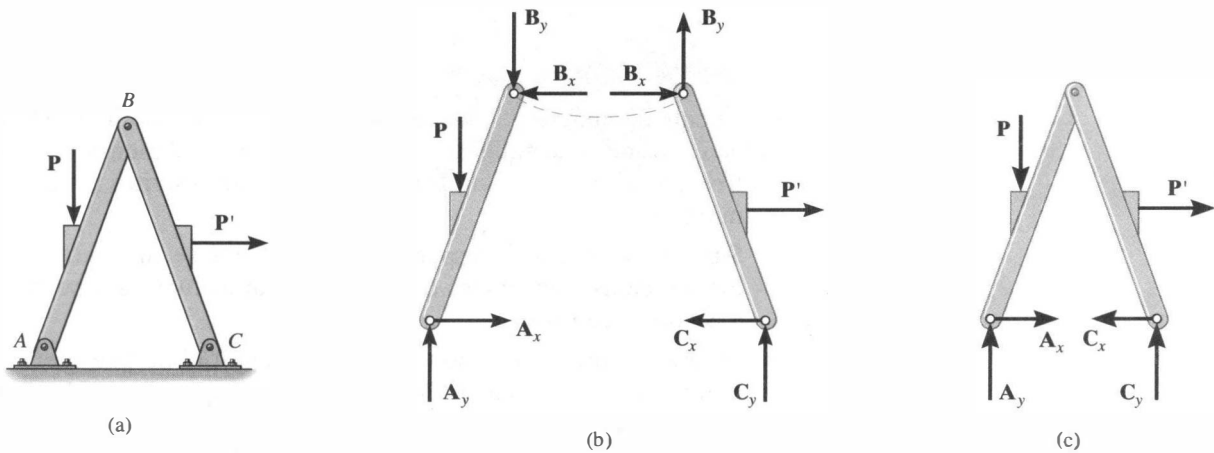


Fig. 6-26

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Las reacciones en los nudos de bastidores o máquinas (estructuras) compuestas de miembros multifuerza pueden ser determinadas usando el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre.

- Trace el diagrama de cuerpo libre de toda la estructura, de una porción de la estructura, o de cada uno de sus miembros. La selección debe hacerse para que conduzca a la solución más directa del problema.
- Cuando se traza el diagrama de cuerpo libre de un grupo de miembros de una estructura, las fuerzas en las partes conectadas de este grupo son fuerzas internas y no se muestran sobre el diagrama de cuerpo libre del grupo.
- Fuerzas comunes a dos miembros que están en contacto actúan con igual magnitud pero con sentido opuesto en los respectivos diagramas de cuerpo libre de los miembros.
- Miembros de dos fuerzas, independientemente de su forma, tienen fuerzas iguales pero opuestas actuando colinealmente en los extremos del miembro.
- En muchos casos es posible decir por inspección el sentido correcto de las fuerzas desconocidas que actúan sobre un miembro; sin embargo, si esto parece difícil de lograr, el sentido puede ser supuesto.
- Un momento de par es un vector libre y puede actuar en cualquier punto en el diagrama de cuerpo libre. También, una fuerza es un vector deslizante y puede actuar en cualquier punto a lo largo de su línea de acción.

Ecuaciones de equilibrio.

- Cuente el número de incógnitas y compárelo con el número total de ecuaciones de equilibrio disponibles. En dos dimensiones, hay tres ecuaciones de equilibrio que pueden ser escritas para cada miembro.
- Sume momentos con respecto a un punto que se encuentre en la intersección de las líneas de acción de tantas fuerzas desconocidas como sea posible.
- Si se encuentra que la solución de la magnitud de una fuerza o momento de par es negativa, esto significa que el sentido de la fuerza es el inverso del mostrado en los diagramas de cuerpo libre.

EJEMPLO 6.14

Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical que el pasador ubicado en *C* ejerce sobre el miembro *CB* del marco en la figura 6-27a.

Solución I

Diagramas de cuerpo libre. Por inspección puede verse que *AB* es un miembro de dos fuerzas. Los diagramas de cuerpo libre se muestran en la figura 6-27b.

Ecuaciones de equilibrio. Las tres incógnitas, C_x , C_y y F_{AB} , pueden ser determinadas aplicando las tres ecuaciones de equilibrio al miembro *CB*.

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_C = 0; & 2000 \text{ N}(2 \text{ m}) - (F_{AB} \text{ sen } 60^\circ)(4 \text{ m}) = 0 \quad F_{AB} = 1154.7 \text{ N} \\ \rightarrow + \Sigma F_x = 0; & 1154.7 \text{ cos } 60^\circ \text{ N} - C_x = 0 \quad C_x = 577 \text{ N} \quad \text{Resp.} \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; & 1154.7 \text{ sen } 60^\circ \text{ N} - 2000 \text{ N} + C_y = 0 \quad C_y = 1000 \text{ N} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Solución II

Diagramas de cuerpo libre. Si no se reconoce que *AB* es un miembro de dos fuerzas, entonces la resolución de este problema implicará más trabajo. Los diagramas de cuerpo libre se muestran en la figura 6-27c.

Ecuaciones de equilibrio. Las seis incógnitas, A_x , A_y , B_x , B_y , C_x , C_y , son determinadas aplicando las tres ecuaciones de equilibrio a cada miembro.

Miembro AB

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_A = 0; & B_x(3 \text{ sen } 60^\circ \text{ m}) - B_y(3 \text{ cos } 60^\circ \text{ m}) = 0 \quad (1) \\ \rightarrow + \Sigma F_x = 0; & A_x - B_x = 0 \quad (2) \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; & A_y - B_y = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Miembro BC

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_C = 0; & 2000 \text{ N}(2 \text{ m}) - B_y(4 \text{ m}) = 0 \quad (4) \\ \rightarrow + \Sigma F_x = 0; & B_x - C_x = 0 \quad (5) \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; & B_y - 2000 \text{ N} + C_y = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

Los resultados para C_x y C_y pueden ser determinados resolviendo esas ecuaciones en la secuencia siguiente: 4, 1, 5, y luego 6. Los resultados son

$$\begin{aligned} B_x &= 577 \text{ N} \\ B_x &= 577 \text{ N} \\ C_x &= 577 \text{ N} \\ C_y &= 1000 \text{ N} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Resp.} \\ \text{Resp.} \end{array}$$

Por comparación, la solución I es la más sencilla puesto que el requisito de que en la figura 6-27b F_{AB} sea igual, opuesta y colineal en los extremos del miembro *AB*, automáticamente satisface las ecuaciones 1, 2 y 3 anteriores, y por tanto elimina la necesidad de escribir esas ecuaciones. En consecuencia, antes de comenzar el análisis, identifique siempre los miembros de dos fuerzas.

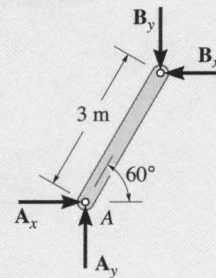
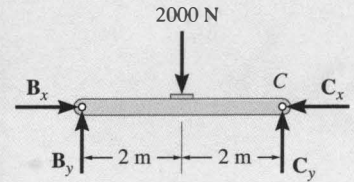
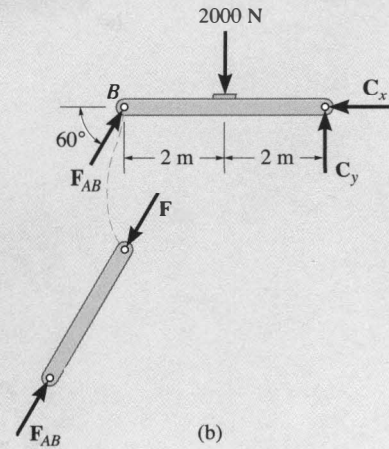
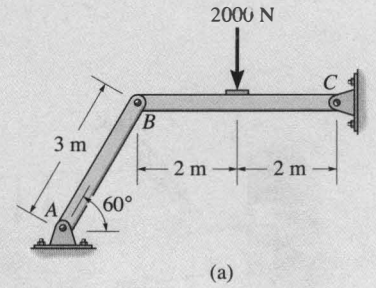


Fig. 6-27

EJEMPLO 6.15

La viga compuesta mostrada en la figura 6-28a está conectada mediante un pasador ubicado en B . Determine las reacciones en sus soportes. Ignore su peso y espesor.

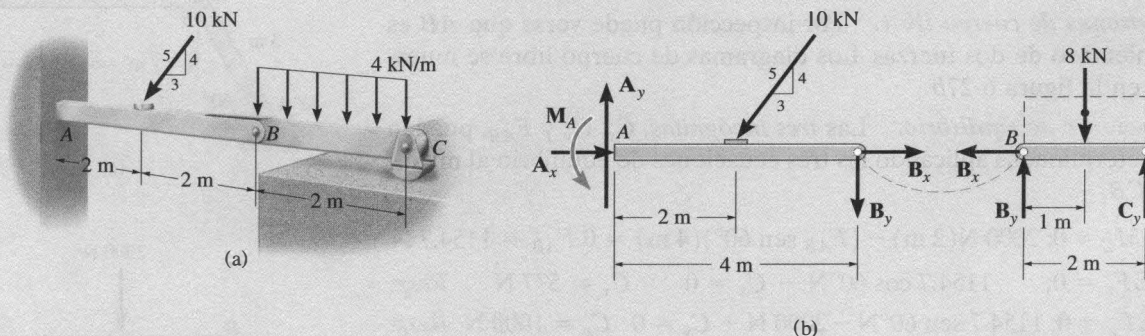


Fig. 6-28

Solución

Diagramas de cuerpo libre. Por inspección, si consideramos un diagrama de cuerpo libre de toda la viga ABC , habrá tres reacciones desconocidas en A y una en C . Esas cuatro incógnitas no pueden obtenerse con las tres ecuaciones de equilibrio, por lo que será necesario desmembrar la viga en sus dos segmentos como se muestra en la figura 6-28b.

Ecuaciones de equilibrio. Las seis incógnitas son determinadas como sigue:

Segmento BC

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & B_x &= 0 \\ \downarrow + \Sigma M_B &= 0; & -8 \text{ kN}(1 \text{ m}) + C_y(2 \text{ m}) &= 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y &= 0; & B_y - 8 \text{ kN} + C_y &= 0 \end{aligned}$$

Segmento AB

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & A_x - (10 \text{ kN})\left(\frac{3}{5}\right) + B_x &= 0 \\ \downarrow + \Sigma M_A &= 0; & M_A - (10 \text{ kN})\left(\frac{4}{5}\right)(2 \text{ m}) - B_y(4 \text{ m}) &= 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y &= 0; & A_y - (10 \text{ kN})\left(\frac{4}{5}\right) - B_y &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver sucesivamente cada una de esas ecuaciones, usando resultados calculados antes, obtenemos

$$\begin{aligned} A_x &= 6 \text{ kN} & A_y &= 12 \text{ kN} & M_A &= 32 \text{ kN} \cdot \text{m} & \text{Resp.} \\ B_x &= 0 & B_y &= 4 \text{ kN} & & & \\ C_y &= 4 \text{ kN} & & & & & \text{Resp.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 6.16

Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical que el pasador situado en C ejerce sobre el miembro $ABCD$ del bastidor que muestra la figura 6-29a.

Solución

Diagramas de cuerpo libre. Por inspección, las tres componentes de reacción que los soportes ejercen sobre $ABCD$ pueden ser determinadas a partir de un diagrama de cuerpo libre de todo el bastidor, figura 6-29b. También, el diagrama de cuerpo libre de cada miembro del bastidor se muestra en la figura 6-29c. Observe que BE es un miembro de dos fuerzas. Como se muestra mediante las líneas discontinuas más oscuras, las fuerzas en B , C y E tienen magnitudes iguales pero direcciones opuestas en los diagramas separados de cuerpo libre.

Ecuaciones de equilibrio. Las seis incógnitas A_x , A_y , F_B , C_x , C_y y D_x serán determinadas con las ecuaciones de equilibrio aplicadas a todo el bastidor y luego al miembro CEF . Tenemos

Bastidor completo

$$\downarrow + \sum M_A = 0; \quad -981 \text{ N}(2 \text{ m}) + D_x(2.8 \text{ m}) = 0 \quad D_x = 700.7 \text{ N}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad A_x - 700.7 \text{ N} = 0 \quad A_x = 700.7 \text{ N}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad A_y - 981 \text{ N} = 0 \quad A_y = 981 \text{ N}$$

Miembro CEF

$$\downarrow + \sum M_C = 0; \quad -981 \text{ N}(2 \text{ m}) - (F_B \text{ sen } 45^\circ)(1.6 \text{ m}) = 0$$

$$F_B = -1734.2 \text{ N}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad -C_x - (-1734.2 \text{ cos } 45^\circ \text{ N}) = 0$$

$$C_x = 1226 \text{ N}$$

Resp.

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad C_y - (-1734.2 \text{ sen } 45^\circ \text{ N}) - 981 \text{ N} = 0$$

$$C_y = -245 \text{ N}$$

Resp.

Dado que las magnitudes de F_B y C_y se calcularon como cantidades negativas, fueron supuestas actuando en el sentido incorrecto en los diagramas de cuerpo libre, figura 6-29c. El sentido correcto de esas fuerzas podría haber sido determinado “por inspección” antes de aplicar las ecuaciones de equilibrio al miembro CEF . Como se muestra en la figura 6-29c, el equilibrio por momento con respecto al punto E sobre el miembro CEF indica que C_y debe actuar en realidad *hacia abajo* para contrarrestar el momento creado por la fuerza de 981 N con respecto a E . Similarmente, sumando momentos con respecto a C , se ve que la componente vertical de F_B debe actuar en realidad *hacia arriba*, por lo que F_B debe actuar hacia arriba y hacia la derecha.

Los cálculos anteriores pueden ser verificados aplicando las tres ecuaciones de equilibrio al miembro $ABCD$, figura 6-29c.

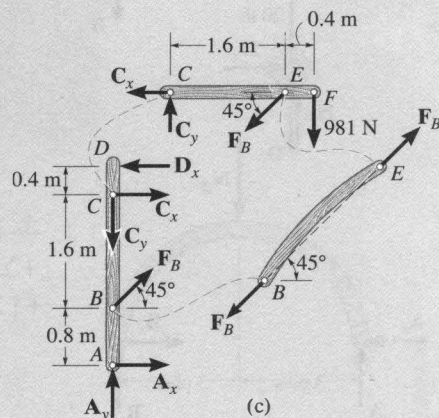
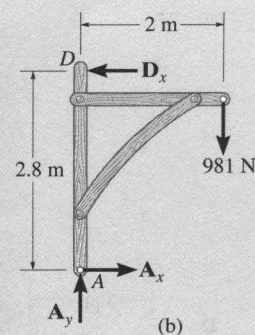
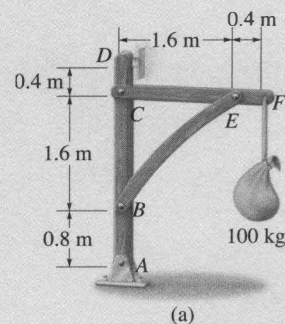
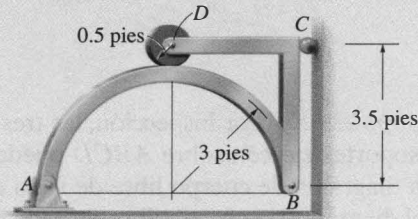


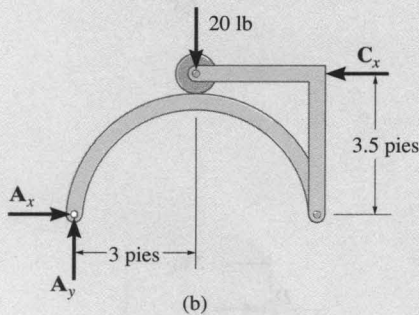
Fig. 6-29

EJEMPLO 6.17

El disco liso mostrado en la figura 6-30a está articulado en D y tiene un peso de 20 lb. Ignore los pesos de los otros miembros, y determine las componentes de reacción horizontal y vertical en los pasadores B y D .



(a)



(b)

Solución

Diagramas de cuerpo libre. Por inspección, las tres componentes de reacción en los soportes pueden ser determinadas a partir de un diagrama de cuerpo libre de todo el bastidor, figura 6-30b. En la figura 6-30c se muestran los diagramas de cuerpo libre de los miembros.

Ecuaciones de equilibrio. Las ocho incógnitas pueden, por supuesto, obtenerse aplicando las ocho ecuaciones de equilibrio a cada miembro, tres al miembro AB , tres al miembro BCD , y dos al disco. (El equilibrio por momento es satisfecho automáticamente por el disco). Sin embargo, si se hace esto, todos los resultados pueden obtenerse sólo a partir de una solución simultánea de algunas de las ecuaciones. (Inténtelo y encuéntrelos). Para evitar esta situación, es mejor determinar primero las tres reacciones en los soportes sobre el bastidor completo; luego, usando esos resultados, pueden aplicarse las restantes cinco ecuaciones de equilibrio a otras dos partes para resolver sucesivamente las otras incógnitas.

Bastidor completo

$$\begin{aligned} \downarrow + \sum M_A = 0; & \quad -20 \text{ lb}(3 \text{ pies}) + C_x(3.5 \text{ pies}) = 0 & \quad C_x = 17.1 \text{ lb} \\ \pm \sum F_x = 0; & \quad A_x - 17.1 \text{ lb} = 0 & \quad A_x = 17.1 \text{ lb} \\ + \uparrow \sum F_y = 0; & \quad A_y - 20 \text{ lb} = 0 & \quad A_y = 20 \text{ lb} \end{aligned}$$

Miembro AB

$$\begin{aligned} \pm \sum F_x = 0; & \quad 17.1 \text{ lb} - B_x = 0 & \quad B_x = 17.1 \text{ lb} & \quad \text{Resp.} \\ \downarrow + \sum M_B = 0; & \quad -20 \text{ lb}(6 \text{ pies}) + N_D(3 \text{ pies}) = 0 & \quad N_D = 40 \text{ lb} \\ + \uparrow \sum F_y = 0; & \quad 20 \text{ lb} - 40 \text{ lb} + B_y = 0 & \quad B_y = 20 \text{ lb} & \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Disco

$$\begin{aligned} \pm \sum F_x = 0; & \quad D_x = 0 & \quad \text{Resp.} \\ + \uparrow \sum F_y = 0; & \quad 40 \text{ lb} - 20 \text{ lb} - D_y = 0 & \quad D_y = 20 \text{ lb} & \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

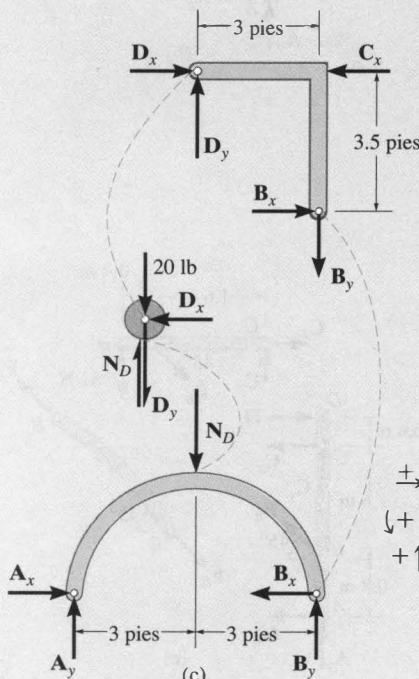


Fig. 6-30

EJEMPLO 6.18

Determine la tensión en los cables y la fuerza **P** requerida para soportar la fuerza de 600 N usando el sistema de poleas sin fricción mostrado en la figura 6-31a.

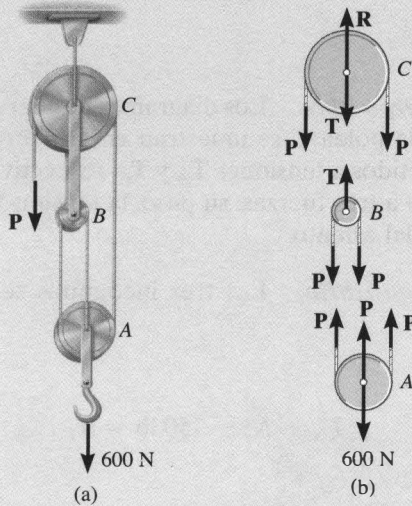


Fig. 6-31

Solución

Diagrama de cuerpo libre. En la figura 6-31b se muestra un diagrama de cuerpo libre de cada polea *incluido* su pasador y una porción del cable en contacto. Como el cable es *continuo* y las poleas no tienen fricción, el cable tiene una *tensión constante* P que actúa en toda su longitud (vea el ejemplo 5.7). El eslabón que conecta las poleas B y C es un miembro de dos fuerzas, y por tanto, tiene una tensión T desconocida actuando sobre él. Advierta que el *principio de acción igual, pero reacción opuesta* debe ser cumplido escrupulosamente para las fuerzas P y T cuando se trazan los diagramas de cuerpo libre *por separado*.

Ecuaciones de equilibrio. Las tres incógnitas son obtenidas como sigue:

Polea A

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 3P - 600 \text{ N} = 0 \quad P = 200 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

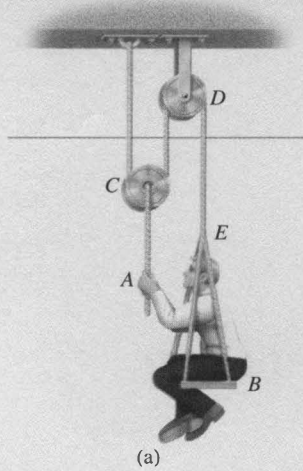
Polea B

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad T - 2P = 0 \quad T = 400 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

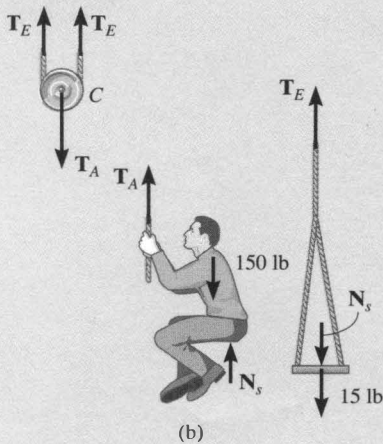
Polea C

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad R - 2P - T = 0 \quad R = 800 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

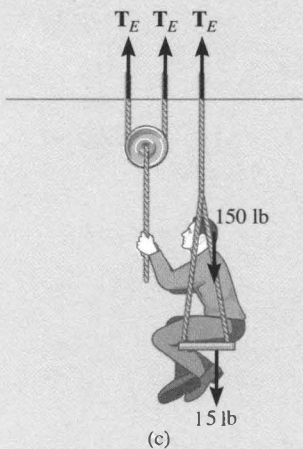
EJEMPLO 6.19



(a)



(b)



(c)

Fig. 6-32

Un hombre con peso de 150 lb se soporta a sí mismo por medio del sistema de cables y poleas mostrado en la figura 6-32a. Si el asiento pesa 15 lb, determine la fuerza que el hombre debe ejercer en el cable en el punto A y la fuerza que ejerce sobre el asiento. Ignore el peso de cables y poleas.

Solución I

Diagramas de cuerpo libre. Los diagramas de cuerpo libre del hombre, el asiento y la polea C se muestran en la figura 6-32b. Los dos cables están sometidos a tensiones T_A y T_E , respectivamente. El hombre está sometido a tres fuerzas: su peso, la tensión T_A del cable AC, y la reacción N_s del asiento.

Ecuaciones de equilibrio. Las tres incógnitas se obtienen como sigue:

Hombre

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad T_A + N_s - 150 \text{ lb} = 0 \quad (1)$$

Asiento

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad T_E - N_s - 15 \text{ lb} = 0 \quad (2)$$

Polea C

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 2T_E - T_A = 0 \quad (3)$$

Aquí T_E puede ser determinada sumando las ecuaciones 1 y 2 para eliminar N_s y aplicando luego la ecuación 3. Las otras incógnitas se obtienen entonces por resustitución de T_E .

$$T_A = 110 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

$$T_E = 55 \text{ lb}$$

$$N_s = 40 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

Solución II

Diagramas de cuerpo libre. Usando la sección más oscura mostrada en la figura 6-32a, el hombre, la polea y el asiento pueden ser considerados como un *solo sistema*, figura 6-32c. Aquí, N_s y T_A son fuerzas *internas*, y por tanto, no se incluyen en este diagrama de cuerpo libre “combinado”.

Ecuaciones de equilibrio. Aplicando $\Sigma F_y = 0$ obtenemos una solución *directa* para T_E .

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 3T_E - 15 \text{ lb} - 150 \text{ lb} = 0 \quad T_E = 55 \text{ lb}$$

Las otras incógnitas pueden obtenerse a partir de las ecuaciones 2 y 3.

EJEMPLO 6.20

La mano ejerce una fuerza de 8 lb sobre el mango del compresor de resorte mostrado en la figura 6-33a. Determine la fuerza que es necesaria en el resorte para mantener el equilibrio del mecanismo.

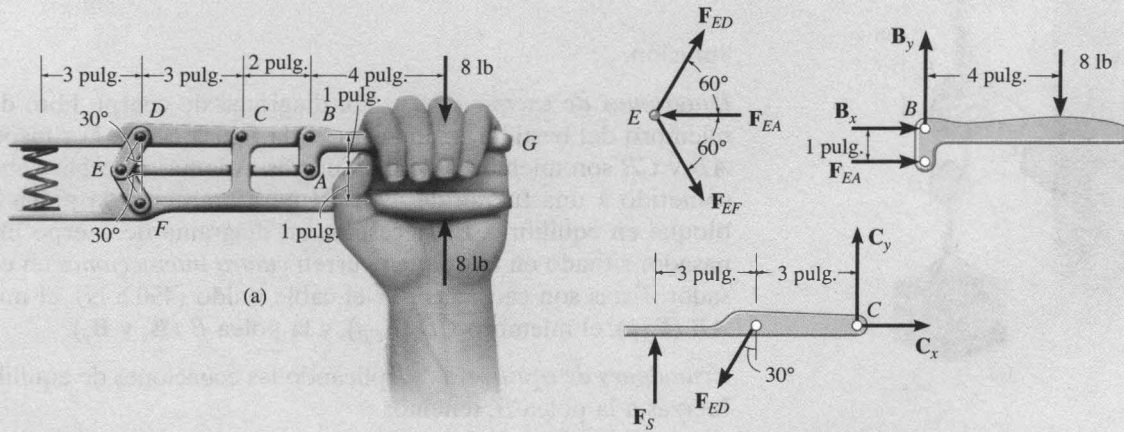


Fig. 6-33

Solución

Diagramas de cuerpo libre. Por inspección, los miembros EA , ED y EF son todos miembros de dos fuerzas. Los diagramas de cuerpo libre para las partes DC y ABG se muestran en la figura 6-33b. El pasador situado en E ha sido también incluido aquí ya que se tienen *tres* interacciones de fuerzas sobre él. Las fuerzas representan los efectos de los miembros ED , EA y EF . Observe atentamente cómo ocurren reacciones de fuerzas iguales y opuestas entre cada una de las partes.

Ecuaciones de equilibrio. A partir del estudio de los diagramas de cuerpo libre, vemos que la forma más directa de obtener la fuerza en el resorte es aplicando las ecuaciones de equilibrio en la siguiente secuencia:

Palanca ABG

$$\zeta + \sum M_B = 0; \quad F_{EA}(1 \text{ pulg.}) - 8 \text{ lb}(4 \text{ pulg.}) = 0 \quad F_{EA} = 32 \text{ lb}$$

Pasador E

$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y = 0; & \quad F_{ED} \sin 60^\circ - F_{EF} \sin 60^\circ = 0 \quad F_{ED} = F_{EF} = F \\ \rightarrow \sum F_x = 0; & \quad 2F \cos 60^\circ - 32 \text{ lb} = 0 \quad F = 32 \text{ lb} \end{aligned}$$

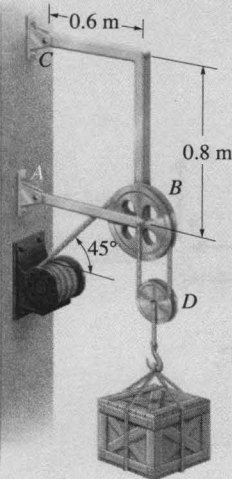
Brazo DC

$$\zeta + \sum M_C = 0; \quad -F_s(6 \text{ pulg.}) + 32 \cos 30^\circ \text{ lb}(3 \text{ pulg.}) = 0$$

$$F_s = 13.9 \text{ lb}$$

Resp.

EJEMPLO 6.21



(a)

El bloque de 100 kg es mantenido en equilibrio por medio del sistema de poleas y cable continuo mostrado en la figura 6-34a. Si el cable está unido al pasador situado en *B*, calcule las fuerzas que este pasador ejerce sobre cada uno de sus miembros conectores.

Solución

Diagramas de cuerpo libre. Un diagrama de cuerpo libre de cada miembro del bastidor se muestra en la figura 6-34b. Por inspección, *AB* y *CB* son miembros de dos fuerzas. Además, el cable debe estar sometido a una fuerza de 490.5 N para mantener la polea *D* y el bloque en equilibrio. Es necesario un diagrama de cuerpo libre del pasador situado en *B* ya que ocurren *cuatro interacciones* en este pasador. Éstas son causadas por el cable unido (490.5 N), el miembro *AB* (F_{AB}), el miembro *CB* (F_{CB}), y la polea *B* (B_x y B_y).

Ecuaciones de equilibrio. Aplicando las ecuaciones de equilibrio de fuerzas a la polea *B*, tenemos

$$\pm \sum F_x = 0; \quad B_x - 490.5 \cos 45^\circ \text{ N} = 0 \quad B_x = 346.8 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad B_y - 490.5 \sin 45^\circ \text{ N} - 490.5 \text{ N} = 0$$

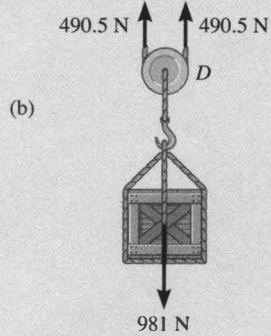
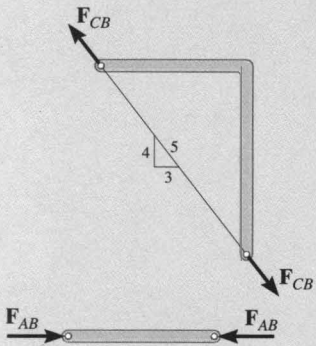
$$B_y = 837.3 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

Usando estos resultados, el equilibrio del pasador requiere que

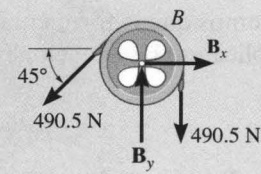
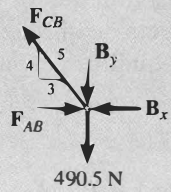
$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad \frac{4}{5} F_{CB} - 837.3 \text{ N} - 490.5 \text{ N} \quad F_{CB} = 1660 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$\pm \sum F_x = 0; \quad F_{AB} - \frac{3}{5}(1660 \text{ N}) - 346.8 \text{ N} = 0 \quad F_{AB} = 1343 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

Puede advertirse que el miembro de dos fuerzas *CB* está sometido a una flexión causada por la fuerza F_{CB} . Desde el punto de vista del diseño, sería mejor hacer recto este miembro (de *C* a *B*) y así la fuerza F_{CB} sólo generaría tensión en el miembro.



(b)



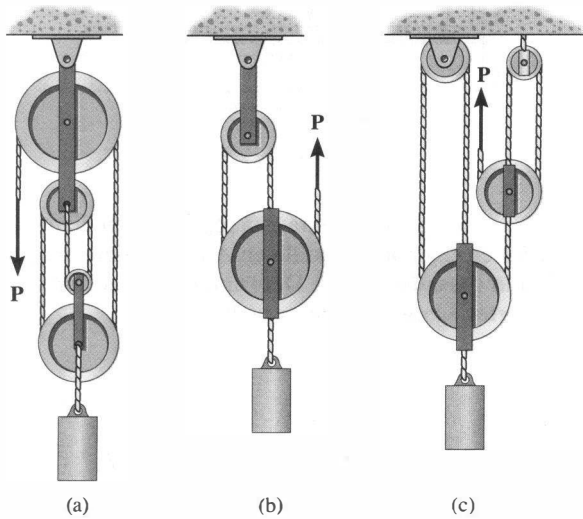
(c)

Fig. 6-34

Antes de resolver los siguientes problemas, se sugiere repasar brevemente todos los ejemplos previos. Esto puede hacerse cubriendo cada solución, tratando de localizar los miembros de dos fuerzas, trazando los diagramas de cuerpo libre, y procurando encontrar maneras de aplicar las ecuaciones de equilibrio para obtener la solución.

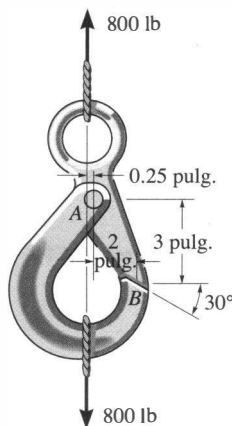
PROBLEMAS

6-66. En cada caso, determine la fuerza P requerida para mantener el equilibrio. El bloque pesa 100 lb.



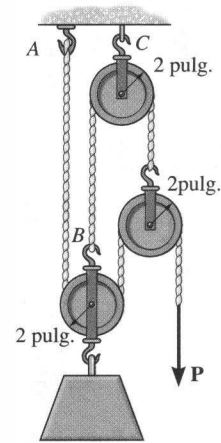
Prob. 6-66

6-67. El gancho de ojo tiene una aldaba de cierre cuando soporta la carga porque sus dos partes están conectadas mediante un pasador situado en A y se apoyan entre sí a lo largo de la superficie lisa localizada en B . Determine la fuerza resultante en el pasador y la fuerza normal en B cuando el gancho de ojo soporta una carga de 800 lb.



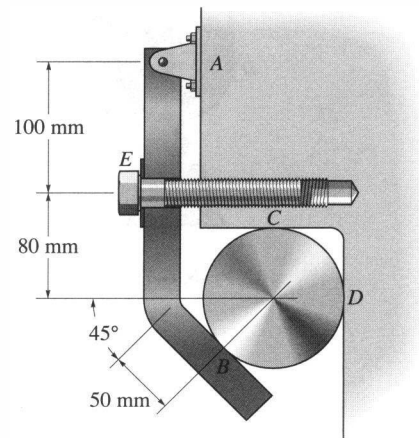
Prob. 6-67

*6-68. Determine la fuerza P necesaria para soportar el peso de 100 lb. Cada polea tiene un peso de 10 lb. ¿Cuáles son las reacciones en la cuerda en A y en B ?



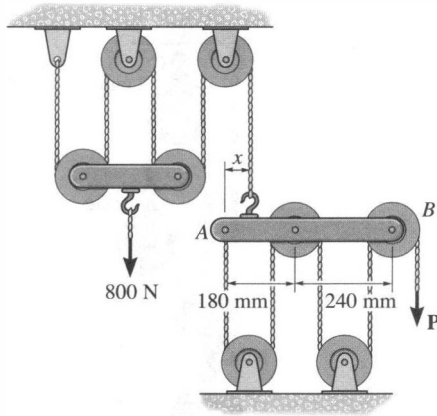
Prob. 6-68

6-69. El eslabón se usa para mantener la barra en su lugar. Determine la fuerza axial requerida sobre el tornillo colocado en E si la fuerza más grande que será ejercida sobre la barra situada en B , C o D es de 100 lb. Encuentre también la magnitud de la reacción en el pasador A . Suponga que todas las superficies son lisas.



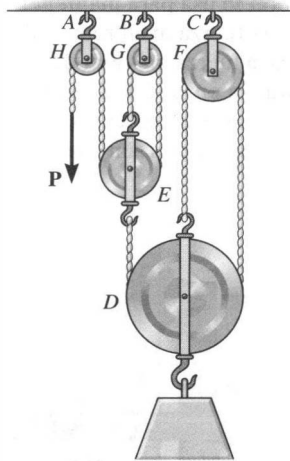
Prob. 6-69

6-70. Los principios de un *bloque diferencial de cadena* están indicados esquemáticamente en la figura. Determine la magnitud de la fuerza P necesaria para soportar la fuerza de 800 N. Encuentre también la distancia x donde el cable debe estar unido a la barra AB de manera que ésta permanezca horizontal. Todas las poleas tienen un radio de 60 mm.



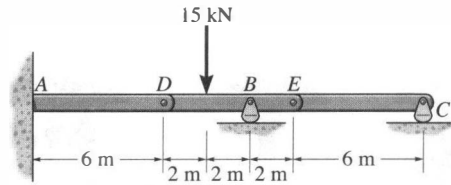
Prob. 6-70

6-71. Determine la fuerza P necesaria para soportar la masa de 20 kg usando el conjunto de poleas *Spanish Burton* mostrado en la figura. Calcule también las reacciones en los ganchos soportantes situados en A , B y C .



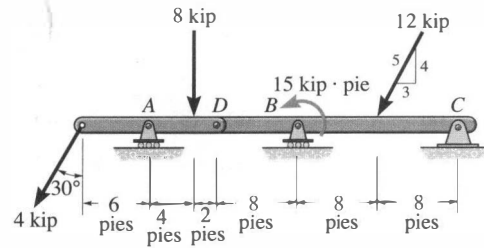
Prob. 6-71

*6-72. La viga compuesta está fija en A y soportada mediante una mecedora en B y C . Se tienen articulaciones (pasadores) en D y E . Determine las reacciones en los soportes.



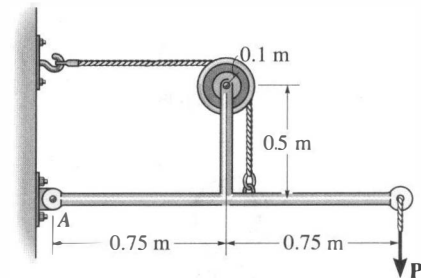
Prob. 6-72

6-73. La viga compuesta está soportada mediante un pasador en C y por un rodillo en A y B . Se tiene una articulación (pasador) en D . Determine las reacciones en los soportes. Ignore el espesor de la viga.



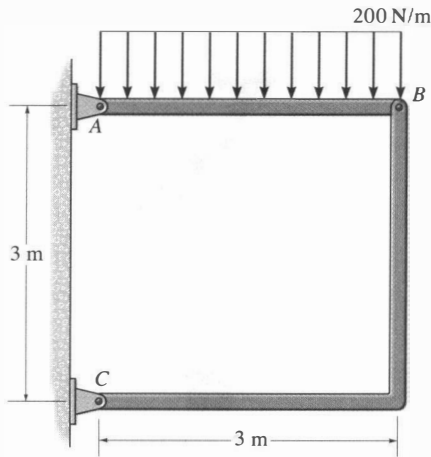
Prob 6-73

6-74. Determine la fuerza P más grande que puede ser aplicada al bastidor si la fuerza resultante más intensa que actúa en A puede tener una magnitud de 2 kN.



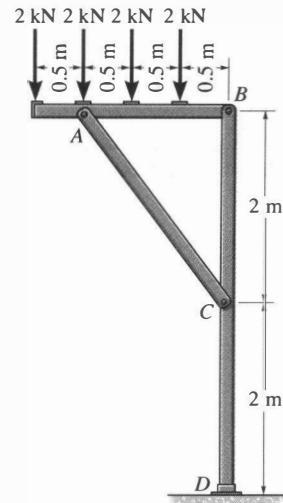
Prob. 6-74

6-75. Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical en los pasadores A y C del bastidor de dos miembros.



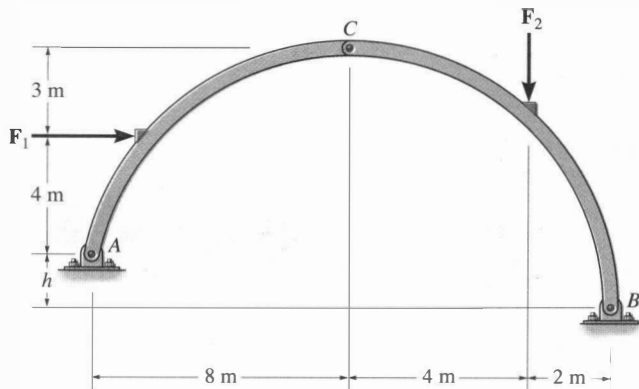
Prob. 6-75

6-77. Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical en los pasadores A , B y C , y las reacciones en el soporte fijo (empotramiento) D del bastidor de tres miembros.



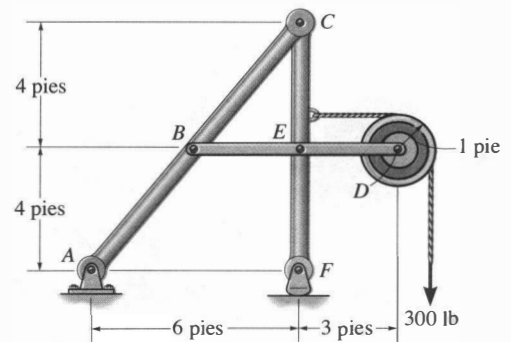
Prob. 6-77

*6-76. El arco de tres articulaciones soporta las cargas $F_1 = 8$ kN y $F_2 = 5$ kN. Determine las componentes de reacción horizontal y vertical en los pasadores A y B . Considere $h = 2$ m.



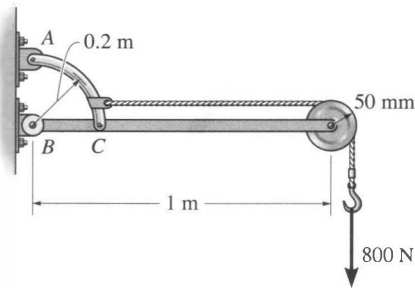
Prob. 6-76

6-78. Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical en C que el miembro ABC ejerce sobre el miembro CEF .



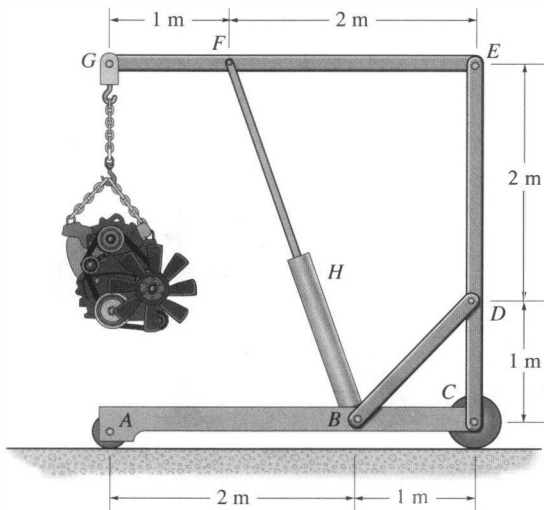
Prob. 6-78

6-79. Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical que los pasadores en A , B y C ejercen sobre sus miembros conectores.



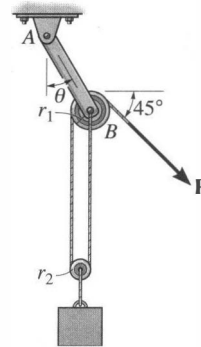
Prob. 6-79

*6-80. El montacargas soporta el motor de 125 kg. Determine la fuerza que la carga genera en el miembro DB y en el miembro FB , la cual contiene el cilindro hidráulico H .



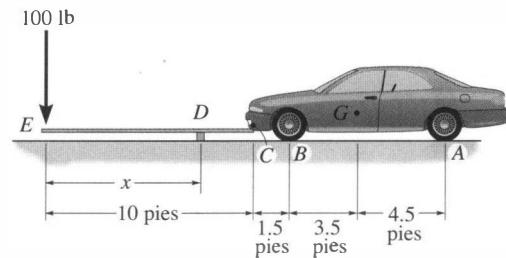
Prob. 6-80

6-81. Determine la fuerza P presente en la cuerda, y el ángulo θ que el eslabón AB , que soporta la polea, forma con la vertical. Ignore la masa de las poleas y del eslabón. El bloque tiene un peso de 200 lb y la cuerda está unida al pasador situado en B . Las poleas tienen radios $r_1 = 2$ pulg y $r_2 = 1$ pulg.



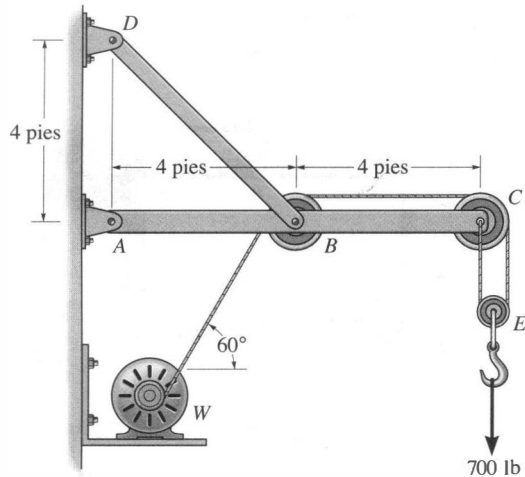
Prob. 6-81

6-82. El frente del automóvil debe ser levantado usando un tablón rígido de 10 pies de longitud. El automóvil tiene un peso de 3500 lb y centro de gravedad en G . Determine la posición x del punto de apoyo de manera que una fuerza aplicada de 100 lb en E levante las ruedas frontales del automóvil.



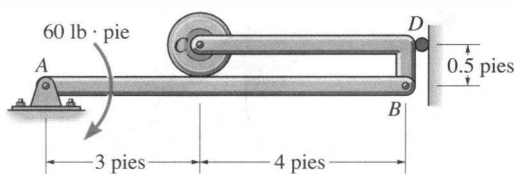
Prob. 6-82

6-83. La grúa de pared soporta una carga de 700 lb. Determine las componentes de reacción horizontal y vertical en los pasadores A y D . También, ¿cuál es la fuerza en el cable en el cabrestante W ?



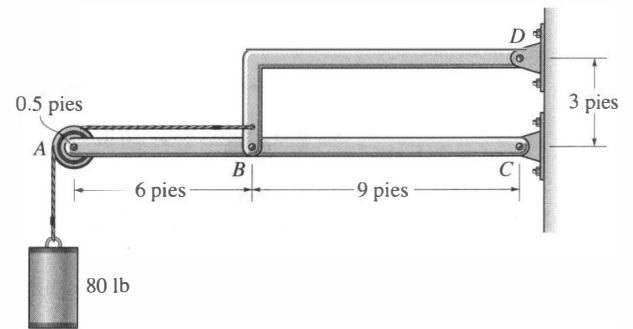
Prob. 6-83

*6-84. Determine la fuerza que el rodillo liso C ejerce sobre la viga AB . También, ¿cuáles son las componentes de reacción horizontal y vertical en el pasador A ? Ignore el peso del bastidor y del rodillo.



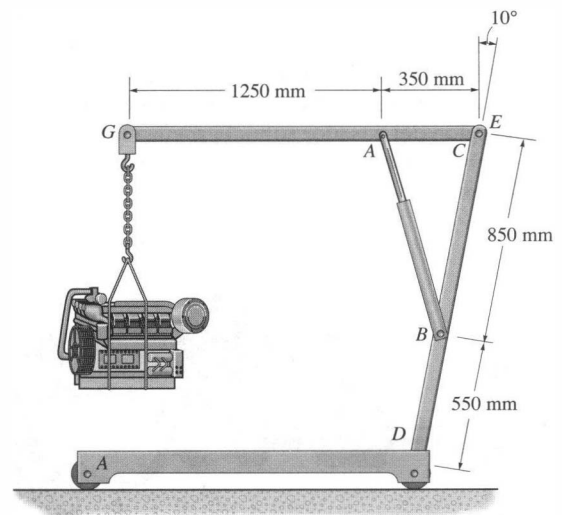
Prob. 6-84

6-85. Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical que los pasadores ejercen sobre el miembro ABC .



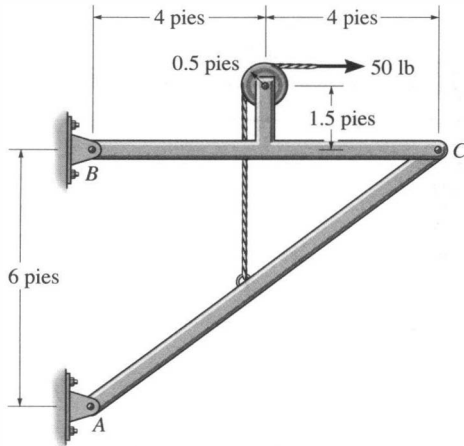
Prob. 6-85

6-86. El montacargas se usa para soportar el motor de 200 kg. Determine la fuerza que actúa en el cilindro hidráulico AB , las componentes de fuerza horizontal y vertical en el pasador C , y las reacciones en el soporte fijo D .



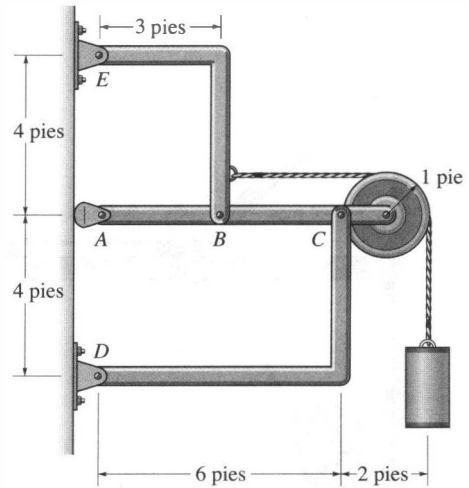
Prob. 6-86

6-87. Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical en los pasadores B y C .



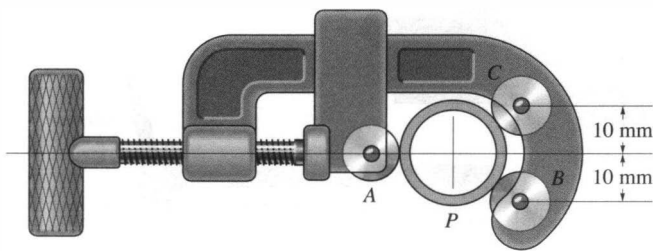
Prob. 6-87

6-89. Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical en cada pasador. El cilindro suspendido pesa 80 lb.



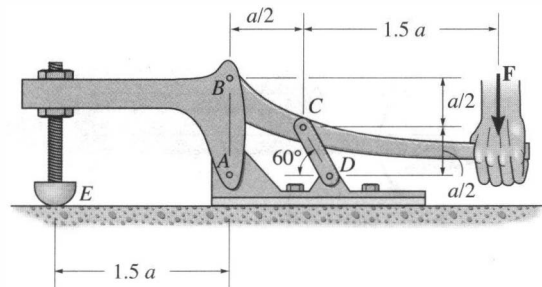
Prob. 6-89

*6-88. La cortadora de tubos está afianzada alrededor del tubo P . Si la rueda situada en A ejerce una fuerza normal de $F_A = 80$ N sobre el tubo, determine las fuerzas normales de las ruedas B y C sobre el tubo. Calcule también la reacción del pasador sobre la rueda en C . Las tres ruedas tienen cada una un radio de 7 mm y el tubo tiene un radio exterior de 10 mm.



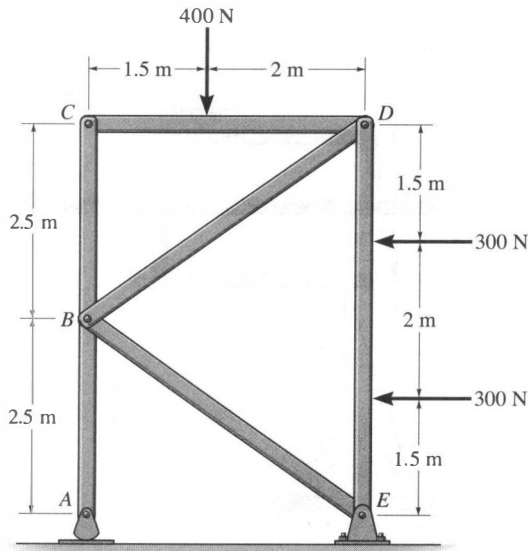
Prob. 6-88

6-90. La prensa de palanca acodada está sometida a una fuerza F en el mango. Determine la fuerza vertical de prensado que actúa en E .



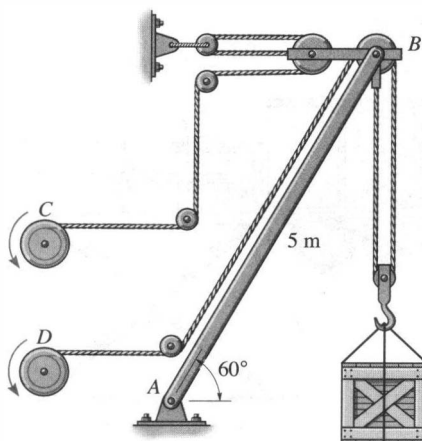
Prob. 6-90

6-91. Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical que los pasadores en A , B y C ejercen sobre el miembro ABC del bastidor.



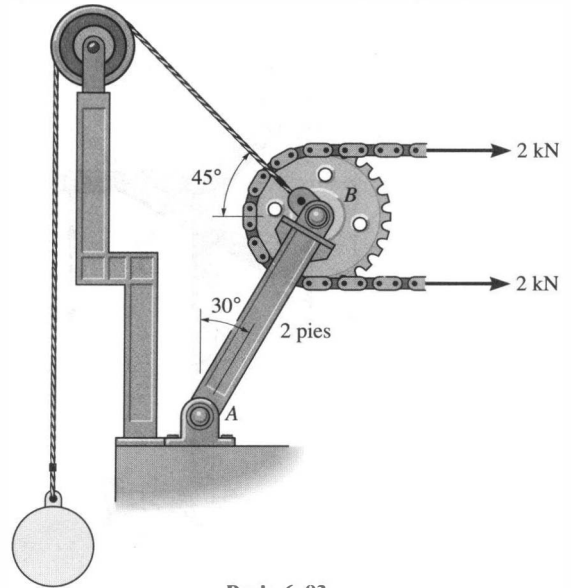
Prob. 6-91

***6-92.** El puntal de carga está conectado mediante un pasador al pivote colocado en A . Determine la masa más grande que puede ser soportada por el puntal si la fuerza máxima que puede ser resistida por el pasador situado en A es de 18 kN.



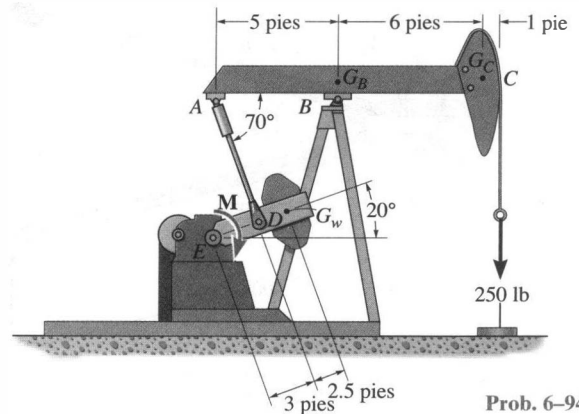
Prob. 6-92

6-93. Determine la masa requerida del cilindro suspendido si la tensión en la cadena enrollada alrededor del engrane que gira libremente es de 2 kN. También, ¿cuál es la magnitud de la fuerza resultante sobre el pasador A ?



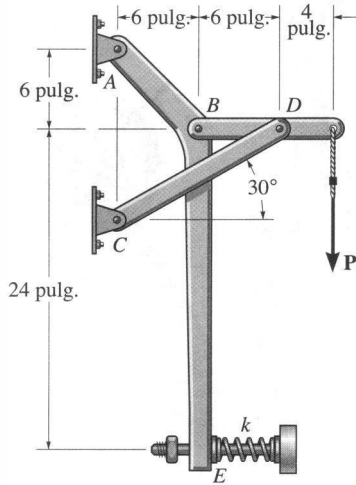
Prob. 6-93

6-94. La unidad de bombeo se usa para extraer petróleo. Cuando la viga de balancín ABC está en posición horizontal, la fuerza que actúa en el cable de perforación situado en la cabeza del pozo es de 250 lb. Determine la torca M que debe ejercerse por el motor para vencer esta carga. La cabeza de caballo C pesa 60 lb y su centro de gravedad está en G_C . La viga de balancín ABC tiene un peso de 130 lb y centro de gravedad en G_B , y el contrapeso tiene un peso de 200 lb y centro de gravedad en G_W . La biela, AD , está conectada mediante pasadores en sus extremos y tiene un peso insignificante.



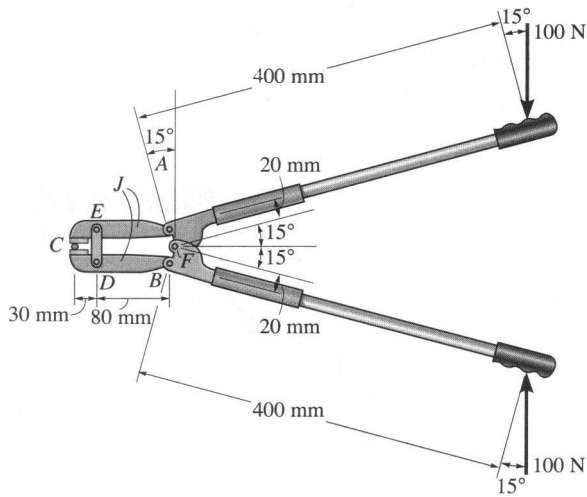
Prob. 6-94

6-95. Determine la fuerza P sobre el cable si el resorte está comprimido en 0.5 pulg cuando el mecanismo se encuentra en la posición mostrada. El resorte tiene rigidez $k = 800 \text{ lb/pie}$.



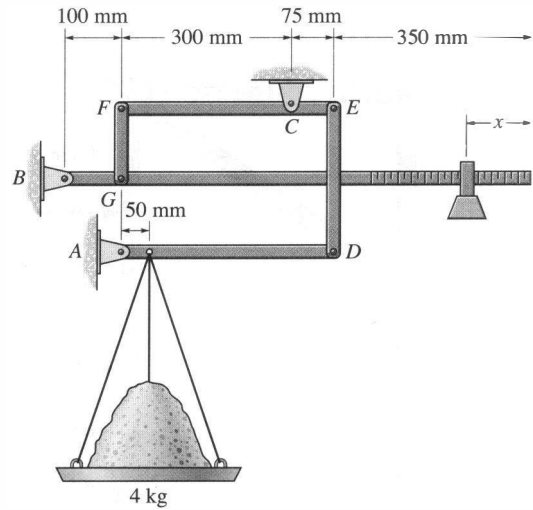
Prob. 6-95

*6-96. Determine la fuerza que las mordazas J de la cortadora de metal ejercen sobre el cable C liso si fuerzas de 100 N son aplicadas a los mangos. Las mordazas están unidas mediante pasadores en E y A , y en D y B . Se tiene también un pasador en F .



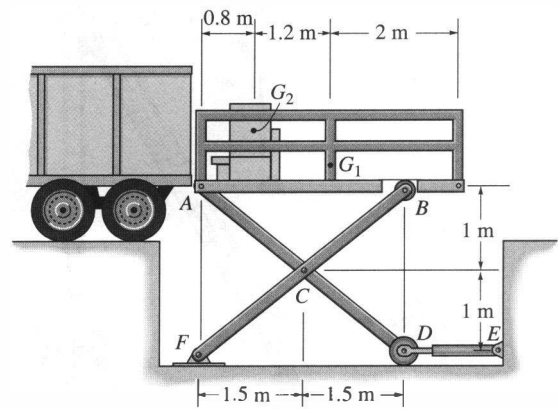
Prob. 6-96

6-97. Se muestra el arreglo compuesto de la balanza de platillo. Si la masa colocada sobre el platillo pesa 4 kg, determine las componentes horizontal y vertical en los pasadores A , B y C y la distancia x de la masa de 25 g para mantener a la balanza en equilibrio.



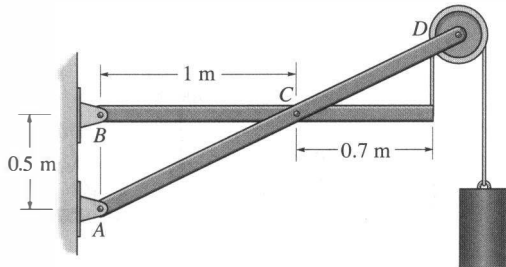
Prob. 6-97

6-98. El elevador de tijera consiste en dos conjuntos de miembros transversales y dos cilindros hidráulicos, DE , simétricamente colocados a cada lado de la plataforma. La plataforma tiene una masa uniforme de 60 kg, con centro de gravedad en G_1 . La carga de 85 kg, con centro de gravedad en G_2 , está localizada al centro entre cada lado de la plataforma. Determine la fuerza en cada uno de los cilindros hidráulicos por equilibrio. En B y D se tienen rodillos.



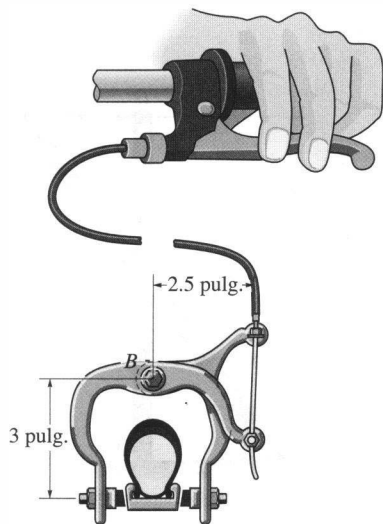
Prob. 6-98

6-99. Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical que los pasadores en A , B y C ejercen sobre el bastidor. El cilindro tiene una masa de 80 kg. La polea tiene un radio de 0.1 m.



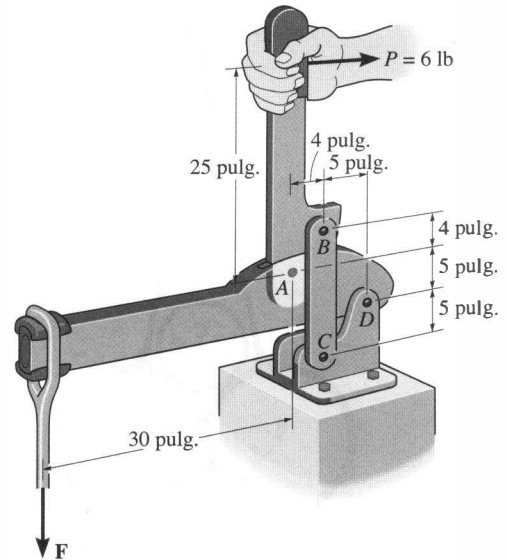
Prob. 6-99

*6-100. Al oprimir el freno de mano de la bicicleta, el ciclista somete al cable del freno a una tensión de 50 lb. Si el mecanismo de frenado se conecta mediante un pasador al bastidor de la bicicleta en el punto B , determine la fuerza normal que cada zapata del freno ejerce sobre el borde de la rueda. ¿Es esta fuerza la que detiene el giro de la rueda? Explique su respuesta.



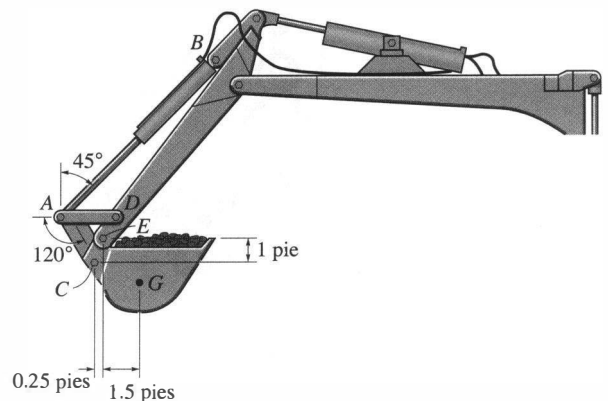
Prob. 6-100

6-101. Si una fuerza de $P = 6$ lb es aplicada perpendicularmente al mango del mecanismo, determine la magnitud de la fuerza F por equilibrio. Los miembros están conectados mediante pasadores en A , B , C y D .



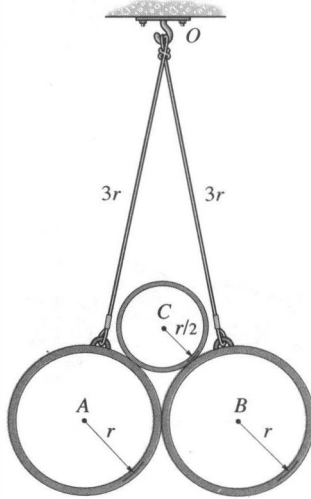
Prob. 6-101

6-102. El cucharón de la retroexcavadora y su contenido tienen un peso de 1200 lb y centro de gravedad en G . Determine las fuerzas aplicadas al cilindro hidráulico AB y en los eslabones AC y AD para mantener la carga en la posición mostrada. El cucharón está unido por un pasador colocado en E .



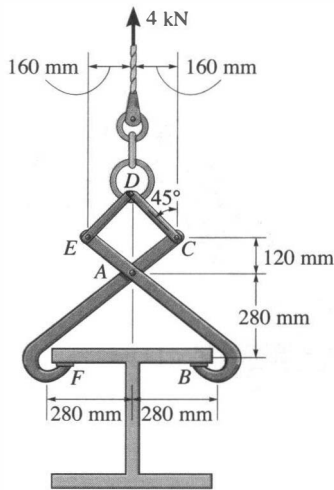
Prob. 6-102

6-103. Dos tubos lisos A y B , ambos de mismo peso W , están suspendidos de un punto común O por medio de cuerdas de igual longitud. Un tercer tubo, C , está colocado entre A y B . Determine el peso máximo de C sin que se perturbe el equilibrio.



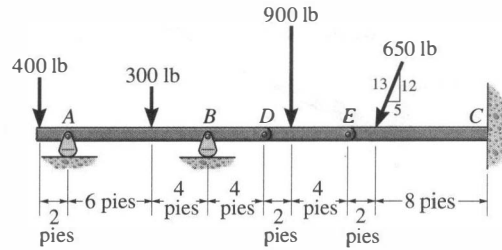
Prob. 6-103

***6-104.** La doble mordaza de eslabones se usa para levantar la viga. Si la viga pesa 4 kN, determine las componentes de fuerza horizontal y vertical que actúan sobre el pasador en A y las componentes de fuerza horizontal y vertical que el patín de la viga ejerce sobre la mandíbula en B .



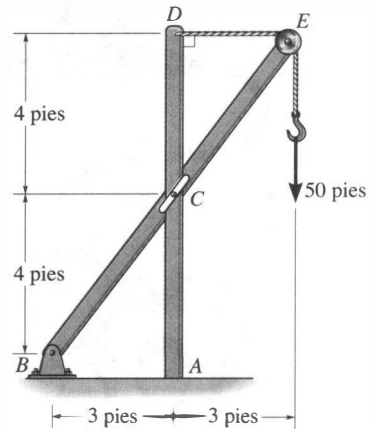
Prob. 6-104

6-105. La viga compuesta está empotrada en C y soportada por mecedoras en A y B . Si se tienen articulaciones (pasadores) en D y E , determine las componentes de reacción en los soportes. Ignore el espesor de la viga.



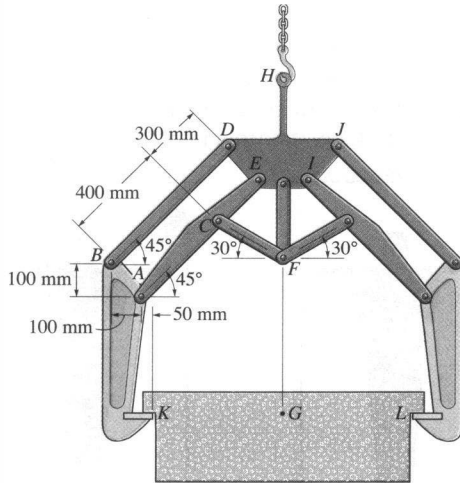
Prob. 6-105

6-106. Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical en el pasador B y la fuerza normal que el pasador ubicado en C ejerce sobre la ranura lisa. También, determine el momento y las reacciones de fuerza horizontal y vertical en A . Se tiene una polea en E .



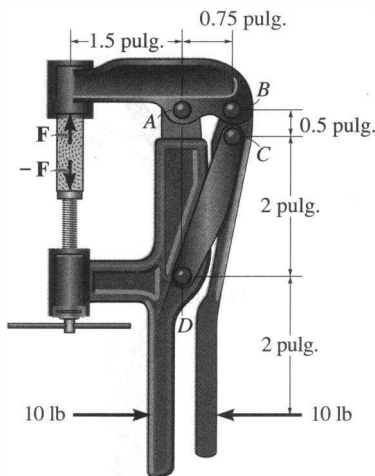
Prob. 6-106

6-107. Las tenazas simétricas soportan el carrito que tiene una masa de 800 kg y centro de masa en G . Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical que el eslabonamiento ejerce sobre la placa $DEIJH$ en los puntos D y E . El carrito sólo ejerce reacciones verticales en K y L .



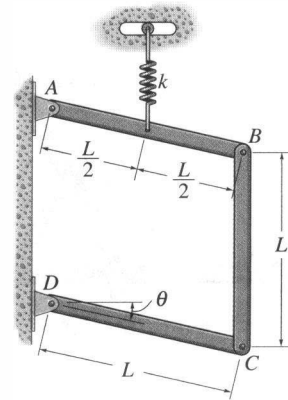
Prob. 6-107

***6-108.** Si una fuerza de 10 lb es aplicada al mango de las pinzas, determine la fuerza de compresión F que el bloque de madera ejerce sobre las pinzas.



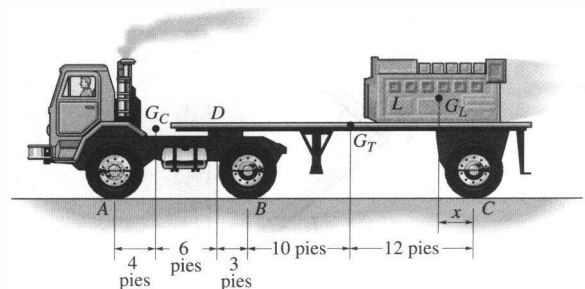
Prob. 6-108

6-109. Si cada uno de los tres eslabones uniformes del mecanismo tiene longitud L y peso W , determine el ángulo θ por equilibrio. El resorte, que siempre permanece vertical, no se estira cuando $\theta = 0^\circ$.



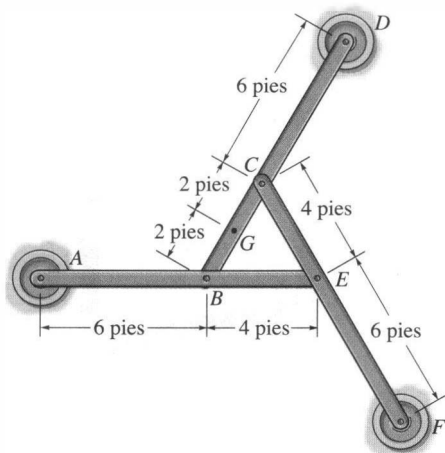
Prob. 6-109

6-110. El trailer de plataforma tiene un peso de 7000 lb y centro de gravedad en G_T . La plataforma está conectada a la cabina mediante un pasador ubicado en D . La cabina tiene un peso de 6000 lb y centro de gravedad en G_C . Determine el rango de valores x para la posición de la carga L de 2000 lb de manera que cuando esté colocada sobre el eje posterior, ningún eje esté sometido a más de 5500 lb. La carga tiene un centro de gravedad en G_L .



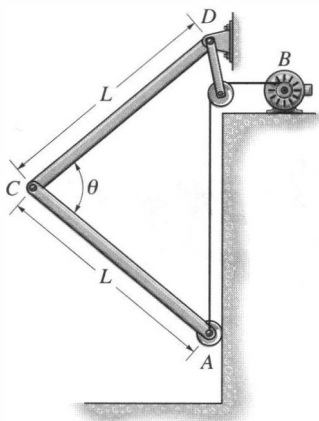
Prob. 6-110

6-111. Los tres miembros conectados mediante pasadores como se muestra en la *vista en planta* soportan una fuerza hacia abajo de 60 lb en *G*. Si en las conexiones *B*, *C*, *E* y en los apoyos planos *A*, *D*, *F* son soportadas sólo fuerzas verticales, determine las reacciones en cada apoyo.



Prob. 6-111

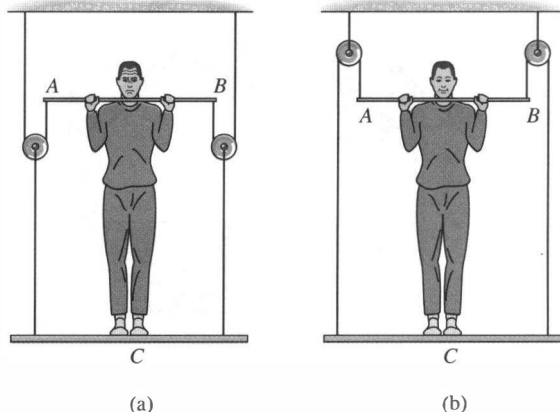
***6-112.** La puerta de hangar se abre y cierra lentamente por medio de un motor que acciona el cable *AB*. Si la puerta está hecha en dos secciones y cada sección tiene un peso uniforme *W* y longitud *L*, determine la fuerza en el cable como función de la posición θ de la puerta. Las secciones están conectadas mediante pasadores en *C* y *D*, y la base está unida a un rodillo que se desplaza a lo largo de una guía vertical.



Prob. 6-112

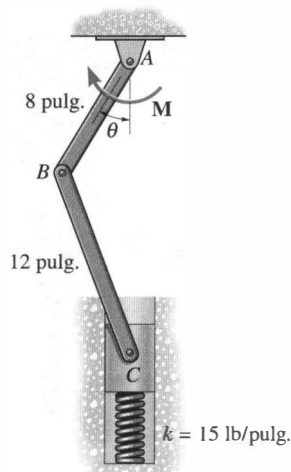
6-113. Un hombre con peso de 175 lb intenta levantarse usando uno de los dos métodos mostrados. Determine la fuerza total que debe ejercer sobre la barra *AB* en cada caso y la reacción normal que ejerce sobre la plataforma localizada en *C*. Ignore el peso de la plataforma.

6-114. Un hombre con peso de 175 lb intenta levantarse usando uno de los dos métodos mostrados. Determine la fuerza total que debe ejercer sobre la barra *AB* en cada caso y la reacción normal que ejerce sobre la plataforma localizada en *C*. La plataforma tiene un peso de 30 lb.



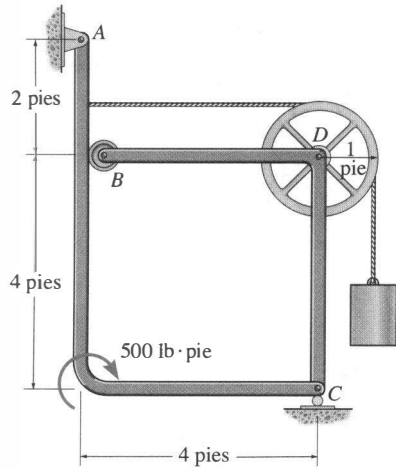
Probs. 6-113/114

6-115. El pistón *C* se mueve verticalmente entre las dos paredes lisas. Si el resorte tiene rigidez de $k = 15$ lb/pulg., y no se estira cuando $\theta = 0^\circ$, determine el par *M* que debe aplicarse a *AB* para mantener el mecanismo en equilibrio cuando $\theta = 30^\circ$.



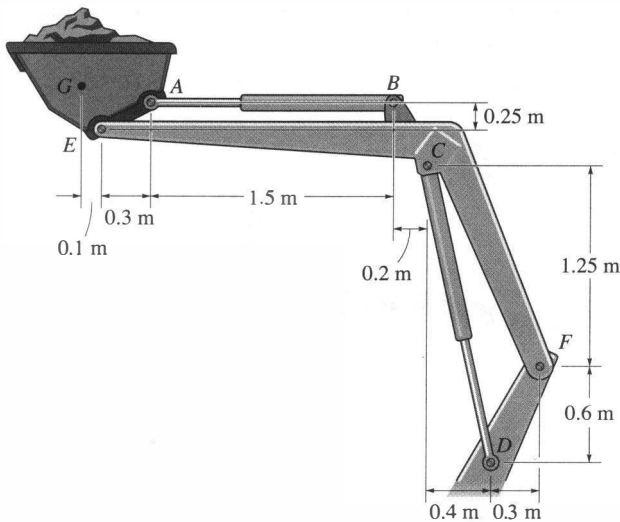
Prob. 6-115

***6-116.** El bastidor de dos miembros soporta el cilindro de 200 lb y el momento de par de 500 lb · pie. Determine la fuerza que el rodillo localizado en *B* imprime sobre el miembro *AC*, y encuentre las componentes de fuerza horizontal y vertical que el pasador situado en *C* ejerce sobre el miembro *CB* y que el pasador ubicado en *A* ejerce sobre el miembro *AC*. El rodillo *C* no hace contacto con el miembro *CB*.



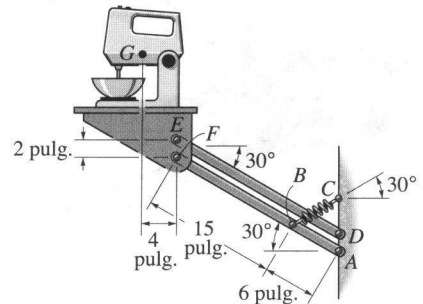
Prob. 6-116

6-117. El aguilón del tractor soporta una masa uniforme de 500 kg en el cucharón, el cual tiene centro de masa en *G*. Determine la fuerza en cada cilindro hidráulico *AB* y *CD* y la fuerza resultante en los pasadores *E* y *F*. La carga está soportada equitativamente a cada lado del tractor mediante un mecanismo semejante.



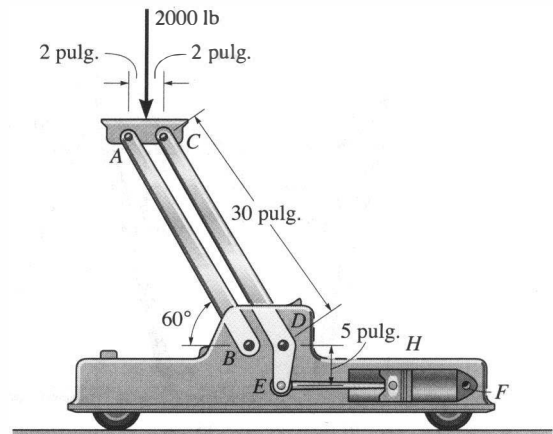
Prob. 6-117

6-118. El mecanismo mostrado se usa para ocultar dispositivos de cocina bajo un armario al permitir que el anaquel gire hacia abajo. Si la batidora de 10 lb está centrada sobre el anaquel, y tiene su centro de masa en *G*, determine el alargamiento que es necesario en el resorte para mantener al anaquel en la posición de equilibrio mostrada. Se tiene un mecanismo similar a cada lado del anaquel, de manera que cada mecanismo soporta 5 lb de la carga. Los resortes tienen cada uno rigidez $k = 4$ lb/pulg de resorte.



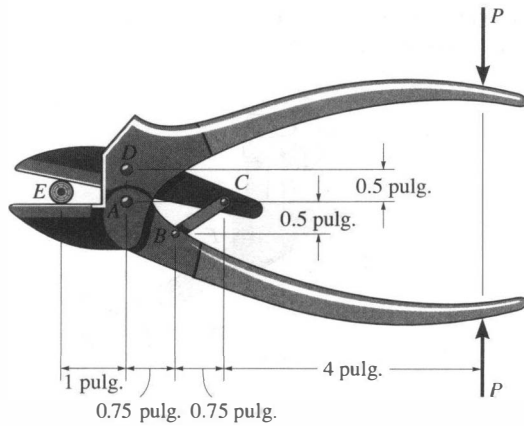
Prob. 6-118

6-119. Se muestra el eslabonamiento para un gato hidráulico. Si la carga sobre el gato es de 2000 lb, determine la presión que actúa sobre el fluido cuando el gato está en la posición mostrada. Todos los puntos identificados con letras son pasadores. El pistón localizado en *H* tiene un área en su sección transversal de $A = 2$ pulg². *Sugerencia:* Primero encuentre la fuerza *F* que actúa a lo largo del eslabón *EH*. La presión en el fluido es $p = F/A$.



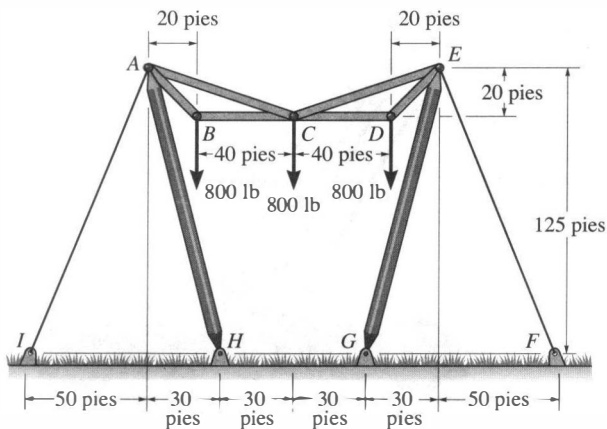
Prob. 6-119

***6-120.** Determine la fuerza P requerida que debe ser aplicada en la hoja de las tijeras podadoras de manera que la hoja ejerza una fuerza normal de 20 lb en el tallo situado en E .



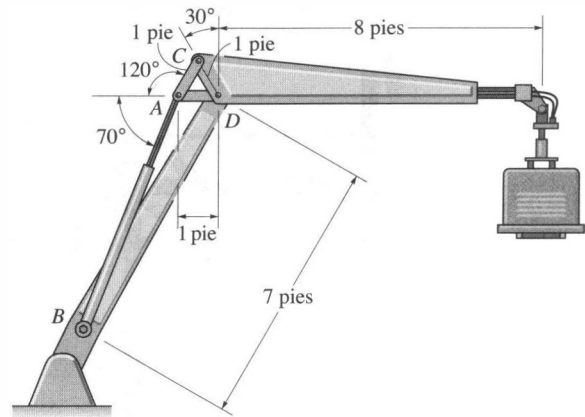
Prob. 6-120

6-121. Las tres líneas de potencia ejercen las fuerzas mostradas sobre los nudos de la armadura, los que a su vez están conectados mediante pasadores a los postes AH y EG . Determine la fuerza en la retenida AI y la reacción del pasador en el soporte H .



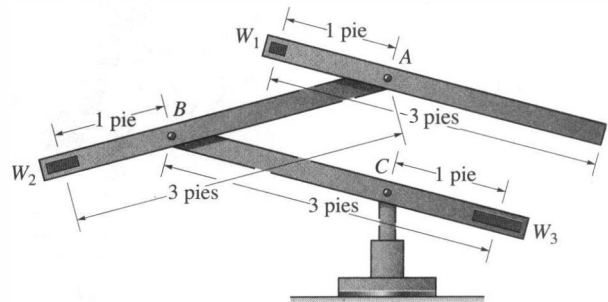
Prob. 6-121

6-122. La grúa hidráulica se usa para levantar la carga de 1400 lb. Determine la fuerza en el cilindro hidráulico AB y la fuerza en los eslabones AC y AD cuando la carga es mantenida en la posición mostrada.



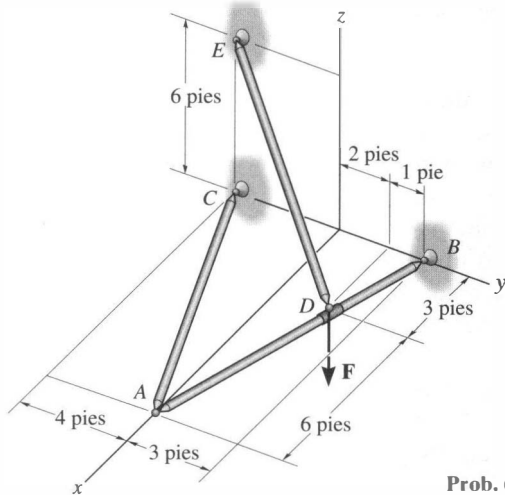
Prob. 6-122

6-123. La escultura cinética requiere que cada una de las tres vigas articuladas esté en perfecto equilibrio en todo momento durante su lento movimiento. Si cada miembro tiene un peso uniforme de 2 lb/pie y longitud de 3 pies, determine los contrapesos necesarios W_1, W_2 y W_3 que deben ser agregados a los extremos de cada uno para mantener el sistema en equilibrio en cualquier posición. Ignore el tamaño de los contrapesos.



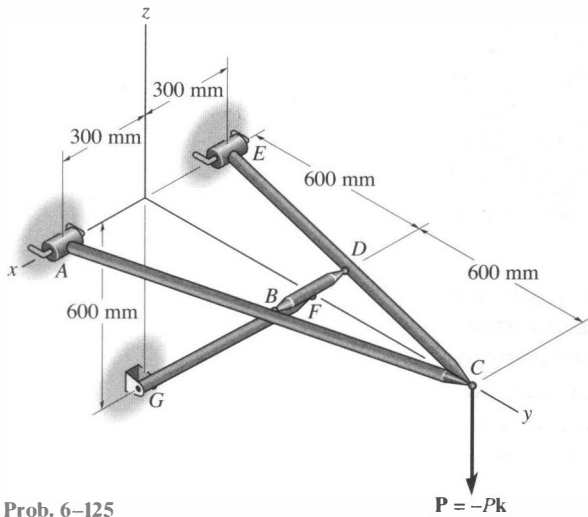
Prob. 6-123

***6-124.** El bastidor de tres miembros está conectado en sus extremos por medio de rótulas esféricas. Determine las componentes de reacción x, y, z en B y la tensión en el miembro ED . La fuerza que actúa en D es $\mathbf{F} = \{135\mathbf{i} + 200\mathbf{j} - 180\mathbf{k}\}$ lb.



Prob. 6-124

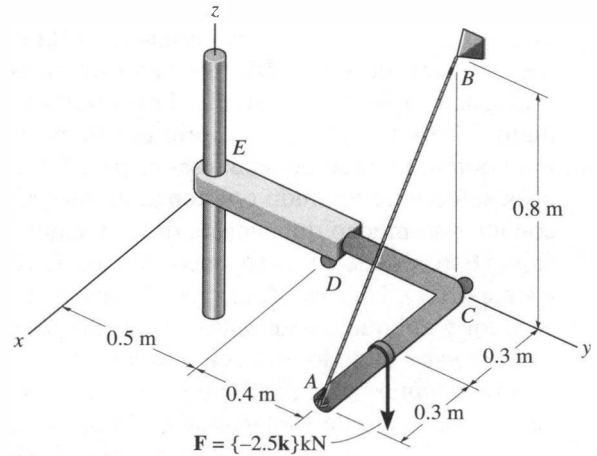
6-125. El bastidor en forma de A de cuatro miembros está soportado en A y E por collares lisos y en G mediante un pasador. Todos los otros nudos son rótulas esféricas. Si el situado pasador en G fallará cuando la fuerza resultante ahí sea de 800 N, determine la fuerza P vertical más grande que pueda ser soportada por el bastidor. Además, ¿cuáles son las componentes de fuerza x, y, z que el miembro BD ejerce sobre los miembros EDC y ABC ? Los collares situados en A y E y el pasador colocado en G sólo ejercen componentes de fuerza sobre el bastidor.



Prob. 6-125

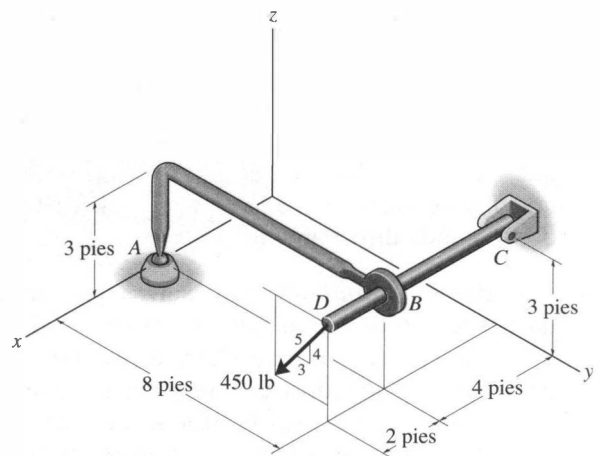
$\mathbf{P} = -Pk$

6-126. La estructura está sometida a la carga mostrada. El miembro AD está soportado mediante un cable AB , un rodillo en C y se ajusta a través de un orificio circular liso en D . El miembro ED está soportado por un rodillo en D y un poste que se ajusta en un orificio circular liso en E . Determine las componentes de reacción x, y, z en E y la tensión en el cable AB .



Prob. 6-126

6-127. La estructura está sometida a la fuerza de 450 lb que se encuentra en un plano paralelo al plano $y-z$. El miembro AB está soportado mediante una rótula esférica colocada en A y se ajusta en un agujero en B . El miembro CD está soportado por un pasador ubicado en C . Determine las componentes de reacción x, y, z en A y C .



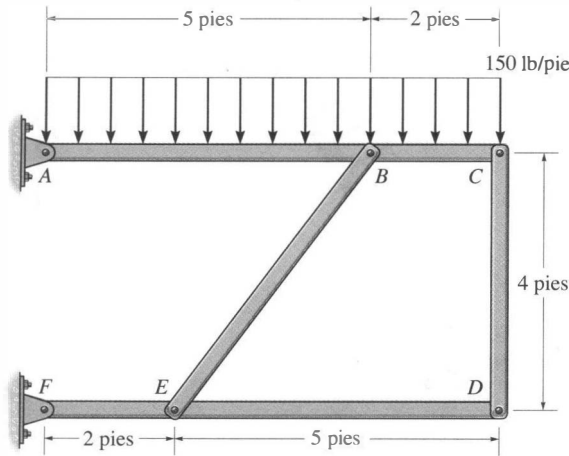
Prob. 6-127

REPASO DEL CAPÍTULO

- **Análisis de armaduras.** Una armadura simple consiste en elementos triangulares conectados entre sí mediante juntas de pasador. Las fuerzas dentro de sus miembros pueden ser determinadas suponiendo que éstos son todos de dos fuerzas, conectados concurrentemente en cada junta o nudo.
- **Método de los nudos.** Si una armadura está en equilibrio, entonces cada uno de sus nudos también está en equilibrio. Para una armadura coplanar, el sistema de fuerzas concurrentes en cada nudo debe satisfacer el equilibrio por fuerzas, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$. Para obtener una solución numérica para las fuerzas en los miembros, seleccione un nudo que tenga un diagrama de cuerpo libre con cuando mucho dos fuerzas desconocidas y una fuerza conocida. (Esto puede requerir encontrar primero las reacciones en los soportes). Una vez determinada una fuerza de miembro, use su valor y aplíquelo a un nudo adyacente. Recuerde que las fuerzas que *jalan* al nudo están en *tensión*, y aquellas que lo *empujan* están en *compresión*. Para evitar una solución simultánea de dos ecuaciones, trate de sumar fuerzas en una dirección perpendicular a una de las incógnitas. Esto permitirá obtener una solución directa para la otra incógnita. Para simplificar más aún el análisis, identifique primero todos los miembros de fuerza cero.
- **Método de las secciones.** Si una armadura está en equilibrio, entonces cada una de sus secciones también está en equilibrio. Pase una sección a través del miembro cuya fuerza debe ser determinada. Trace entonces el diagrama de cuerpo libre de la parte seccionada que tenga el menor número de fuerzas en ella. Los miembros seccionados sometidos a un *jalón* están en *tensión* y aquellos sometidos a un *empuje* están en *compresión*. Si el sistema de fuerzas es coplanar, entonces se dispone de tres ecuaciones de equilibrio para determinar las incógnitas. Si es posible, sume las fuerzas en una dirección que sea perpendicular a dos de las tres fuerzas desconocidas. Esto dará una solución directa para la tercera fuerza. Igualmente, sume momentos con respecto a un punto que pase por la línea de acción de dos de las tres fuerzas desconocidas, de manera que la tercera fuerza desconocida pueda ser determinada directamente.
- **Bastidores y máquinas.** Las fuerzas que actúan en los nudos de un bastidor o de una máquina pueden ser determinadas trazando los diagramas de cuerpo libre de cada uno de sus miembros o partes. El principio de acción-reacción debe ser cumplido escrupulosamente al trazar esas fuerzas sobre cada miembro o pasador adyacente. Para un sistema coplanar de fuerzas, hay tres ecuaciones de equilibrio disponibles para cada miembro.

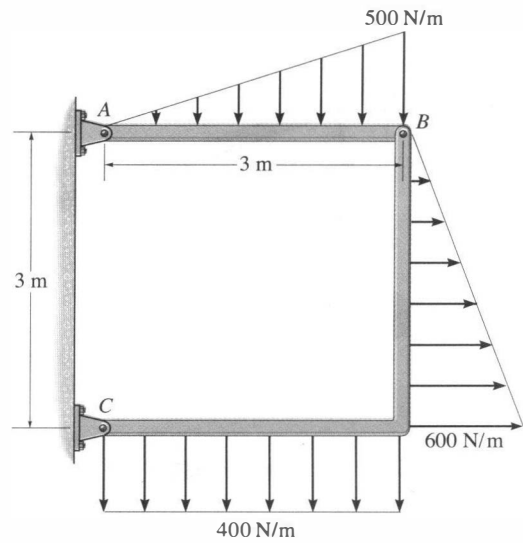
PROBLEMAS DE REPASO

***6-128.** Determine las fuerzas resultantes en los pasadores B y C sobre el miembro ABC del bastidor de cuatro miembros.



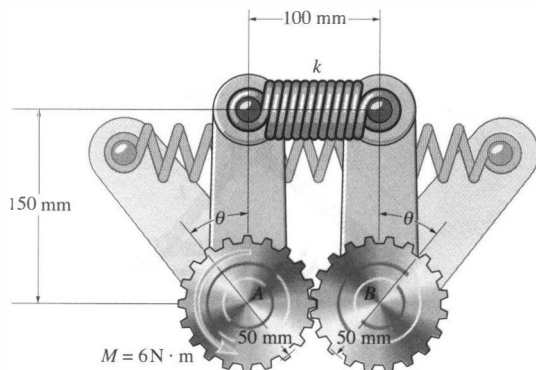
Prob. 6-128

6-130. Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical en los pasadores A y C del bastidor de dos miembros.



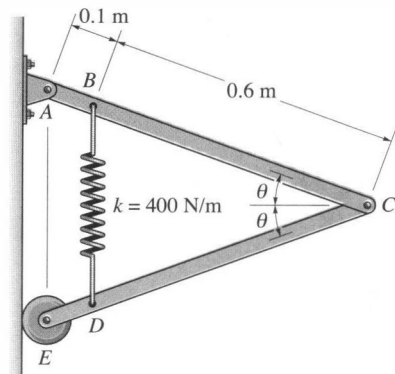
Prob. 6-130

6-129. El mecanismo consiste en engranes idénticos A y B y brazos que están fijados a los engranes. El resorte unido a los extremos de los brazos tiene una longitud no estirada de 100 mm y rigidez de $k = 250 \text{ N/m}$. Si se aplica una torca de $M = 6 \text{ N} \cdot \text{m}$ al engrane A , determine el ángulo θ al que gira cada brazo. Los engranes están articulados a soportes fijos en sus centros.



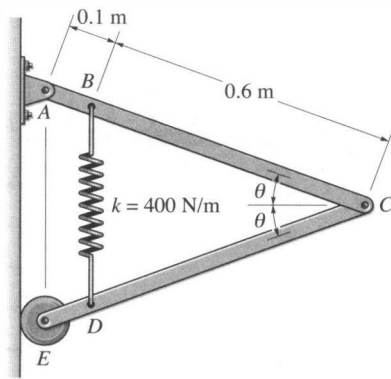
Prob. 6-129

6-131. El resorte tiene una longitud no estirada de 0.3 m. Determine el ángulo θ por equilibrio si los eslabones uniformes tienen cada uno una masa de 5 kg.



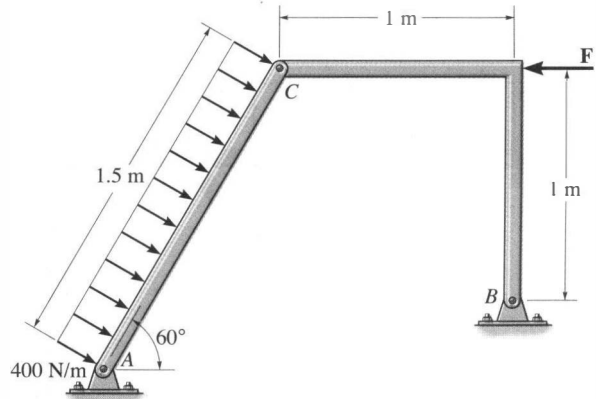
Prob. 6-131

***6-132.** El resorte tiene una longitud no estirada de 0.3 m. Determine por equilibrio la masa m de cada eslabón uniforme si el ángulo $\theta = 20^\circ$.



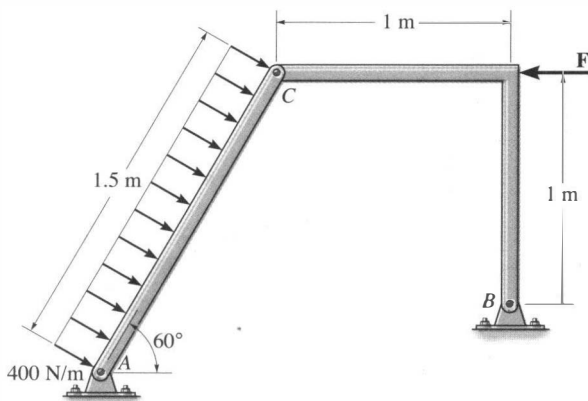
Prob. 6-132

6-134. Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical que los pasadores A y B ejercen sobre el bastidor de dos miembros. Considere $F = 500 \text{ N}$.



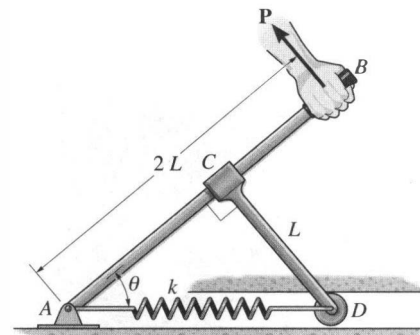
Prob. 6-134

6-133. Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical que los pasadores A y B ejercen sobre el bastidor de dos miembros. Considere $F = 0$.



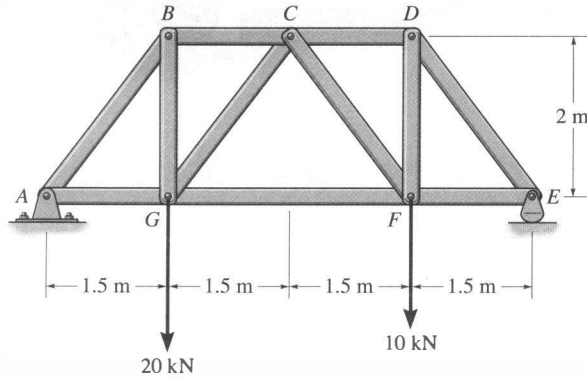
Prob. 6-133

6-135. El mecanismo de dos barras consiste en un brazo de palanca AB y un eslabón liso CD , el cual tiene un collar fijo en su extremo C y un rodillo en el otro extremo, D . Determine la fuerza P necesaria para mantener la palanca en la posición θ . El resorte tiene rigidez k y una longitud no estirada de $2L$. El rodillo entra en contacto con la porción superior o inferior de la guía horizontal.



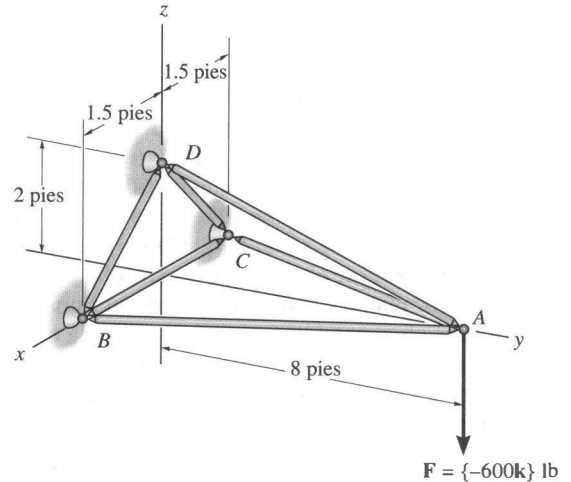
Prob. 6-135

***6-136.** Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión.



Prob. 6-136

6-137. Determine la fuerza en los miembros AB , AD y AC de la armadura espacial y establezca si los miembros están en tensión o en compresión.



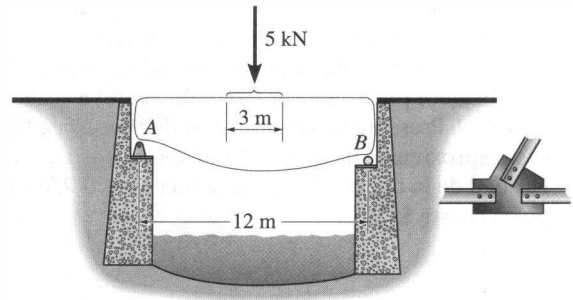
Prob. 6-137

PROYECTOS DE DISEÑO

6-1D DISEÑO DE UNA ARMADURA DE PUENTE

Un puente de cuerda superior horizontal debe extenderse entre los dos estribos A y B con altura arbitraria. Se requiere el uso de una armadura conectada mediante pasadores, que consista en miembros de acero atornillados a placas de unión, tal como la mostrada en la figura. Los soportes de extremo se suponen ser un pasador en A y un rodillo en B . Una carga vertical de 5 kN será soportada dentro de los 3 m medios del claro. Esta carga puede ser aplicada en parte a varios nudos situados sobre la cuerda superior dentro de esta región, o a un solo nudo a la mitad de la cuerda superior. La fuerza del viento y el peso de los miembros serán ignorados.

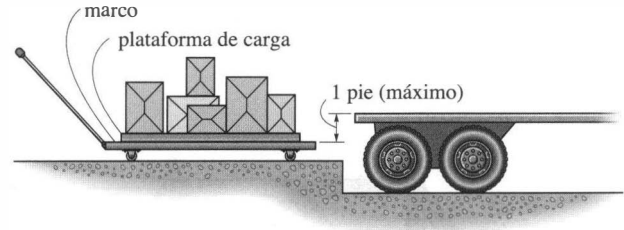
Suponga que la fuerza máxima de tensión en cada miembro no debe exceder de 4.25 kN; e independientemente de la longitud del miembro, la fuerza máxima de compresión no debe exceder de 3.5 kN. Diseñe la armadura más económica que soporte la carga. Los miembros cuestan \$3.50/m, y las placas de nudo cuestan \$8.00 cada una. Presente su análisis de costos para los materiales, junto con un croquis a escala de la armadura, identificando en el croquis las fuerzas de tensión y compresión en todos los miembros. Incluya también sus cálculos de todo el análisis de fuerzas.



Prob. 6-1D

6-2D DISEÑO DE UNA CARRETILLA ELEVADORA

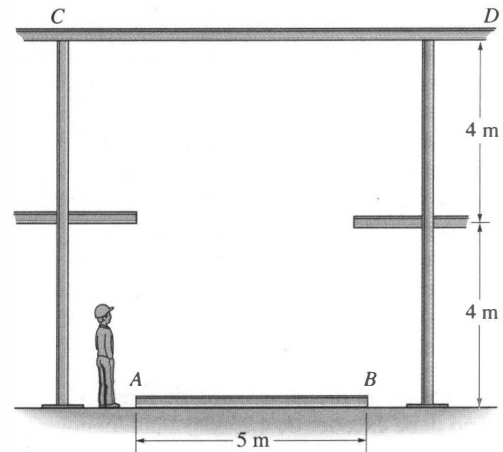
La carretilla de mano se usa para mover una carga desde una plataforma de carga a otra. Cualquier plataforma tendrá una elevación diferente con relación a la cama de un camión que se le acerca en reversa. Es necesario que la plataforma de carga que está sobre la carretilla de mano lleve la carga que transporta hasta la elevación de cada cama de camión como se muestra. La diferencia de elevación máxima entre el marco de la carretilla de mano y una cama de camión es de 1 pie. Diseñe un sistema mecánico operado a mano que permita que la carga sea levantada esta distancia desde el marco de la carretilla. Suponga que el operador puede ejercer (cómodamente) una fuerza de 20 lb para efectuar el levantamiento, y que la carga máxima, al centro de la plataforma de carga, es de 400 lb. Presente un dibujo a escala de su diseño, y explique cómo funciona éste con base en un análisis de fuerzas.



Prob. 6-2D

6-3D DISEÑO DE UN SISTEMA DE POLEAS

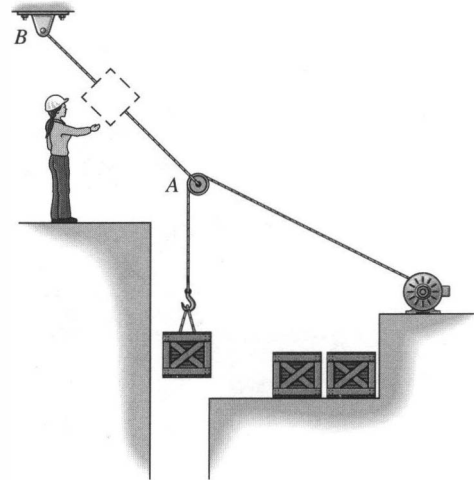
La viga de acero AB , con longitud de 5 m y masa de 700 kg, va a ser levantada en posición horizontal a una altura de 4 m. Diseñe un sistema de poleas y cuerda, el cual pueda ser suspendido desde la viga CD , que permita a un solo trabajador izar la viga. Suponga que la fuerza máxima que el trabajador puede aplicar (cómodamente) a la cuerda es de 180 N. Presente un dibujo de su diseño, especifique su costo aproximado de material, y analice los aspectos de seguridad de la operación. La cuerda cuesta \$1.25/m y cada polea cuesta \$3.00.



Prob. 6-3D

6-4D DISEÑO DE UNA HERRAMIENTA USADA PARA POSICIONAR UNA CARGA SUSPENDIDA

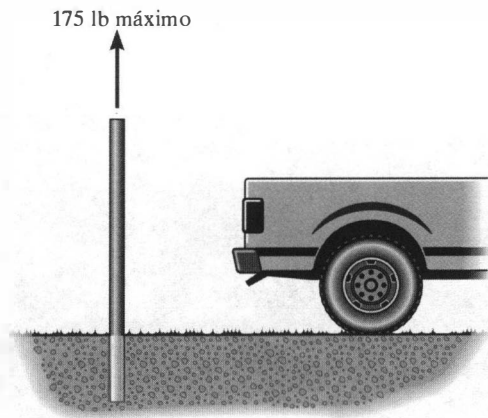
Desde una polea situada en lo alto, son suspendidas cargas pesadas y cada carga debe ser posicionada sobre una plataforma de depósito. Diseñe una herramienta que pueda usarse para acortar o alargar la cuerda AB de la polea en un pequeño tramo con el propósito de hacer el ajuste de la posición. Suponga que el operador puede aplicar (cómodamente) una fuerza máxima de 25 lb a la herramienta, y que la fuerza máxima permitida en la cuerda AB es de 500 lb. Presente un dibujo a escala de la herramienta, y usando un análisis de fuerzas explique en un párrafo breve cómo funciona. Incluya un examen detallado acerca de los aspectos de seguridad durante su uso.



Prob. 6-4D

6-5D DISEÑO DE UN EXTRACTOR DE POSTES DE CERCA

Un agricultor desea retirar varios postes de una cerca. Cada poste está enterrado 18 pulgadas en el terreno y se requiere una fuerza vertical máxima extractora de 175 lb para sacarlo. El agricultor puede usar su camioneta para desarrollar la fuerza, pero necesita idear un método para retirar los postes sin romperlos. Formule un método que pueda usarse, considerando que los únicos materiales disponibles son una cuerda fuerte y varias piezas de madera de varios tamaños y longitudes. Presente un croquis de su diseño y los aspectos de seguridad y confiabilidad de uso. Proporcione también un análisis de fuerzas para mostrar cómo se desempeña su método y por qué causará un daño mínimo al poste al sacarlo.



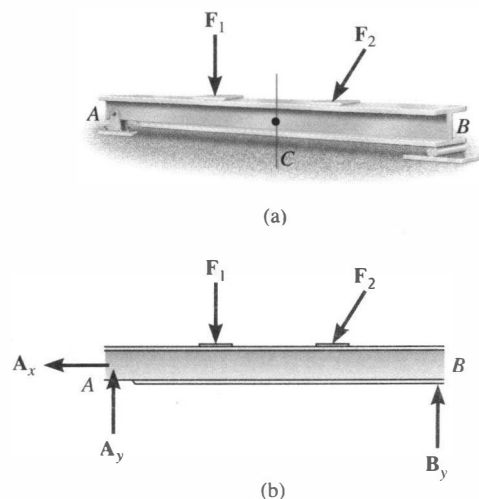
Prob. 6-5D

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Mostrar cómo usar el método de las secciones para determinar las cargas internas en un miembro.
- Generalizar este procedimiento formulando ecuaciones que puedan ser graficadas de manera que describan la fuerza interna cortante y el momento en todo un miembro.
- Analizar las fuerzas y estudiar la geometría de cables que soportan una carga.

7.1 Fuerzas internas desarrolladas en miembros estructurales

El diseño de cualquier miembro estructural o mecánico requiere un estudio de la carga que actúa dentro de él para asegurarnos de que el material puede resistir esta carga. Las cargas internas pueden ser determinadas usando el *método de las secciones*. Para ilustrar el procedimiento, considere la viga “soportada simplemente” que muestra la figura 7-1a, la cual está sometida a las fuerzas F_1 y F_2 y a las *reacciones de soporte* A_x , A_y y B_y , figura 7-1b. Si las *cargas internas* que actúan en la sección transversal en el punto C deben ser determinadas, entonces se pasa por la viga una sección imaginaria, cortándola en dos segmentos. Al hacer esto, las cargas internas en la sección se vuelven *externas* en el diagrama de cuerpo libre de



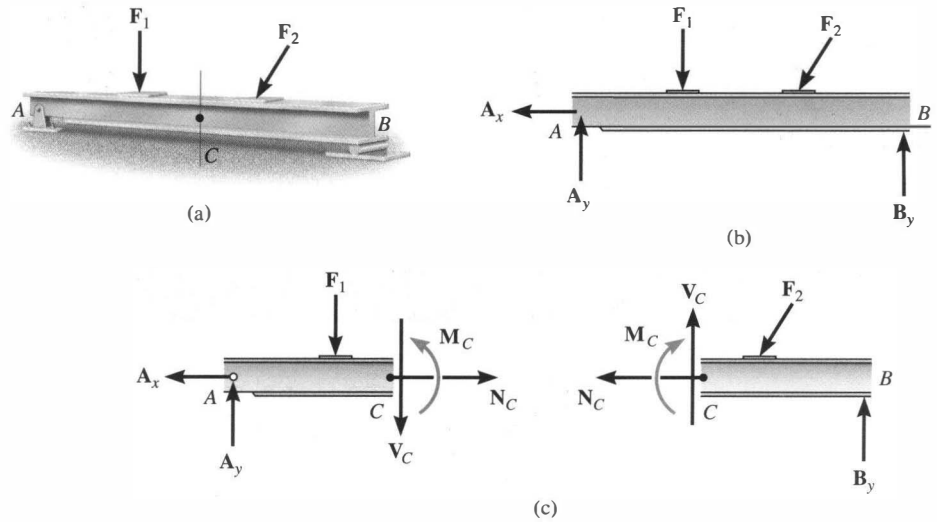


Fig. 7-1

cada segmento, figura 7-1c. Como ambos segmentos (AC y CB) estaban en equilibrio *antes* de seccionar la viga, el equilibrio de cada segmento es mantenido siempre que en la sección sean desarrollados componentes rectangulares de fuerza N_C y V_C y un momento de par resultante M_C . Observe que esas cargas deben ser iguales en magnitud y opuestas en dirección en cada uno de los segmentos (Tercera ley de Newton). La magnitud de cada una de esas cargas puede ser determinada ahora aplicando las tres ecuaciones de equilibrio a cualquiera de los segmentos AC o CB . Una *solución directa* para N_C resulta de aplicar $\Sigma F_x = 0$; V_C se obtiene directamente a partir de $\Sigma F_y = 0$; y M_C es determinado sumando momentos con respecto al punto C , $\Sigma M_C = 0$, para eliminar los momentos de las incógnitas N_C y V_C .



Para ahorrar material, las vigas usadas para soportar el techo de esta estructura fueron ahusadas ya que la carga del techo produce un mayor momento interno en los centros de las vigas que en sus extremos.

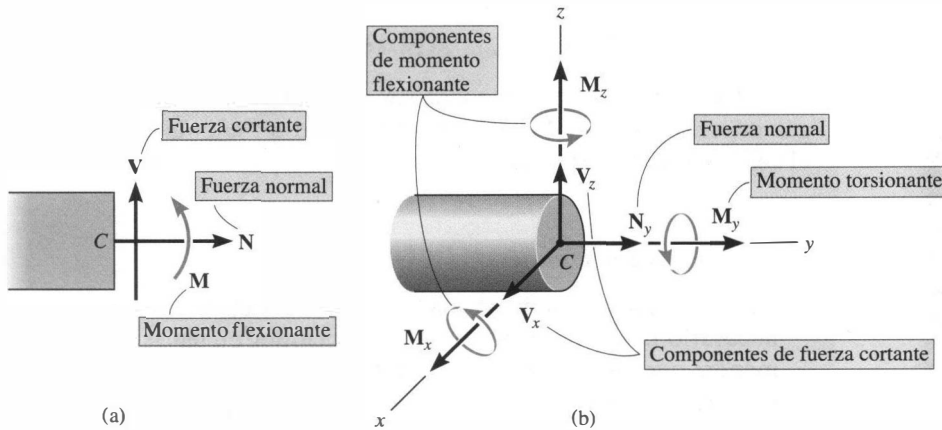


Fig. 7-2

En mecánica, las componentes de fuerzas \mathbf{N} , actuando normalmente a la viga en la sección cortada, y \mathbf{V} , actuando tangencialmente a la sección, son llamadas la *fuerza normal o axial* y la *fuerza cortante*, respectivamente. El momento de par \mathbf{M} se denomina *momento flexionante*, figura 7-2a. En tres dimensiones, una fuerza interna general y un momento de par resultante actuarán en la sección. Las componentes x, y, z de esas cargas se muestran en la figura 7-2b. Aquí, N_y es la *fuerza normal*, y V_x y V_z son las *componentes de la fuerza cortante*. M_y es un *momento torsionante*, y M_x y M_z son *componentes del momento flexionante*. En la mayoría de las aplicaciones, esas *cargas resultantes* actúan en el centro geométrico o centroide (C) del área de la sección transversal de la sección. Aunque por lo general la magnitud de cada carga será diferente en varios puntos a lo largo del eje del miembro, el método de las secciones siempre puede ser usado para determinar sus valores.

Diagramas de cuerpo libre. Como los bastidores y las máquinas están compuestos de *miembros multifuerza*, cada uno de esos miembros estará generalmente sometido a cargas internas de los tipos normal, cortante y flexionante. Por ejemplo, considere el bastidor mostrado en la figura 7-3a. Si se pasa la sección en azul H, G y F , el resultante diagrama de cuerpo libre de la porción superior de esta sección se muestra en la figura 7-3b. En cada punto donde un miembro es seccionado existen una fuerza normal, una fuerza cortante y un momento flexionante desconocidos. En consecuencia, no podemos aplicar las *tres* ecuaciones de equilibrio a esta sección para obtener esas *nueve incógnitas*.* Para resolver este problema debemos *desmembrar primero* el bastidor y determinar las reacciones en las conexiones de los miembros usando los procedimientos de la sección 6.6. Una vez hecho esto, *cada miembro* podrá seccionarse en su punto apropiado, y las tres ecuaciones de equilibrio pueden ser aplicadas entonces para determinar \mathbf{N} , \mathbf{V} y \mathbf{M} . Por ejemplo, el diagrama de cuerpo libre del segmento DG , figura 7-3c, puede usarse para determinar las cargas internas en G siempre que se conozcan las reacciones del pasador \mathbf{D}_x y \mathbf{D}_y .

*Recuerde que este método de análisis funcionó bien para armaduras ya que los miembros de armaduras son *miembros rectos de dos fuerzas* que soportan sólo una carga axial o normal.

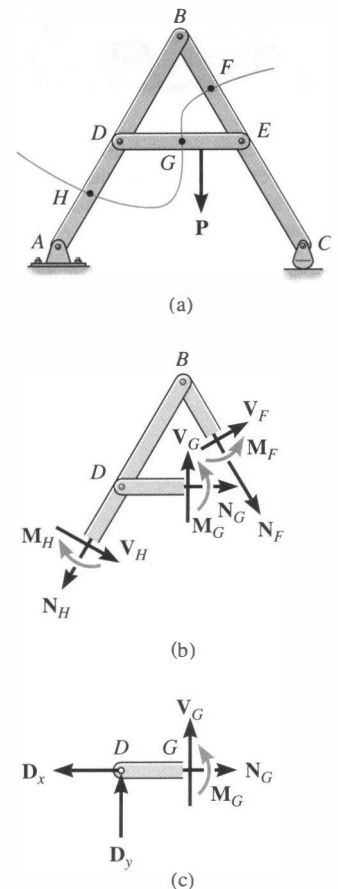
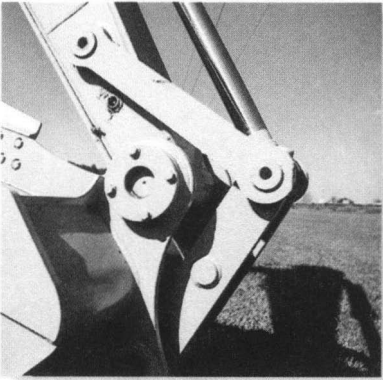
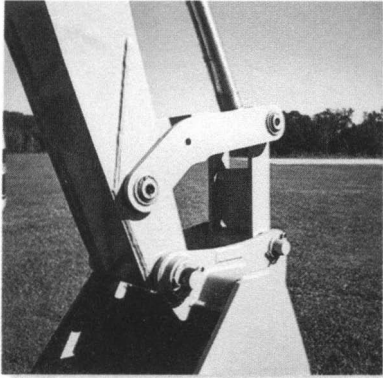


Fig. 7-3



En cada caso, el eslabón sobre la retroexcavadora es un miembro de dos fuerzas. En la fotografía de arriba está sometido a flexión y a carga axial en su centro. Al colocarlo recto, como en la fotografía de abajo, sólo fuerza axial actúa dentro de él.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El método de las secciones puede ser usado para determinar las cargas internas en una ubicación específica de un miembro mediante el siguiente procedimiento.

Reacciones en los soportes.

- Antes de que el miembro sea “cortado” o seccionado, puede ser necesario determinar primero las reacciones en sus soportes, de manera que las ecuaciones de equilibrio se usen sólo para resolver las cargas internas cuando el miembro esté seccionado.
- Si el miembro es parte de un bastidor o de una máquina, las reacciones en sus conexiones son determinadas usando los métodos de la sección 6.6.

Diagrama de cuerpo libre.

- Mantenga todas las cargas distribuidas, momentos de par y fuerzas que estén actuando sobre el miembro en sus *ubicaciones exactas*, luego pase una sección imaginaria por el miembro, perpendicularmente a su eje en el punto en que la carga interna va a ser determinada.
- Después de realizar la sección, trace un diagrama de cuerpo libre del segmento que tenga el menor número de cargas, e indique las componentes x , y , z de las resultantes de fuerza y los momentos de par en la sección.
- Si el miembro está sometido a un sistema *coplanar* de fuerzas, sólo N , V y M actúan en la sección.
- En muchos casos puede ser posible decir por inspección el sentido correcto de las cargas desconocidas; sin embargo, si esto resulta difícil, el sentido puede ser supuesto.

Ecuaciones de equilibrio.

- Los momentos deben ser sumados en la sección con respecto a ejes que pasen por el *centroide* o centro geométrico del área transversal del miembro para eliminar las fuerzas normal y cortante desconocidas y con ello obtener soluciones directas para las componentes de momento.
- Si la solución de las ecuaciones de equilibrio resulta en un escalar negativo, el sentido supuesto de la cantidad es contrario al mostrado en el diagrama de cuerpo libre.

EJEMPLO 7.1

La barra está fija en sus extremos y está cargada como se muestra en la figura 7-4a. Determine la fuerza normal interna en los puntos B y C.

Solución

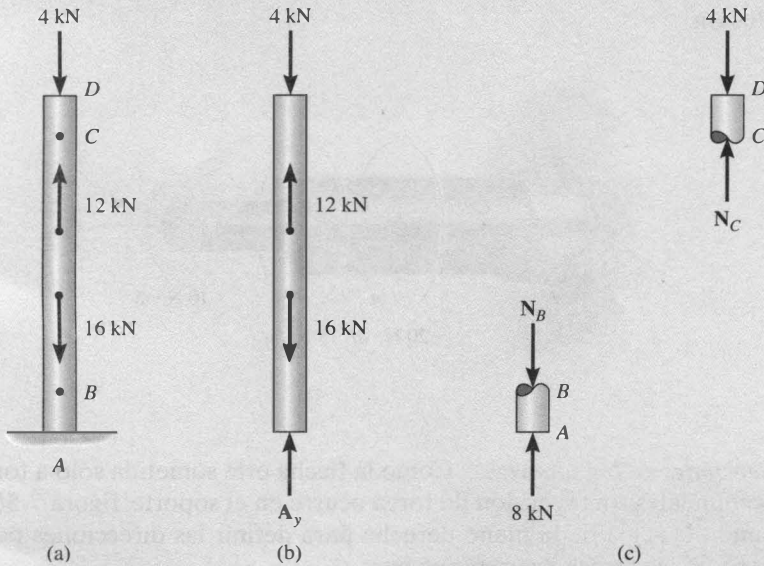


Fig. 7-4

Reacciones en los soportes. Un diagrama de cuerpo libre de toda la barra se muestra en la figura 7-4b. Por inspección, sólo una fuerza normal A_y actúa en el soporte fijo ya que las cargas están aplicadas simétricamente a lo largo del eje de la barra. ($A_x = 0$, $M_A = 0$.)

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 16 \text{ kN} + 12 \text{ kN} - 4 \text{ kN} = 0 \quad A_y = 8 \text{ kN}$$

Diagramas de cuerpo libre. Las fuerzas internas en B y C se encontrarán mediante los diagramas de cuerpo libre de la barra seccionada que muestra la figura 7-4c. Ninguna fuerza cortante o momento actúan sobre las secciones ya que no son requeridos por equilibrio. En particular, los segmentos AB y DC serán elegidos aquí, ya que contienen el menor número de fuerzas.

Ecuaciones de equilibrio.

Segmento AB

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 8 \text{ kN} - N_B = 0 \quad N_B = 8 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Segmento DC

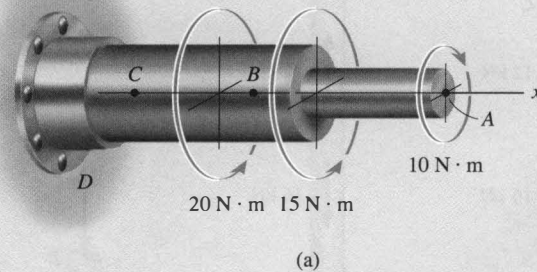
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad N_C - 4 \text{ kN} = 0 \quad N_C = 4 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Trate de resolver este problema de la siguiente manera: Determine N_B a partir del segmento BD. (Observe que este enfoque *no requiere* solución para la reacción de soporte en A). Usando el resultado para N_B , aisle el segmento BC para determinar N_C .

EJEMPLO 7.2

La flecha circular está sometida a tres torcas concentradas como se muestra en la figura 7-5a. Determine las torcas internas en los puntos B y C .

Solución



Reacciones en los soportes. Como la flecha está sometida sólo a torcas colineales, una reacción de torca ocurre en el soporte, figura 7-5b. Usando la regla de la mano derecha para definir las direcciones positivas de las torcas, requerimos que

$$\begin{aligned}\Sigma M_x = 0; \quad -10 \text{ N}\cdot\text{m} + 15 \text{ N}\cdot\text{m} + 20 \text{ N}\cdot\text{m} - T_D = 0 \\ T_D = 25 \text{ N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

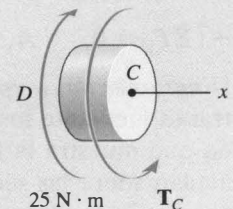
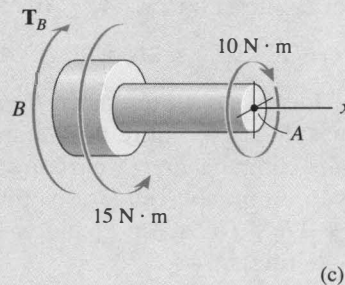
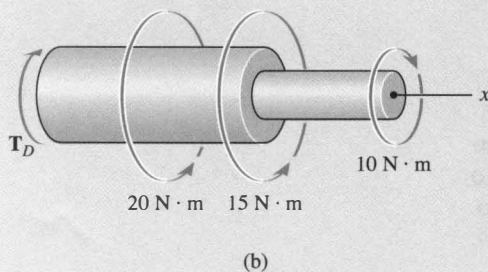


Fig. 7-5

Diagramas de cuerpo libre. Las torcas internas en B y C se encontrarán usando los diagramas de cuerpo libre de los segmentos de flecha AB y CD mostrados en la figura 7-5c.

Ecuaciones de equilibrio. Aplicando la ecuación de equilibrio de momentos a lo largo del eje de la flecha, tenemos

Segmento AB

$$\Sigma M_x = 0; \quad -10 \text{ N}\cdot\text{m} + 15 \text{ N}\cdot\text{m} - T_B = 0 \quad T_B = 5 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{Resp.}$$

Segmento CD

$$\Sigma M_x = 0; \quad T_C - 25 \text{ N}\cdot\text{m} = 0 \quad T_C = 25 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{Resp.}$$

Trate de encontrar a T_C usando el segmento CA . Observe que este enfoque *no requiere* una solución para la reacción del soporte en D .

EJEMPLO 7.3

La viga soporta la carga mostrada en la figura 7-6a. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan justo a la izquierda, punto B , y justo a la derecha, punto C , de la fuerza de 6 kN.

Solución

Reacciones en los soportes. El diagrama de cuerpo libre de la viga se muestra en la figura 7-6b. Al determinar las *reacciones externas*, observe que el momento de par de 9 kN · m es un vector libre, y por tanto, puede ser colocado en *cualquier parte* en el diagrama de cuerpo libre de la viga completa. Aquí determinaremos sólo A_y , ya que los segmentos AB y AC serán usados para efectuar el análisis.

$$\downarrow + \sum M_D = 0; \quad 9 \text{ kN} \cdot \text{m} + (6 \text{ kN})(6 \text{ m}) - A_y(9 \text{ m}) = 0$$

$$A_y = 5 \text{ kN}$$

Diagramas de cuerpo libre. Los diagramas de cuerpo libre de los segmentos izquierdos AB y AC de la viga están mostrados en las figuras 7-6c y 7-6d. En este caso, el momento de par de 9 kN · m *no se incluye* en esos diagramas ya que debe ser mantenido en su *posición original* hasta *después* que se hace la sección y el apropiado cuerpo es aislado. En otras palabras, los diagramas de cuerpo libre de los segmentos izquierdos de la viga no muestran el momento de par ya que este momento realmente no actúa sobre esos segmentos.

Ecuaciones de equilibrio.

Segmento AB

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 5 \text{ kN} - V_B = 0 \quad V_B = 5 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \sum M_B = 0; \quad -(5 \text{ kN})(3 \text{ m}) + M_B = 0 \quad M_B = 15 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Segmento AC

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_C = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 5 \text{ kN} - 6 \text{ kN} + V_C = 0 \quad V_C = 1 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \sum M_C = 0; \quad -(5 \text{ kN})(3 \text{ m}) + M_C = 0 \quad M_C = 15 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Aquí el brazo de momento para la fuerza de 5 kN en ambos casos es aproximadamente de 3 m ya que B y C son “casi” coincidentes.

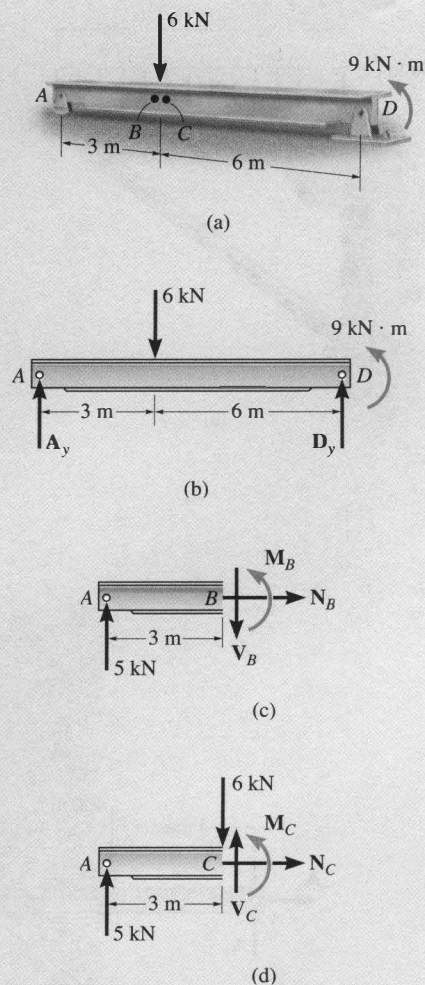
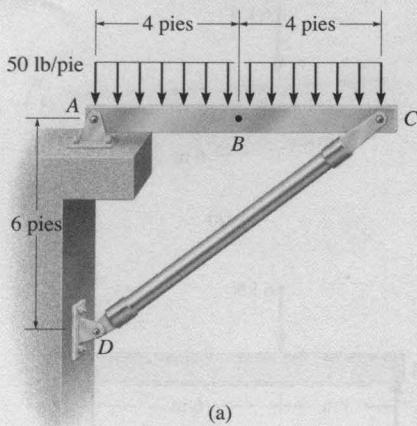


Fig. 7-6

EJEMPLO 7.4



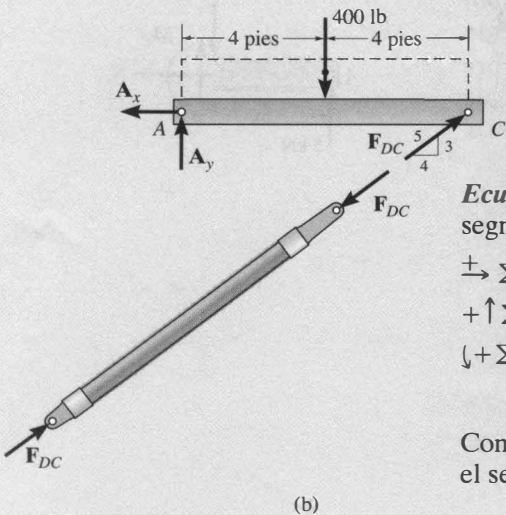
Determine la fuerza interna normal, la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan en el punto B de la estructura de dos miembros mostrada en la figura 7-7a.

Solución

Reacciones en los soportes. Un diagrama de cuerpo libre de cada miembro se muestra en la figura 7-7b. Como CD es un miembro de dos fuerzas, las ecuaciones de equilibrio tienen que aplicarse sólo al miembro AC.

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_A = 0; & \quad -400 \text{ lb}(4 \text{ pies}) + \left(\frac{3}{5}\right)F_{DC}(8 \text{ pies}) = 0 & \quad F_{DC} = 333.3 \text{ lb} \\ \rightarrow \Sigma F_x = 0; & \quad -A_x + \left(\frac{4}{5}\right)(333.3 \text{ lb}) = 0 & \quad A_x = 266.7 \text{ lb} \\ \uparrow \Sigma F_y = 0; & \quad A_y - 400 \text{ lb} + \frac{3}{5}(333.3 \text{ lb}) = 0 & \quad A_y = 200 \text{ lb} \end{aligned}$$

Diagramas de cuerpo libre. Pasando una sección imaginaria perpendicular al eje del miembro AC a través del punto B se obtienen los diagramas de cuerpo libre de los segmentos AB y BC mostrados en la figura 7-7c. Al construir esos diagramas, es importante mantener la carga distribuida exactamente como está hasta *después* de que se haga la sección. Sólo entonces puede ser reemplazada por una sola fuerza resultante. ¿Por qué? Observe también que N_B , V_B y M_B actúan con igual magnitud pero sentido opuesto sobre cada segmento (Tercera ley de Newton).



Ecuaciones de equilibrio. Aplicando las ecuaciones de equilibrio al segmento AB, tenemos

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0; & \quad N_B - 266.7 \text{ lb} = 0 & \quad N_B = 267 \text{ lb} \text{ Resp.} \\ \uparrow \Sigma F_y = 0; & \quad 200 \text{ lb} - 200 \text{ lb} - V_B = 0 & \quad V_B = 0 \text{ Resp.} \\ \downarrow + \Sigma M_B = 0; & \quad M_B - 200 \text{ lb}(4 \text{ pies}) + 200 \text{ lb}(2 \text{ pies}) = 0 \\ & \quad M_B = 400 \text{ lb} \cdot \text{pies} & \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Como un ejercicio, trate de obtener esos mismos resultados usando el segmento BC.

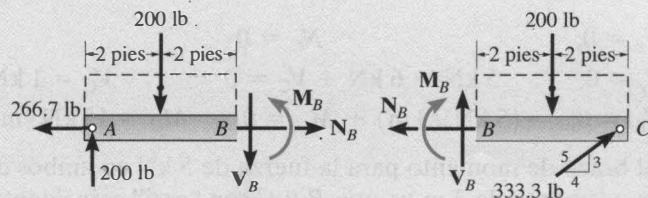
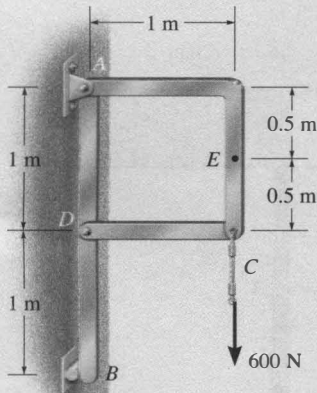


Fig. 7-7

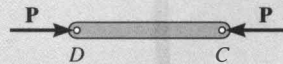
(c)

EJEMPLO 7.5

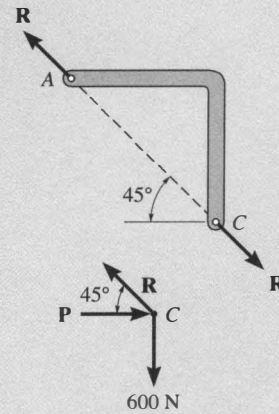
Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan en el punto E de la estructura cargada como se muestra en la figura 7-8a.



(a)



(b)

**Solución**

Reacciones en los soportes. Por inspección, los miembros AC y CD son miembros de dos fuerzas, figura 7-8b. Para determinar las cargas internas en E , primero debemos determinar la fuerza \mathbf{R} en el extremo del miembro AC . Para hacer esto debemos analizar el equilibrio del pasador colocado en C . ¿Por qué?

Sumando fuerzas en la dirección vertical sobre el pasador, figura 7-8b, tenemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad R \sin 45^\circ - 600 \text{ N} = 0 \quad R = 848.5 \text{ N}$$

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del segmento CE se muestra en la figura 7-8c.

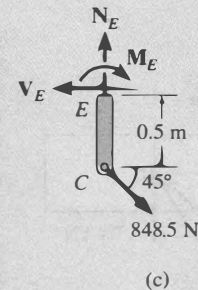
Ecuaciones de equilibrio.

$$\pm \Sigma F_x = 0; \quad 848.5 \cos 45^\circ \text{ N} - V_E = 0 \quad V_E = 600 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -848.5 \sin 45^\circ \text{ N} + N_E = 0 \quad N_E = 600 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \Sigma M_E = 0; \quad 848.5 \cos 45^\circ \text{ N}(0.5 \text{ m}) - M_E = 0 \quad M_E = 300 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Estos resultados indican un diseño pobre. El miembro AC debería ser *recto* (de A a C) para que la flexión dentro del miembro se *elimina*. Si AC fuera recto entonces la fuerza interna generaría sólo tensión en el miembro. Vea el ejemplo 6.21.



(c)

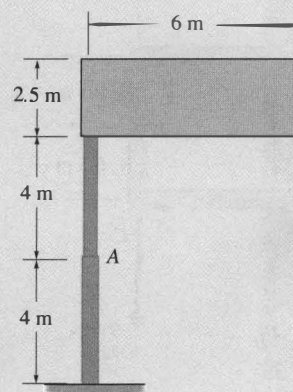
Fig. 7-8

EJEMPLO 7.6

El letrero uniforme mostrado en la figura 7-9a tiene una masa de 650 kg y está soportado mediante la columna empotrada. Los códigos de diseño indican que la carga de viento máxima uniforme esperada que ocurrirá en el área donde el letrero está localizado es de 900 Pa. Determine las cargas internas en A.



(a)



(b)

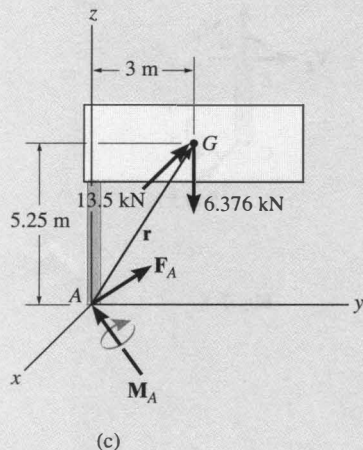


Fig. 7-9

Solución

El modelo idealizado para el letrero se muestra en la figura 7-9b, indicando las dimensiones necesarias. Podemos considerar el diagrama de cuerpo libre de una sección arriba del punto A ya que ahí no aparecen las reacciones de soporte.

Diagrama de cuerpo libre. El letrero tiene un peso de $W = 650(9.81) = 6.376$ kN, y el viento genera una fuerza resultante de $F_w = 900 \text{ N/m}^2(6 \text{ m})(2.5 \text{ m}) = 13.5$ kN que es perpendicular a la cara del letrero. Estas cargas se muestran en el diagrama de cuerpo libre, figura 7-9c.

Ecuaciones de equilibrio. Como el problema es tridimensional, usaremos un análisis vectorial.

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{F}_A - 13.5\mathbf{i} - 6.376\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F}_A = \{13.5\mathbf{i} + 6.38\mathbf{k}\} \text{ kN}$$

Resp.

$$\Sigma \mathbf{M}_A = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M}_A + \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_w + \mathbf{W}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}_A + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & 5.25 \\ -13.5 & 0 & 6.376 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

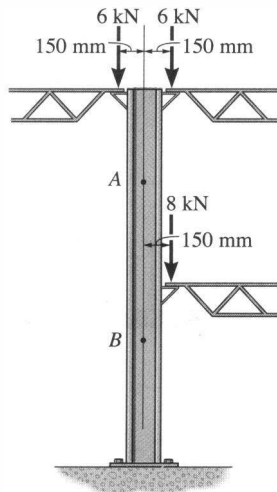
$$\mathbf{M}_A = \{-19.1\mathbf{i} + 70.9\mathbf{j} + 40.5\mathbf{k}\} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Resp.

Aquí $\mathbf{F}_{A_z} = \{6.38\mathbf{k}\}$ kN representa la fuerza normal N , mientras que $\mathbf{F}_{A_x} = \{13.5\mathbf{i}\}$ kN es la fuerza cortante. El momento torsionante es $\mathbf{M}_{A_z} = \{40.5\mathbf{k}\}$ kN · m, y el momento flexionante es determinado a partir de sus componentes $\mathbf{M}_{A_x} = \{-19.1\mathbf{i}\}$ kN · m y $\mathbf{M}_{A_y} = \{-70.9\mathbf{j}\}$ kN · m; se obtiene entonces, $M_b = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$.

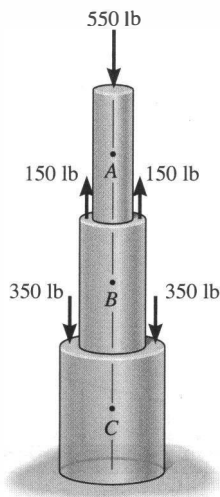
PROBLEMAS

7-1. La columna está empotrada en el suelo y es sometida a las cargas mostradas. Determine la fuerza interna normal, la fuerza cortante y el momento en los puntos *A* y *B*.



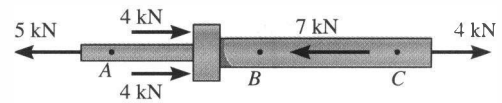
Prob. 7-1

7-2. La barra está sometida a las fuerzas mostradas. Determine la fuerza normal interna en los puntos *A*, *B* y *C*.



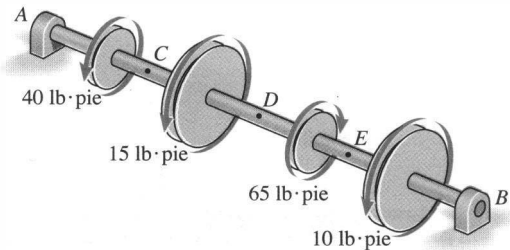
Prob. 7-2

7-3. Las fuerzas actúan sobre la flecha mostrada. Determine la fuerza normal interna en los puntos *A*, *B* y *C*.



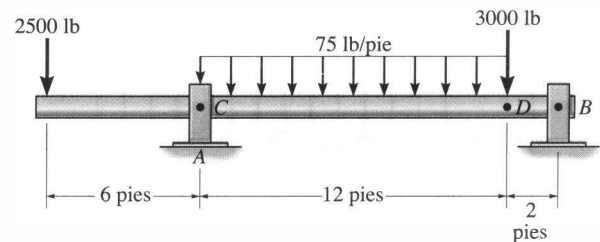
Prob. 7-3

*7-4. La flecha está soportada por dos chumaceras lisas, *A* y *B*. Las cuatro poleas unidas a la flecha se usan para transmitir potencia a maquinaria adyacente. Si las torcas aplicadas a las poleas son como se muestra, determine las torcas internas en los puntos *C*, *D* y *E*.



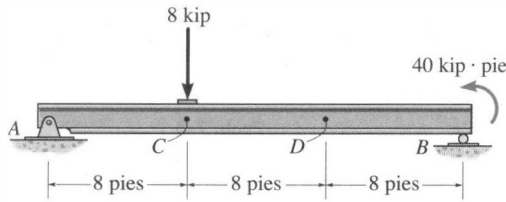
Prob. 7-4

7-5. La flecha está soportada por una chumacera lisa en *A* y una chumacera de empuje en *B*. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en una sección que pasa por (a) el punto *C*, que está justo a la derecha de la chumacera en *A*, y (b) el punto *D*, el cual está justo a la izquierda de la fuerza de 3000 lb.



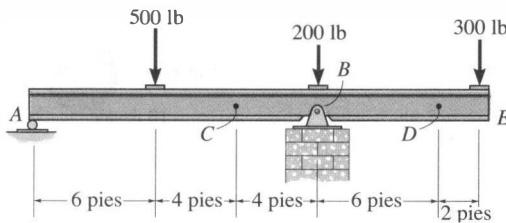
Prob. 7-5

7-6. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en la viga en los puntos C y D . Suponga que el soporte en B es un rodillo. El punto C está localizado justo a la derecha de la carga de 8 kips.



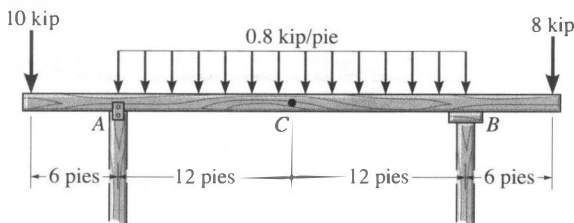
Prob. 7-6

7-7. Determine la fuerza cortante y el momento en los puntos C y D .



Prob. 7-7

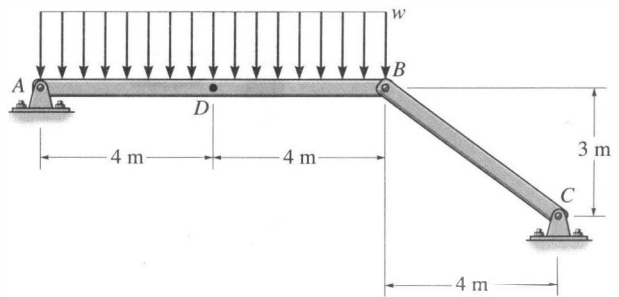
*7-8. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en una sección que pasa por el punto C . Suponga que el soporte en A puede ser aproximado mediante un pasador y el soporte en B como un rodillo.



Prob. 7-8

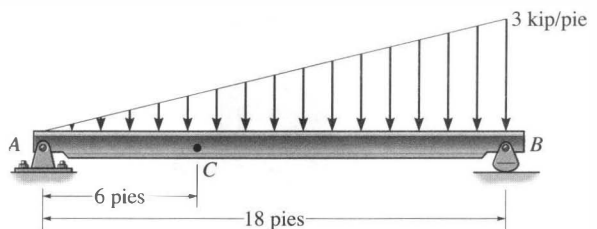
7-9. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en una sección que pasa por el punto D . Considere $w = 150 \text{ N/m}$.

7-10. La viga AB fallará si el momento interno máximo en D alcanza el valor de $800 \text{ N} \cdot \text{m}$, o si la fuerza normal en el miembro BC alcanza los 1500 N . Determine la carga w más grande que la viga puede soportar.



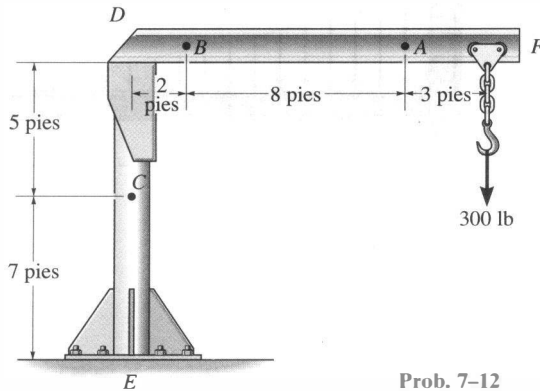
Probs. 7-9/10

7-11. Determine la fuerza cortante y el momento que actúa en una sección que pasa por el punto C en la viga.



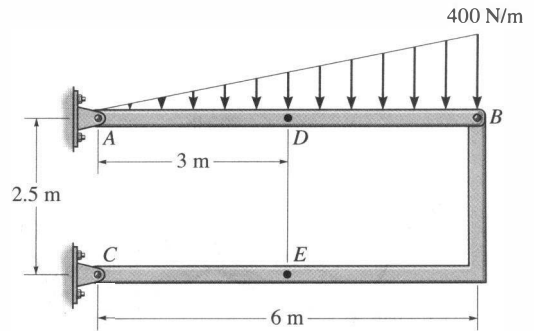
Prob. 7-11

***7-12.** El pescante DF de la grúa y la columna DE tienen un peso uniforme de 50 lb/pie . Si el gancho y su carga pesan 300 lb , determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en la grúa en secciones que pasan por los puntos A , B y C . *Sugerencia:* (Trate la punta del pescante, más allá del gancho, sin peso).



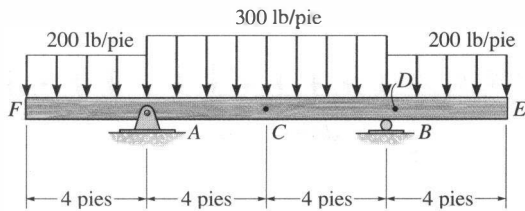
Prob. 7-12

7-15. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en una sección que pasa por el punto E del marco de dos miembros.



Prob. 7-15

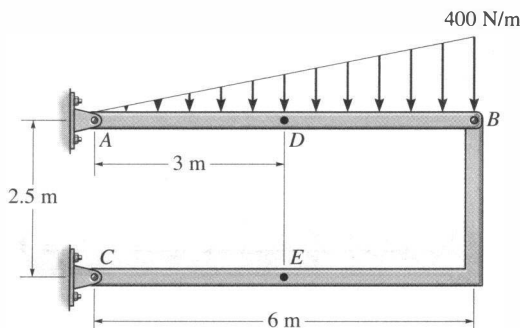
7-13. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento que actúan en el punto C y en el punto D , el cual está localizado justo a la derecha del soporte de rodillo ubicado en B .



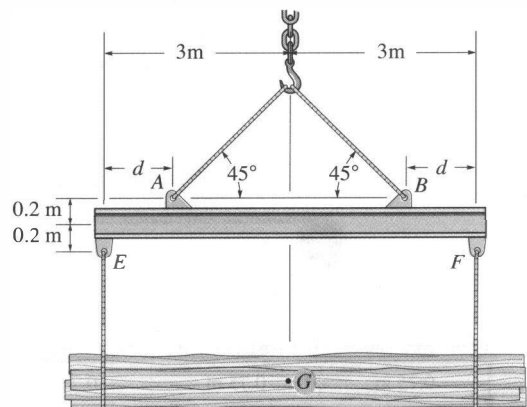
Prob. 7-13

***7-16.** La viga de izado se usa para el manejo de materiales. Si la carga suspendida tiene un peso de 2 kN y centro de gravedad en G , determine la posición d de las cartelas sobre la parte superior de la viga para que no se tengan momentos dentro de la longitud AB de la viga. La cuerda de izado tiene dos ramas situadas a 45° , como se muestra.

7-14. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en una sección que pasa por el punto D del marco de dos miembros.



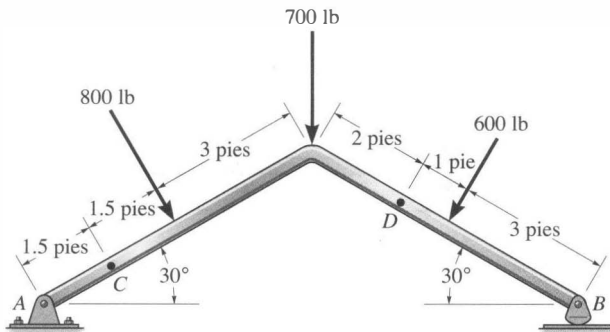
Prob. 7-14



Prob. 7-16

7-17. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento que actúan en una sección que pasa por el punto *C*.

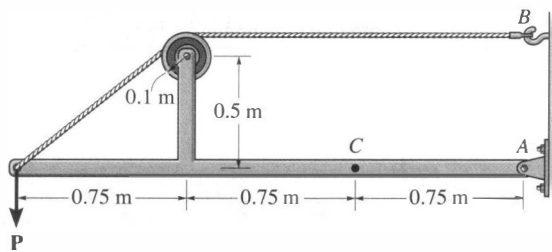
7-18. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento que actúan en una sección que pasa por el punto *D*.



Probs. 7-17/18

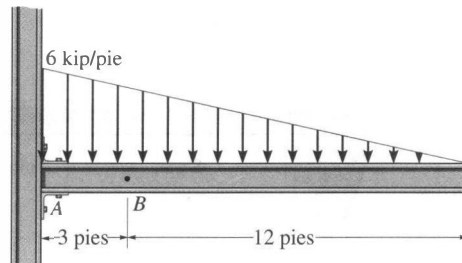
7-19. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en una sección que pasa por el punto *C*. Considere $P = 8$ kN.

***7-20.** El cable fallará cuando esté sometido a una tensión de 2 kN. Determine la carga vertical P más grande que puede soportar la estructura y calcule la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento en una sección que pase por el punto *C* para esta carga.



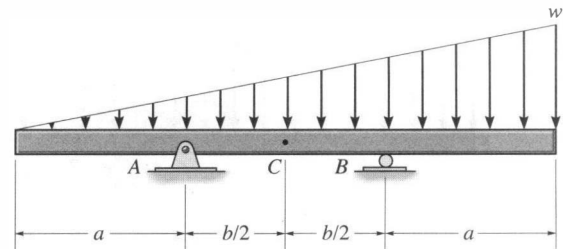
Probs. 7-19/20

7-21. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en la viga en el punto *B*.



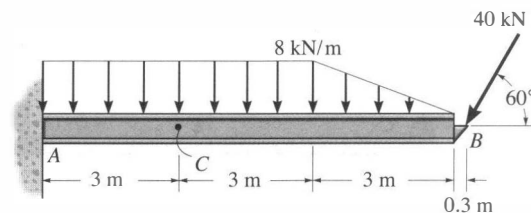
Prob. 7-21

7-22. Determine la razón a/b para la cual la fuerza cortante será cero en el punto medio *C* de la viga.



Prob. 7-22

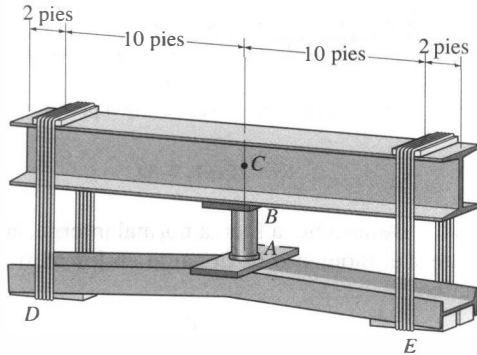
7-23. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto *C*.



Prob. 7-23

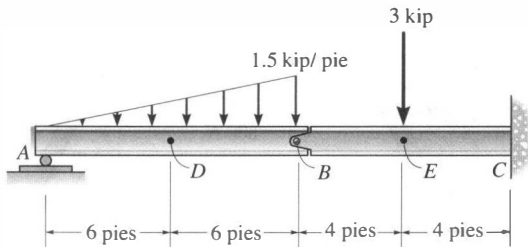
***7-24.** El gato AB se usa para enderezar la viga doblada DE mediante el arreglo mostrado. Si la fuerza axial de compresión en el gato es de 5000 lb, determine el momento interno desarrollado en el punto C de la viga superior. Ignore el peso de las vigas.

7-25. Resuelva el problema 7-24 suponiendo que cada viga tiene un peso uniforme de 150 lb/pie.



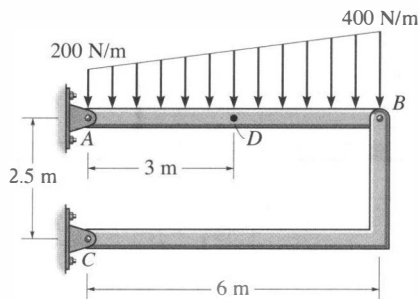
Probs. 7-24/25

7-26. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en la viga en secciones que pasan por los puntos D y E . El punto E está justo a la derecha de la carga de 3 kips.



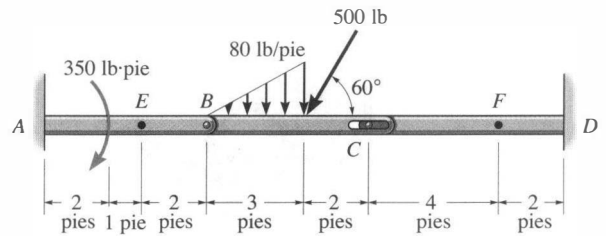
Prob. 7-26

7-27. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en una sección que pasa por el punto D del marco de dos miembros.



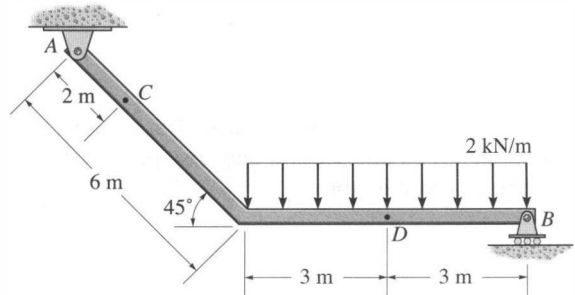
Prob. 7-27

***7-28.** Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en secciones que pasan por los puntos E y F . El miembro BC está articulado en B y tiene una ranura lisa en C . El pasador situado en C está fijo al miembro CD .



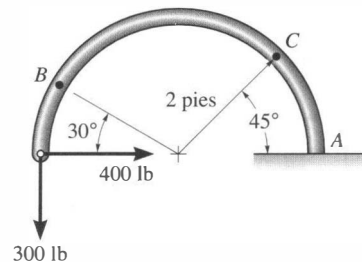
Prob. 7-28

7-29. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento en los puntos C y D .



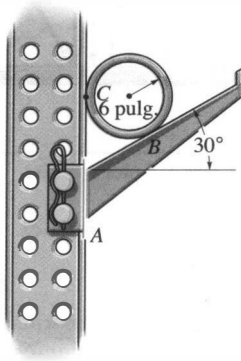
Prob. 7-29

7-30. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento que actúan en secciones que pasan por los puntos B y C sobre la barra curva.



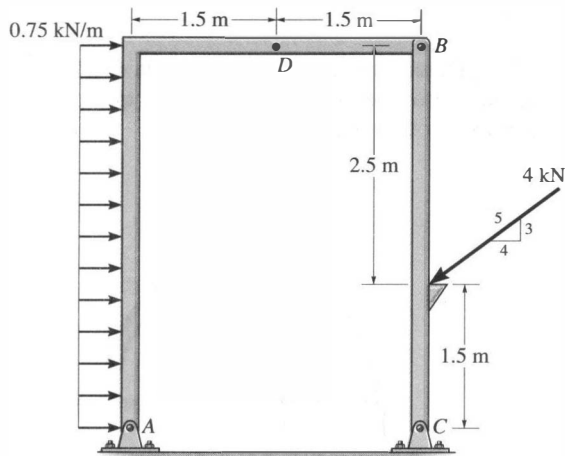
Prob. 7-30

7-31. El brazo en voladizo se usa para soportar cada extremo de un tubo liso que tiene un peso total de 300 lb. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento que actúan en su soporte fijo A a lo largo de una sección vertical.



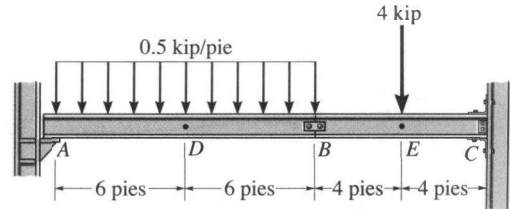
Prob. 7-31

*7-32. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en una sección que pasa por el punto D del marco de dos miembros.



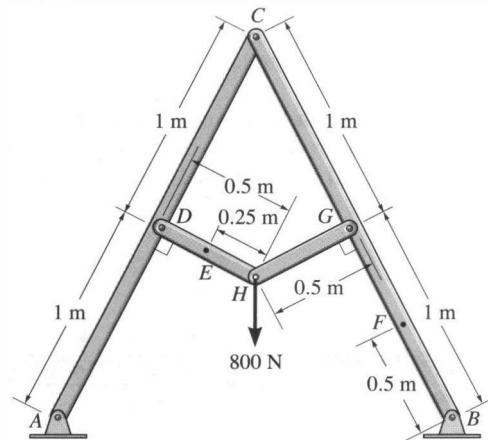
Prob. 7-32

7-33. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en la viga en los puntos D y E . El punto E está justo a la derecha de la carga de 4 kips. Suponga que A es un soporte de rodillo, el empalme ubicado en B es un pasador, y C es un empotramiento.



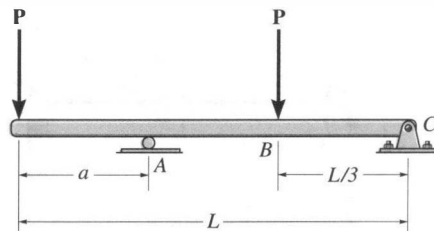
Prob. 7-33

7-34. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en los puntos E y F del marco.



Prob. 7-34

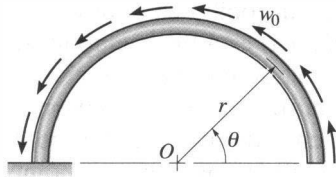
7-35. Determine la distancia a como una fracción de la longitud L de la viga para localizar el rodillo de soporte de manera que el momento en el punto B de la viga sea cero.



Prob. 7-35

*7-36. El arco semicircular está sometido a una carga uniforme distribuida a lo largo de su eje de w_0 por longitud unitaria. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento en el arco cuando $\theta = 45^\circ$.

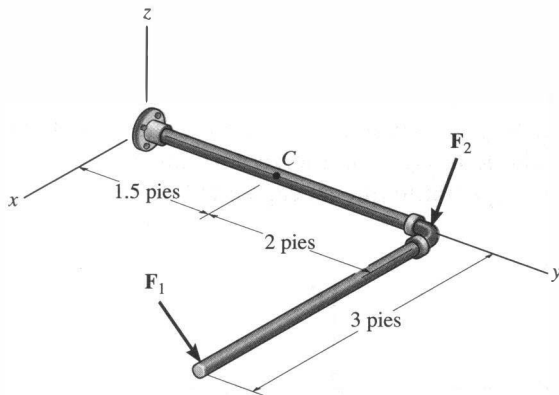
7-37. Resuelva el problema 7-36 para $\theta = 120^\circ$.



Probs. 7-36/37

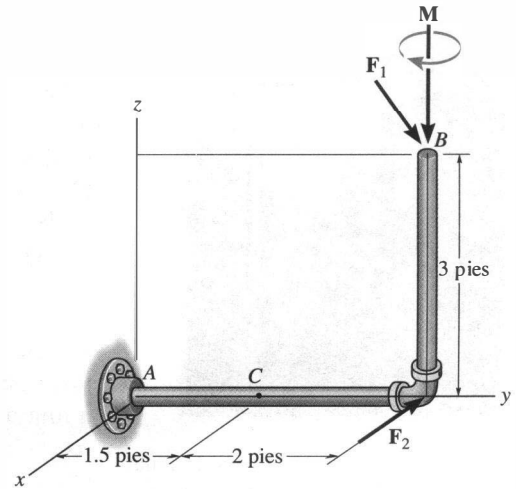
7-38. Determine las componentes x, y, z de la carga interna en una sección que pasa por el punto C en la tubería. Ignore el peso de los tubos. Considere $\mathbf{F}_1 = \{350\mathbf{j} - 400\mathbf{k}\}$ lb y $\mathbf{F}_2 = \{150\mathbf{i} - 300\mathbf{k}\}$ lb.

7-39. Determine las componentes x, y, z de la carga interna en una sección que pasa por el punto C en la tubería. Ignore el peso de los tubos. Considere $\mathbf{F}_1 = \{-80\mathbf{i} + 200\mathbf{j} - 300\mathbf{k}\}$ lb y $\mathbf{F}_2 = \{250\mathbf{i} - 150\mathbf{j} - 200\mathbf{k}\}$ lb.



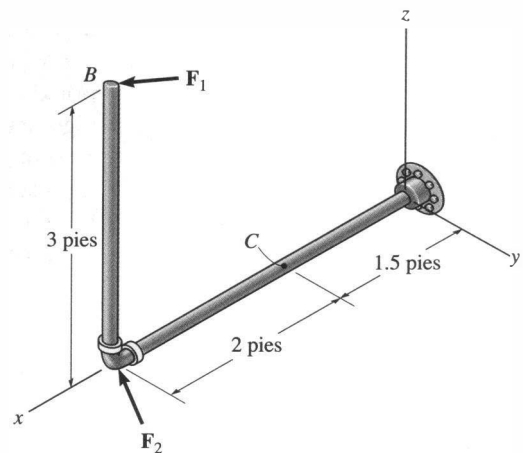
Probs. 7-38/39

*7-40. Determine las componentes de fuerza x, y, z y el momento en el punto C de la tubería. Ignore el peso de los tubos. La carga que actúa en $(0, 3.5 \text{ pies}, 3 \text{ pies})$ es $\mathbf{F}_1 = \{-24\mathbf{i} - 10\mathbf{k}\}$ lb y $\mathbf{M} = \{-30\mathbf{k}\}$ lb · pie, y en el punto $(0, 3.5 \text{ pies}, 0)$ $\mathbf{F}_2 = \{-80\mathbf{i}\}$ lb.



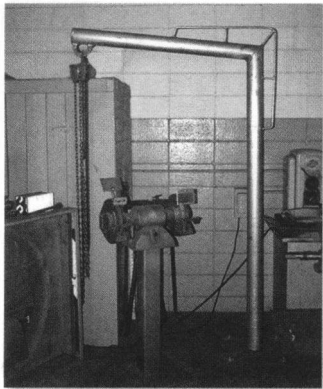
Prob. 7-40

7-41. Determine las componentes de fuerza x, y, z y el momento en el punto C de la tubería. Ignore el peso de los tubos. Considere $\mathbf{F}_1 = \{350\mathbf{i} - 400\mathbf{j}\}$ lb y $\mathbf{F}_2 = \{-300\mathbf{j} + 150\mathbf{k}\}$ lb.



Prob. 7-41

*7.2 Ecuaciones y diagramas de fuerza cortante y de momento



El ingeniero que diseñó esta grúa de taller percibió la necesidad de adicionar un refuerzo alrededor del nudo para prevenir una severa flexión interna en éste cuando una gran carga fuese suspendida de la cadena.

Las vigas son miembros estructurales diseñados para soportar cargas aplicadas perpendicularmente a sus ejes. En general, las vigas son barras largas, rectas, que tienen un área de sección transversal constante. A menudo, se clasifican con respecto a cómo están soportadas. Por ejemplo, una *viga soportada simplemente* es aquella que está articulada en un extremo y soportada mediante un rodillo en el otro extremo, figura 7-10, mientras que una *viga en voladizo* está fija o empotrada en un extremo y libre en el otro. El diseño real de una viga requiere un conocimiento detallado de la *variación* de la fuerza cortante interna V y del momento flexionante M que actúan en cada punto a lo largo del eje de la viga. Después de completar este análisis por fuerza y momento flexionante, podemos aplicar la teoría de la mecánica de materiales y un apropiado código de diseño para determinar el área de la sección transversal requerida de una viga.

Las *variaciones* de V y M como funciones de la posición x a lo largo del eje de la viga pueden obtenerse usando el método de las secciones visto en la sección 7.1. Sin embargo, aquí es necesario seccionar la viga a una distancia arbitraria x de un extremo en vez de hacerlo en un punto específico. Si los resultados se grafican, a las representaciones gráficas de V y M como funciones de x se les llama, respectivamente, *diagrama de fuerza cortante* y *diagrama de momento flexionante*.

En general, las funciones de fuerza cortante y de momento flexionante serán discontinuas, o sus pendientes serán discontinuas en puntos donde una carga distribuida cambia o donde son aplicadas fuerzas o momentos de par concentrados. Debido a esto, esas funciones deben ser determinadas para *cada segmento* de la viga localizado entre dos cualesquiera discontinuidades de la carga. Por ejemplo, las secciones localizadas en x_1 , x_2 y x_3 tendrán que usarse para describir la variación de V y M en toda la longitud de la viga en la figura 7-10. Esas funciones serán válidas *sólo* dentro de las regiones de O a a para x_1 , de a a b para x_2 , y de b a L para x_3 .

La fuerza normal interna no será considerada en el siguiente análisis por dos razones. En la mayoría de los casos, las cargas aplicadas a una viga actúan perpendicularmente al eje de la viga y, por tanto, producen sólo una fuerza cortante y un momento flexionante internos. Para fines de diseño, la resistencia de la viga a la fuerza cortante, y particularmente a la flexión, es más importante que su capacidad de resistir una fuerza normal.

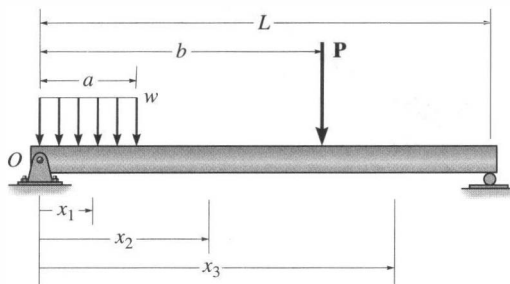
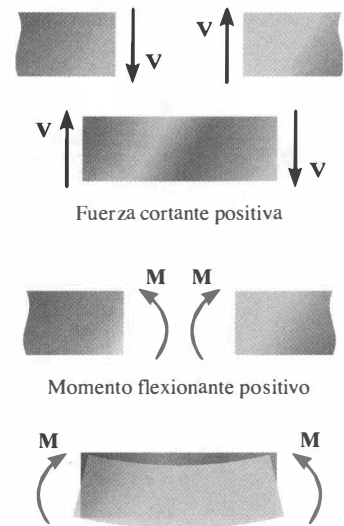


Fig. 7-10

Convención de signos. Antes de presentar un método para determinar la fuerza cortante y el momento flexionante como funciones de x y luego graficar esas funciones (diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante), primero es necesario establecer una *convención de signos* para definir una fuerza cortante y un momento flexionante “positivos” y “negativos” actuando en la viga. [Esto es análogo a asignar las direcciones coordenadas x positiva hacia la derecha y y positiva hacia arriba al graficar una función $y = f(x)$.] Aunque la selección de una convención de signos es arbitraria, aquí elegiremos la usada para la mayoría de las aplicaciones en ingeniería. Está ilustrada en la figura 7-11. Aquí las direcciones positivas son denotadas por una *fuerza cortante* interna que causa una *rotación en el sentido de las manecillas del reloj* del miembro sobre el cual actúa, y por un *momento* interno que causa *compresión o empuje sobre la parte superior* del miembro. También, un momento positivo tendería a flexionar el miembro, si éste fuera elástico, con concavidad hacia arriba. Las cargas opuestas a éstas se consideran negativas.



Convención de signos en vigas

Fig. 7-11

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para una viga pueden ser construidos usando el siguiente procedimiento.

Reacciones en los soportes.

- Determine todas las fuerzas y los momentos de par reactivos actuando sobre la viga, y resuelva todas las fuerzas en componentes actuando perpendicular y paralelamente al eje de la viga.

Funciones de fuerza cortante y momento.

- Especifique coordenadas x separadas con origen en el *extremo izquierdo* de la viga y extendiéndose a regiones de la viga *entre* fuerzas y/o momentos de par concentrados, o donde no haya discontinuidades de la carga distribuida.
- Seccione la viga perpendicularmente a su eje en cada distancia x y trace el diagrama de cuerpo libre de uno de los segmentos. Asegúrese que V y M se muestran actuando en sus *sentidos positivos*, de acuerdo con la convención de signos dada en la figura 7-11.
- La fuerza cortante V se obtiene sumando fuerzas perpendiculares al eje de la viga.
- El momento M se obtiene sumando momentos con respecto al extremo seccionado del segmento.

Diagramas de fuerza cortante y de momento.

- Grafique el diagrama de fuerza cortante (V contra x) y el diagrama de momento (M contra x). Si los valores calculados de las funciones que describen V y M son *positivos*, se grafican arriba del eje x , mientras que valores *negativos* se grafican debajo del eje x .
- En general, es conveniente graficar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante directamente abajo del diagrama de cuerpo libre de la viga.

EJEMPLO 7.7

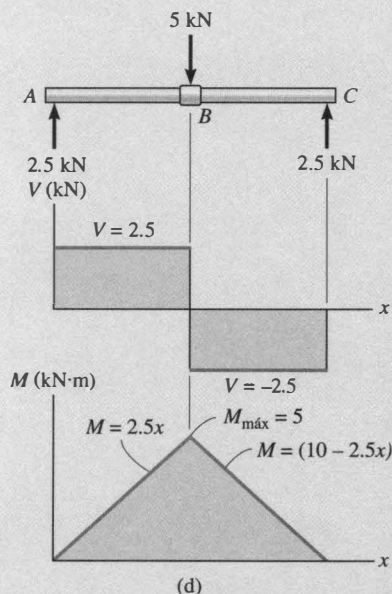
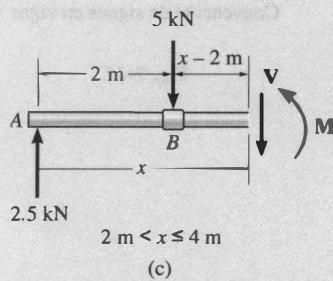
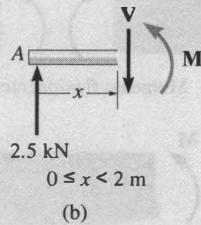
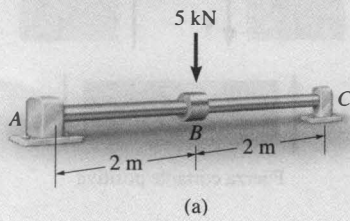


Fig. 7-12

Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la flecha mostrada en la figura 7-12a. El soporte en A es una chumacera de empuje y el soporte en C es una chumacera lisa.

Solución

Reacciones en los soportes. Las reacciones en los soportes ya han sido calculadas, como se muestra sobre el diagrama de cuerpo libre de la flecha, figura 7-12d.

Funciones de fuerza cortante y de momento. La flecha es seccionada a una distancia arbitraria x desde el punto A , extendiéndose dentro de la región AB , y el diagrama de cuerpo libre del segmento izquierdo se muestra en la figura 7-12b. Las incógnitas V y M son supuestas actuando en *sentido positivo* sobre la cara derecha del segmento de acuerdo con la convención establecida de signos. ¿Por qué? Aplicando las ecuaciones de equilibrio resulta

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V = 2.5 \text{ kN} \quad (1)$$

$$\zeta + \Sigma M = 0; \quad M = 2.5x \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (2)$$

Un diagrama de cuerpo libre para un segmento izquierdo de la flecha que se extiende una distancia x dentro de la región BC se muestra en la figura 7-12c. Como siempre, V y M se muestran actuando en sentido positivo. Por tanto,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 2.5 \text{ kN} - 5 \text{ kN} - V = 0 \quad (3)$$

$$V = -2.5 \text{ kN}$$

$$\zeta + \Sigma M = 0; \quad M + 5 \text{ kN}(x - 2 \text{ m}) - 2.5 \text{ kN}(x) = 0 \quad (4)$$

$$M = (10 - 2.5x) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Diagramas de fuerza cortante y de momento. Cuando se grafican las ecuaciones de la 1 a la 4 dentro de las regiones en que son válidas, se obtienen los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante mostrados en la figura 7-12d. El diagrama de fuerza cortante indica que la fuerza cortante interna es siempre de 2.5 kN (positiva) dentro del segmento de flecha AB . Justo a la derecha del punto B , la fuerza cortante cambia de signo y permanece en el valor constante de -2.5 kN para el segmento BC . El diagrama de momento comienza en cero, se incrementa linealmente hasta el punto B en $x = 2$ m, donde $M_{\text{máx}} = 2.5 \text{ kN}(2 \text{ m}) = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$, y después disminuye de regreso a cero.

En la figura 7-12d se ve que la gráfica de los diagramas de fuerza cortante y de momento es discontinua en puntos de fuerza concentrada, esto es, en los puntos A , B y C . Por esta razón, como se indicó antes, es necesario expresar por separado las funciones de fuerza cortante y de momento flexionante para regiones entre cargas concentradas. Sin embargo, debe quedar claro que todas las discontinuidades de carga son matemáticas, que surgen de la *idealización de una fuerza concentrada y de un momento de par*. Físicamente, las cargas son siempre aplicadas sobre un área finita, y si la variación de la carga pudiese realmente ser tomada en cuenta, los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante serían continuos sobre toda la longitud de la flecha.

EJEMPLO 7.8

Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga mostrada en la figura 7-13a.

Solución

Reacciones en los soportes. Las reacciones en los soportes ya han sido calculadas como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 7-13c.

Funciones de fuerza cortante y de momento. Un diagrama de cuerpo libre para un segmento izquierdo de la viga que tiene longitud x se muestra en la figura 7-13b. La carga distribuida que actúa sobre este segmento tiene una intensidad de $\frac{2}{3}x$ en su extremo y es reemplazada por una fuerza resultante *después* que el segmento es aislado como un diagrama de cuerpo libre. La *magnitud* de la fuerza resultante es igual a $\frac{1}{2}(x)(\frac{2}{3}x) = \frac{1}{3}x^2$. Esta fuerza *actúa a través del centroide* del área de carga distribuida, a una distancia $\frac{1}{3}x$ desde el extremo derecho. Aplicando las dos ecuaciones de equilibrio resulta

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 9 - \frac{1}{3}x^2 - V = 0$$

$$V = \left(9 - \frac{x^2}{3}\right) \text{ kN} \quad (1)$$

$$\downarrow + \Sigma M = 0; \quad M + \frac{1}{3}x^2\left(\frac{x}{3}\right) - 9x = 0$$

$$M = \left(9x - \frac{x^3}{9}\right) \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (2)$$

Diagramas de fuerza cortante y de momento. Los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante mostrados en la figura 7-13c se obtienen graficando las ecuaciones 1 y 2.

El punto de *fuerza cortante cero* se puede encontrar usando la ecuación 1:

$$V = 9 - \frac{x^2}{3} = 0$$

$$x = 5.20 \text{ m}$$

En la sección 7.3 se verá que este valor de x representa el punto sobre la viga donde ocurre el *momento máximo*. Usando la ecuación (2), tenemos

$$M_{\text{máx}} = \left(9(5.20) - \frac{(5.20)^3}{9}\right) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$= 31.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

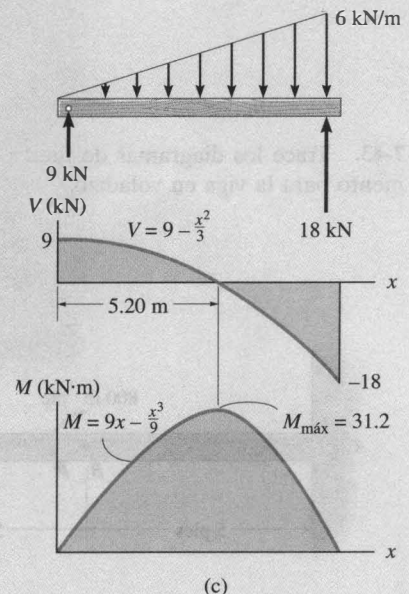
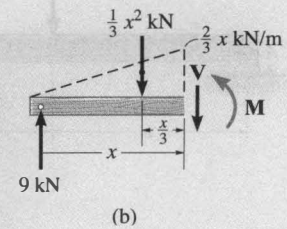
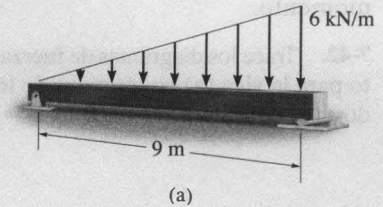
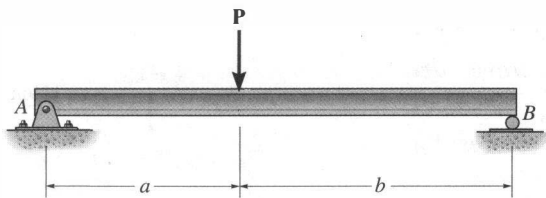


Fig. 7-13

PROBLEMAS

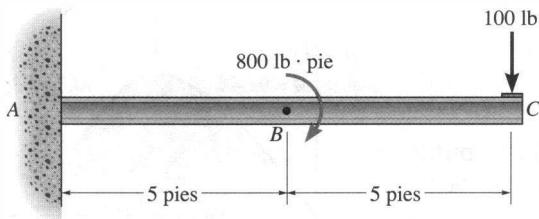
Para cada uno de los siguientes problemas, establezca el eje x con el origen en el lado izquierdo de la viga, y obtenga la fuerza cortante interna y el momento como una función de x . Use esos resultados para graficar los diagramas de fuerza cortante y de momento.

7-42. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga (a) en términos de los parámetros mostrados; (b) considere $P = 600$ lb, $a = 5$ pies, $b = 7$ pies.



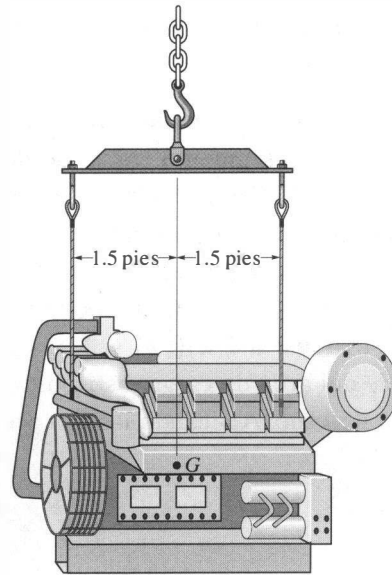
Prob. 7-42

7-43. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga en voladizo.



Prob. 7-43

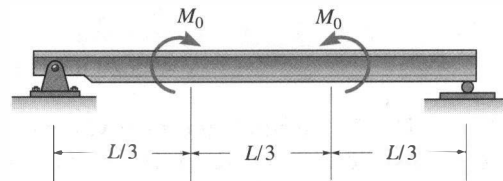
***7-44.** La barra de suspensión soporta el motor de 600 lb. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento de para la barra.



Prob. 7-44

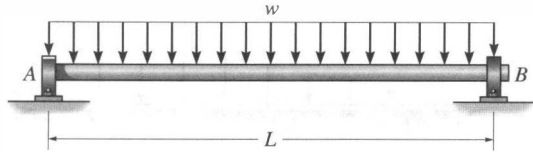
7-45. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga (a) en términos de los parámetros mostrados; (b) considere $M_O = 500$ N · m, $L = 8$ m.

7-46. Si $L = 9$ m, la viga fallará cuando la fuerza cortante máxima sea $V_{m\acute{a}x} = 5$ kN o el momento flexionante máximo sea $M_{m\acute{a}x} = 2$ kN · m. Determine la magnitud M_O de los momentos más grandes que la viga soportará.



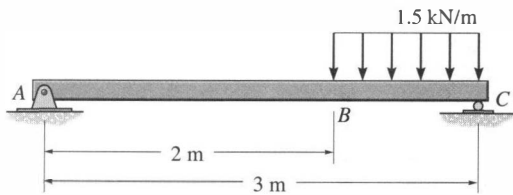
Probs. 7-45/46

7-47. La flecha está soportada por una chumacera de empuje en A y una chumacera lisa en B . Si $L = 10$ pies, la flecha fallará cuando el momento máximo sea $M_{\text{máx}} = 5 \text{ kip} \cdot \text{pie}$. Determine la carga máxima w , distribuida uniformemente, que la flecha soportará.



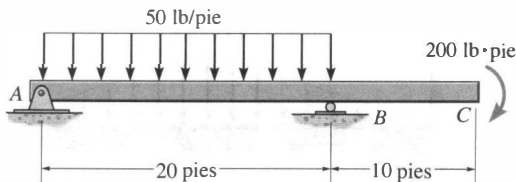
Prob. 7-47

*7-48. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



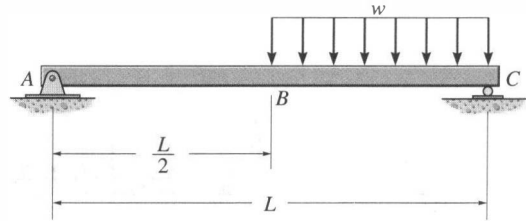
Prob. 7-48

7-49. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



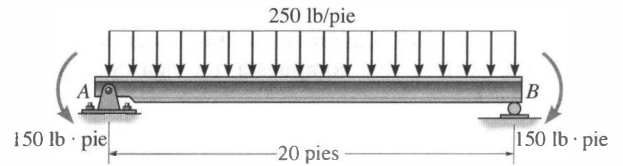
Prob. 7-49

7-50. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



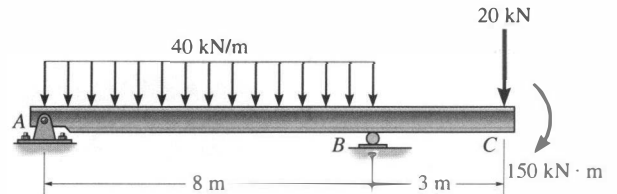
Prob. 7-50

7-51. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



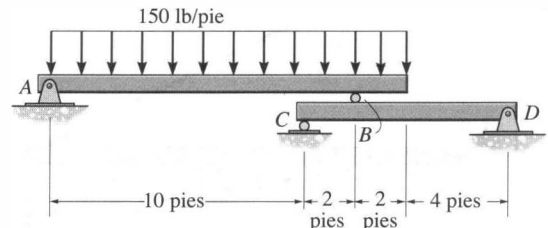
Prob. 7-51

*7-52. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



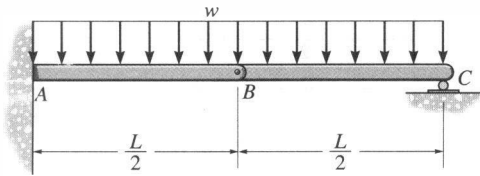
Prob. 7-52

7-53. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para cada uno de los dos segmentos de la viga compuesta.



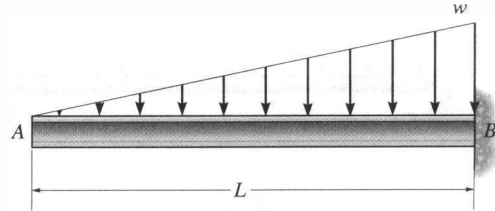
Prob. 7-53

7-54. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga ABC . Observe que se tiene un pasador en B .



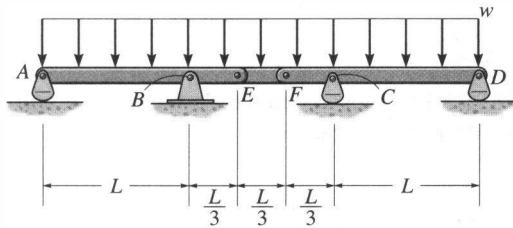
Prob. 7-54

7-57. Si $L = 18$ pies, la viga fallará cuando la fuerza cortante máxima sea $V_{\text{máx}} = 800$ lb, o el momento máximo sea $M_{\text{máx}} = 1200$ lb · pie. Determine la intensidad w más grande de la carga distribuida que la viga soportará.



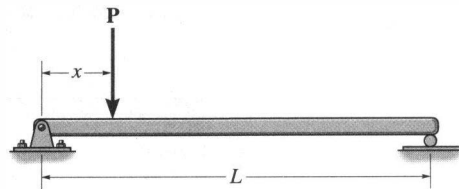
Prob. 7-57

7-55. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga compuesta. La viga tiene pasadores en E y F .



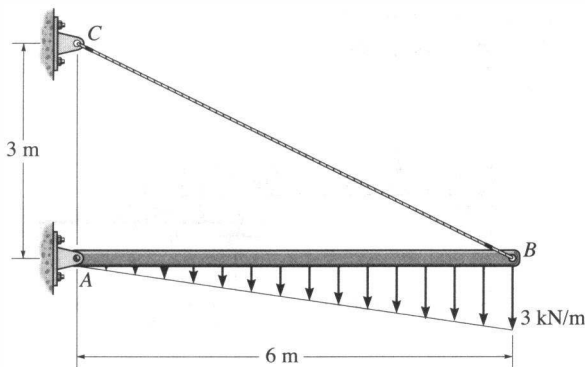
Prob. 7-55

7-58. La viga fallará cuando el momento interno máximo sea $M_{\text{máx}}$. Determine la posición x de la fuerza concentrada P y su menor magnitud que causará la falla.



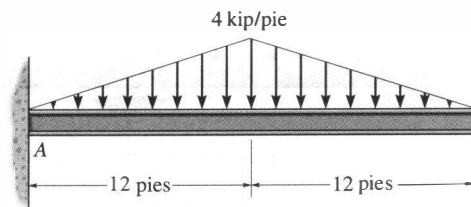
Prob. 7-58

*7-56. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



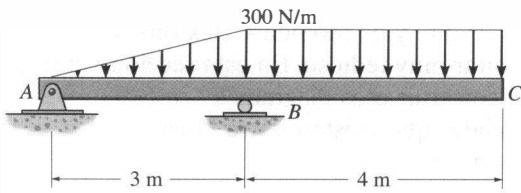
Prob. 7-56

7-59. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



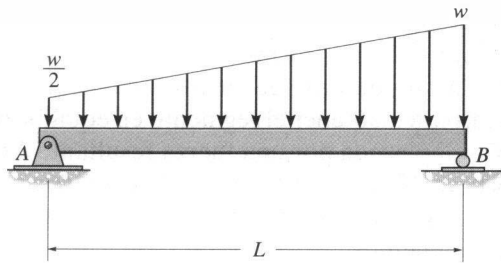
Prob. 7-59

*7-60. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



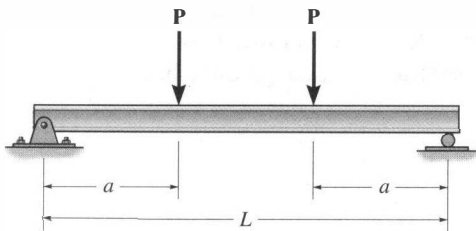
Prob. 7-60

7-61. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



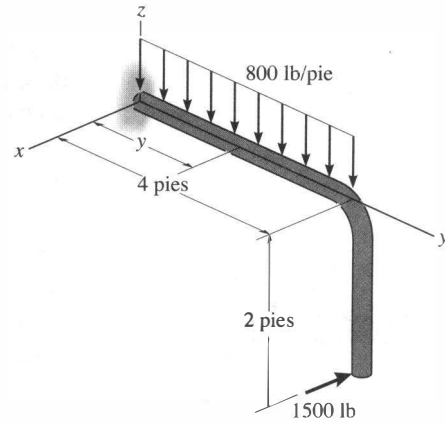
Prob. 7-61

7-62. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga (a) en términos de los parámetros mostrados; (b) considere $P = 800$ lb, $a = 5$ pies, $L = 12$ pies.



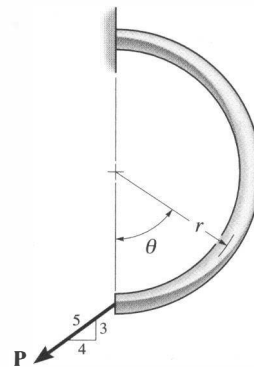
Prob. 7-62

7-63. Exprese las componentes x, y, z de carga interna en la barra como función de y , donde $0 \leq y \leq 4$ pies.



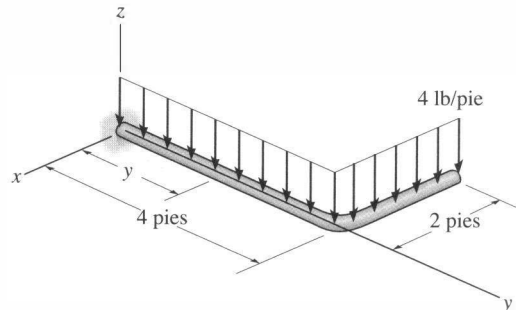
Prob. 7-63

*7-64. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en la barra curva como una función de θ .



Prob. 7-64

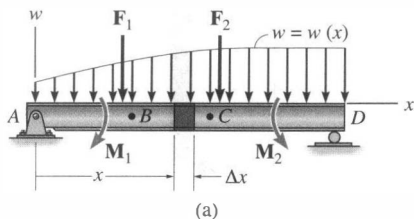
7-65. Exprese las componentes internas de fuerza cortante y de momento que actúan en la barra como una función de y , donde $0 \leq y \leq 4$ pies.



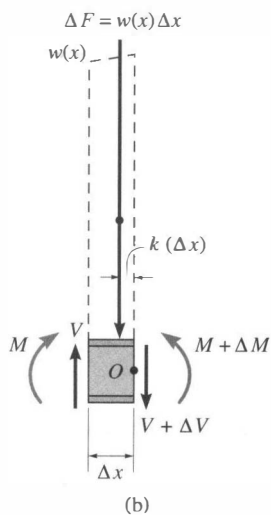
Prob. 7-65

*7.3 Relaciones entre carga distribuida, fuerza cortante y momento

En los casos en que una viga está sometida a varias cargas concentradas, momentos de par y cargas distribuidas, el método de construir los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante analizado en la sección 7.2 puede resultar muy tedioso. En esta sección veremos un método más simple para construir esos diagramas —método que se basa en las relaciones diferenciales que existen entre la carga, la fuerza cortante y el momento flexionante.



Carga distribuida. Considere la viga AD mostrada en la figura 7-14a, la cual está sometida a una carga arbitraria $w = w(x)$ y a una serie de fuerzas concentradas y momentos de par. En la siguiente argumentación, la *carga distribuida* se considerará *positiva* cuando la *carga actúe hacia abajo* como se muestra. Un diagrama de cuerpo libre para un pequeño segmento de la viga con una longitud Δx se elige en un punto x a lo largo de la viga que *no* esté sometida a una fuerza concentrada o momento de par, figura 7-14b. Por tanto cualquier resultado que se obtenga no se aplicará en puntos de carga concentrada. La fuerza cortante y el momento flexionante internos mostrados en el diagrama de cuerpo libre son supuestos actuando en *sentido positivo* de acuerdo con la convención establecida de signos. Observe que tanto la fuerza cortante como el momento flexionante que actúan sobre la cara derecha deben ser incrementados en una cantidad pequeña, finita, para mantener el segmento en equilibrio. La carga distribuida ha sido reemplazada por una fuerza resultante $\Delta F = w(x)\Delta x$ que actúa a una distancia fraccional $k(\Delta x)$ desde el extremo derecho, donde $0 < k < 1$ [por ejemplo, si $w(x)$ es *uniforme*, $k = \frac{1}{2}$]. Aplicando las ecuaciones de equilibrio, tenemos



$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad & V - w(x)\Delta x - (V + \Delta V) = 0 \\
 & \Delta V = -w(x)\Delta x \\
 \downarrow + \Sigma M_O = 0; \quad & -V\Delta x - M + w(x)\Delta x[k(\Delta x)] + (M + \Delta M) = 0 \\
 & \Delta M = V\Delta x - w(x)k(\Delta x)^2
 \end{aligned}$$

Dividiendo entre Δx y tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, esas dos ecuaciones se convierten en

Fig. 7-14

$\frac{dV}{dx} = -w(x)$	Pendiente del diagrama de fuerza cortante	= de la intensidad de la carga distribuida	Negativo	(7-1)
-------------------------	---	--	----------	-------

$\frac{dM}{dx} = V$	Pendiente del diagrama de momento	= Fuerza cortante	(7-2)
---------------------	---	-------------------------	-------

Estas dos ecuaciones proporcionan un medio conveniente para graficar los diagramas de fuerza cortante y momento para una viga. En un punto específico de una viga, la ecuación 7-1 establece que la *pendiente del diagrama de fuerza cortante es igual al negativo de la intensidad de la carga distribuida*, mientras que la ecuación 7-2 establece que la *pendiente del diagrama de momento flexionante es igual a la fuerza cortante*. En particular, si la fuerza cortante es igual a cero, $dM/dx = 0$, y por tanto un *punto de fuerza cortante cero corresponde a un punto de momento máximo (o posiblemente mínimo)*.

Las ecuaciones 7-1 y 7-2 también pueden ser reescritas en la forma $dV = -w(x) dx$ y $dM = V dx$. Al observar que $w(x) dx$ y $V dx$ representan áreas diferenciales bajo los diagramas de carga distribuida y de fuerza cortante, respectivamente, podemos integrar esas áreas entre dos puntos B y C a lo largo de la viga, figura 7-14a, y escribir

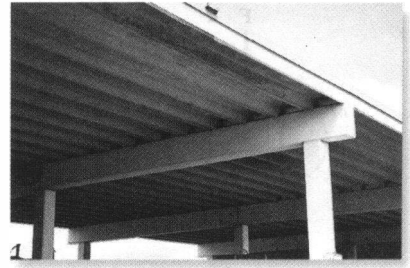
$$\Delta V_{BC} = - \int w(x) dx$$

Cambio en fuerza cortante	=	Negativo del área bajo la curva de carga	(7-3)
---------------------------------	---	--	-------

y

$$\Delta M_{BC} = \int V dx$$

Cambio en mo- mento	=	Área bajo diagrama de fuerza cortante	(7-4)
---------------------------	---	---	-------



Esta viga de concreto se usa para soportar el techo. Su tamaño y la colocación del refuerzo de acero dentro de ella pueden ser determinados una vez que los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante han sido establecidos.

La ecuación 7-3 establece que el *cambio en fuerza cortante entre los puntos B y C es igual al negativo del área bajo la curva de carga distribuida entre esos puntos*. Similarmente, a partir de la ecuación 7-4, el *cambio en momento entre B y C es igual al área bajo el diagrama de fuerza cortante dentro de la región BC* . Como están implicadas dos integraciones, primero para determinar el cambio en fuerza cortante, ecuación 7-3, y luego para determinar el cambio en momento, ecuación 7-4, podemos establecer que si la curva de carga $w = w(x)$ es un polinomio de grado n , entonces $V = V(x)$ será una curva de grado $n + 1$, y $M = M(x)$ será una curva de grado $n + 2$.

Como se indicó previamente, las ecuaciones anteriores no son aplicables donde actúan una fuerza o un momento de par *concentrados*. Esos dos casos especiales crean *discontinuidades* en los diagramas de fuerza cortante y de momento, y en consecuencia, cada uno debe ser tratado por separado.

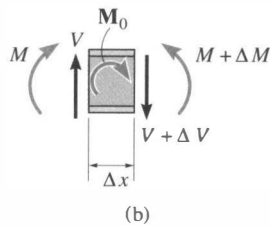
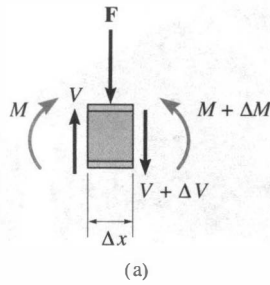


Fig. 7-15

Fuerza. Un diagrama de cuerpo libre de un pequeño segmento de la viga que aparece en la figura 7-14a, tomado debajo de una de las fuerzas, se muestra en la figura 7-15a. Aquí puede verse que el equilibrio de fuerzas requiere

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad \Delta V = -F \quad (7-5)$$

Así, el cambio en fuerza cortante es negativo, de manera que en el diagrama de fuerza cortante ésta “saltará” hacia abajo cuando F actúe hacia abajo sobre la viga. Igualmente, el salto en fuerza cortante (ΔV) es hacia arriba cuando F actúa hacia arriba.

Momento de par. Si retiramos un segmento de la viga de la figura 7-14a que esté localizado en el momento de par, obtendremos el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 7-15b. En este caso, haciendo $\Delta x \rightarrow 0$, el equilibrio por momento requiere

$$\zeta + \Sigma M = 0; \quad \Delta M = M_0 \quad (7-6)$$

Así, el cambio en momento es positivo, o el diagrama de momento “saltará” hacia arriba si M_0 es en el sentido de las manecillas del reloj. Igualmente, el salto ΔM es hacia abajo cuando M_0 es en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj.

Los ejemplos que siguen ilustran la aplicación de las ecuaciones anteriores para la construcción de los diagramas de fuerza cortante y de momento. Después de estudiarlos, es recomendable que los ejemplos 7-7 y 7-8 sean resueltos usando este método.



Cada separador similar al AB que soporta esta grúa actúa como una viga sujeta al bastidor de la grúa en un extremo, y está sometida a una fuerza F sobre la base en su otro extremo. Un diseño apropiado requiere que el separador pueda resistir sus máximos momento y fuerza cortante internos. Los diagramas de fuerza cortante y de momento indican que la fuerza cortante será constante en toda la longitud, y que el momento máximo ocurre en el soporte A .

PUNTOS IMPORTANTES

- La pendiente del diagrama de fuerza cortante es igual al negativo de la intensidad de la carga distribuida, donde la carga distribuida positiva es hacia abajo, esto es, $dV/dx = -w(x)$.
- Si una fuerza concentrada actúa hacia abajo sobre la viga, la fuerza cortante saltará hacia abajo una cantidad igual a su valor.
- El cambio en la fuerza cortante ΔV entre dos puntos es igual al negativo del área bajo la curva de carga distribuida entre los puntos.
- La pendiente del diagrama de momento es igual a la fuerza cortante, esto es, $dM/dx = V$.
- El cambio en el momento ΔM entre dos puntos es igual al área bajo el diagrama de fuerza cortante entre los dos puntos.
- Si un momento de par que sea en el sentido de las manecillas del reloj actúa sobre la viga, la fuerza cortante no será afectada; sin embargo, el diagrama de momento saltará hacia arriba una cantidad igual al valor del momento de par.
- Los puntos de fuerza cortante cero representan puntos de momento máximo o mínimo ya que $dM/dx = 0$.

EJEMPLO 7.9

Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga mostrada en la figura 7-16a.

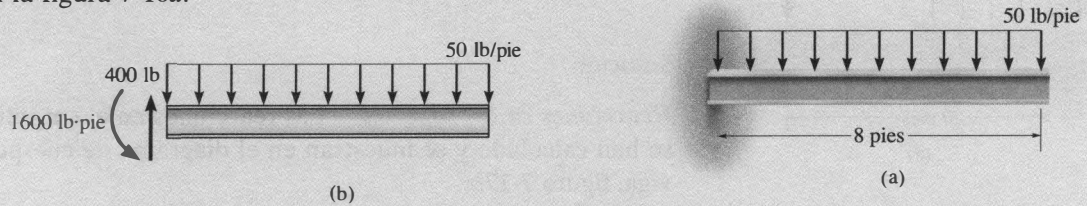
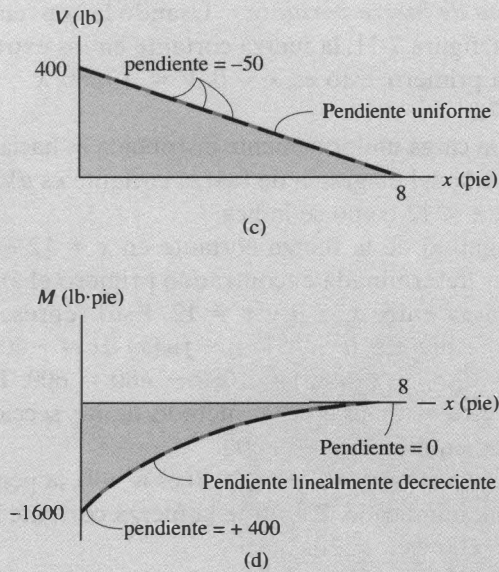


Fig. 7-16



Solución

Reacciones en los soportes. Las reacciones en el soporte fijo han sido calculadas y se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 7-16b.

Diagrama de fuerza cortante. Se grafica primero la fuerza cortante en los puntos extremos, figura 7-16c. A partir de la convención de signos, figura 7-11, $V = +400$ en $x = 0$ y $V = 0$ en $x = 8$. Como $dV/dx = -w = -50$, una línea recta, de pendiente *negativa*, conecta los puntos extremos.

Diagrama de momento. A partir de nuestra convención de signos, figura 7-11, los momentos en los puntos extremos de la viga, $M = -1600$ en $x = 0$ y $M = 0$ en $x = 8$, son graficados primero, figura 7-16d. Valores sucesivos de la fuerza cortante tomados del diagrama, figura 7-16c, indican que la *pendiente* $dM/dx = V$ del diagrama de momento, figura 7-16d, es siempre positiva y *linealmente decreciente* desde $dM/dx = 400$ en $x = 0$ hasta $dM/dx = 0$ en $x = 8$. Así, debido a las integraciones, la constante w resulta en una línea inclinada (curva de primer grado) para V , y para M da una parábola (curva de segundo grado).

EJEMPLO 7.10

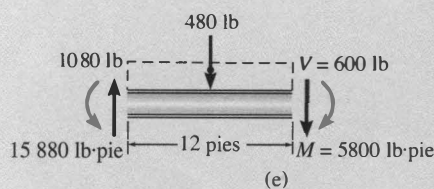
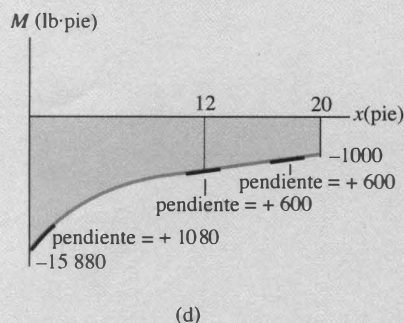
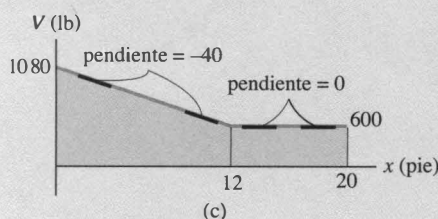
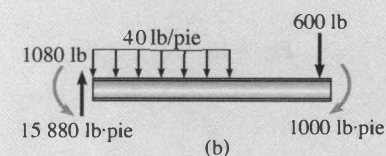
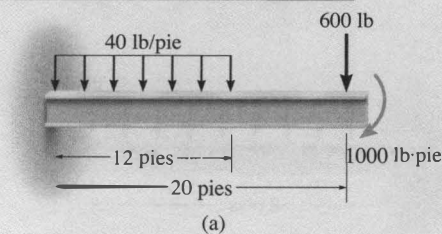


Fig. 7-17

Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga en voladizo mostrada en la figura 7-17a.

Solución

Reacciones en los soportes. Las reacciones en el empotramiento ya se han calculado y se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 7-17b.

Diagrama de fuerza cortante. Usando la convención de signos establecida, figura 7-11, la fuerza cortante en los extremos de la viga es graficada primero; esto es, $x = 0$, $V = +1080$; $x = 20$, $V = +600$, figura 7-17c.

Como la carga uniformemente distribuida es hacia abajo y constante, la pendiente del diagrama de fuerza cortante es $dV/dx = -w = -40$ para $0 \leq x < 12$ como se indica.

La magnitud de la fuerza cortante en $x = 12$ es $V = +600$. Ésta puede ser determinada encontrando primero el área bajo el diagrama de carga entre $x = 0$ y $x = 12$. Esto representa el cambio en fuerza cortante. Es decir, $\Delta V = -\int w(x) dx = -40(12) = -480$. Así, $V|_{x=12} = V|_{x=0} + (-480) = 1080 - 480 = 600$. También podemos obtener este valor usando el método de las secciones, figura 7-17e, donde por equilibrio $V = +600$.

Como la carga entre $12 < x \leq 20$ es $w = 0$, la pendiente $dV/dx = 0$ como quedó indicado. Esto trae la fuerza cortante al valor requerido de $V = +600$ en $x = 20$.

Diagrama de momento. De nuevo, usando la convención de signos establecida, se grafican primero los momentos en los extremos de la viga; esto es, $x = 0$, $M = -15\,880$; $x = 20$, $M = -1000$, figura 7-17d.

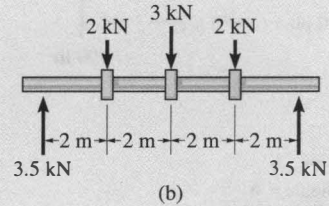
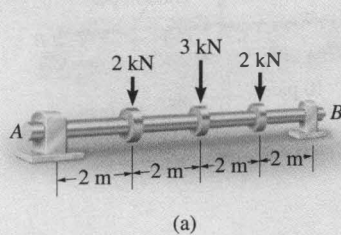
Cada valor de la fuerza cortante da la pendiente del diagrama de momento ya que $dM/dx = V$. Como se indica, en $x = 0$, $dM/dx = +1080$; y en $x = 12$, $dM/dx = +600$. Para $0 \leq x < 12$, los valores específicos del diagrama de fuerza cortante son positivos pero disminuyen linealmente. Por tanto, el diagrama de momento es parabólico con una pendiente positiva disminuyendo linealmente.

La magnitud del momento en $x = 12$ es -5800 . Esto se puede encontrar determinando primero el área trapezoidal bajo el diagrama de fuerza cortante, el cual representa el cambio en momento, $\Delta M = \int V dx = 600(12) + (1080 - 600)(12) = +10\,080$. Así, $M|_{x=12} = M|_{x=0} + 10\,080 = -15\,880 + 10\,080 = -5800$. El método más "básico" de las secciones también puede usarse, donde el equilibrio en $x = 12$ requiere que $M = -5800$, figura 7-17e.

El diagrama de momento tiene una pendiente constante para $12 < x \leq 20$ ya que a partir del diagrama de fuerza cortante, $dM/dx = V = +600$. Esto da el valor de $M = -1000$ en $x = 20$, como es requerido.

EJEMPLO 7.11

Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la flecha mostrada en la figura 7-18a. El soporte en A es una chumacera de empuje y el soporte en B es una chumacera lisa.


Solución

Reacciones en los soportes. Las reacciones en los soportes se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la figura 7-18b.

Diagrama de fuerza cortante. Los puntos extremos $x = 0$, $V = +3.5$ y $x = 8$, $V = -3.5$ se grafican primero, como se muestra en la figura 7-18c.

Dado que no hay carga distribuida sobre la flecha, la pendiente del diagrama de fuerza cortante en toda la longitud de la flecha es cero; esto es, $dV/dx = -w = 0$. Sin embargo, hay una discontinuidad o “salto” en el diagrama de fuerza cortante en cada fuerza concentrada. A partir de la ecuación 7-5, $\Delta V = -F$, el cambio en fuerza cortante es negativo cuando la fuerza actúa hacia abajo y positivo cuando actúa hacia arriba. Dicho de otra manera, el “salto” sigue a la fuerza, esto es, una fuerza hacia abajo ocasiona un salto hacia abajo, y viceversa. Así, la fuerza de 2 kN en $x = 2$ m cambia la fuerza cortante de 3.5 kN a 1.5 kN; la fuerza de 3 kN en $x = 4$ m cambia la fuerza cortante de 1.5 kN a -1.5 kN, etc. También podemos obtener valores numéricos para la fuerza cortante en un punto específico en la flecha usando el método de las secciones, como por ejemplo, en $x = 2^+$ m, $V = 1.5$ kN en la figura 7-18e.

Diagrama de momento. Los puntos extremos $x = 0$, $M = 0$ y $x = 8$, $M = 0$ son graficados primero, como se muestra en la figura 7-18d.

Como la fuerza cortante es constante en cada región de la flecha, el diagrama de momento tiene una pendiente positiva o negativa constante correspondiente como se indica en el diagrama. Los valores numéricos para el cambio en momento en cualquier punto pueden ser calculados a partir del área bajo el diagrama de fuerza cortante. Por ejemplo, en $x = 2$ m, $\Delta M = \int V dx = 3.5(2) = 7$. Así, $M|_{x=2} = M|_{x=0} + 7 = 0 + 7$. Además, por el método de las secciones, podemos determinar el momento en un punto específico, por ejemplo, en $x = 2^+$ m, $M = 7$ kN · m, figura 7-18e.

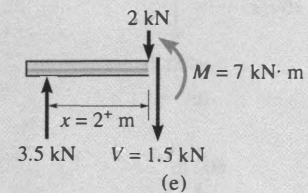
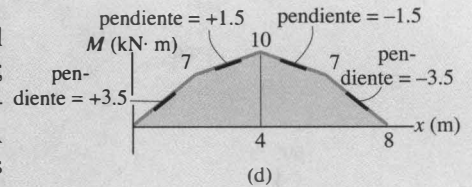
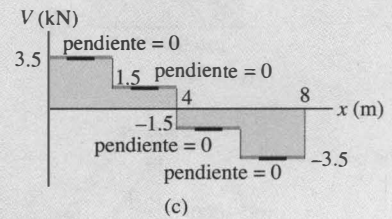
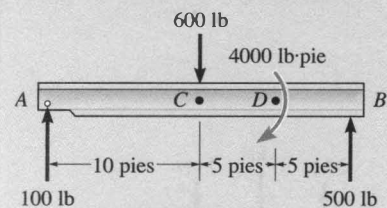
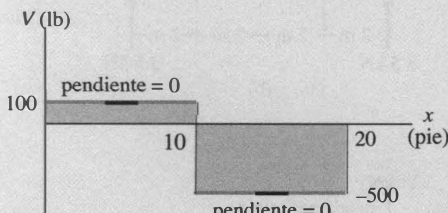


Fig. 7-18

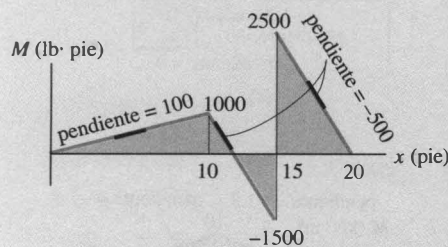
EJEMPLO 7.12



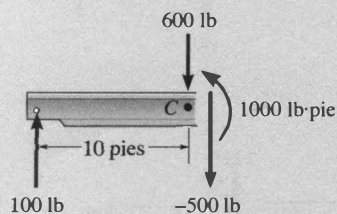
(b)



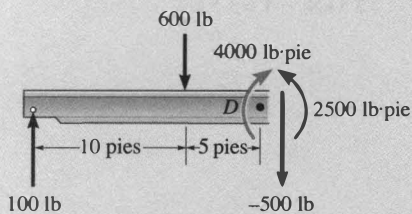
(c)



(d)



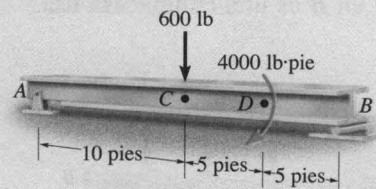
(e)



(f)

Fig. 7-19

Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga mostrada en la figura 7-19a.



(a)

Solución

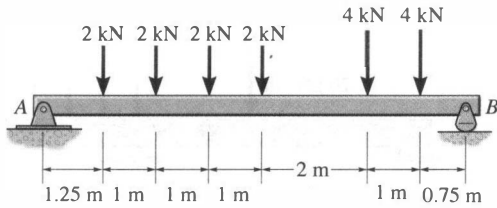
Reacciones en los soportes. Las reacciones están calculadas e indicadas en el diagrama de cuerpo libre, figura 7-19b.

Diagrama de fuerza cortante. Como en el ejemplo 7.11, el diagrama de fuerza cortante puede ser construido “siguiendo la carga” en el diagrama de cuerpo libre. Con respecto a esto, comenzando en A, la reacción es hacia arriba por lo que $V_A = +100$ lb, figura 7-19c. Ninguna carga actúa entre A y C, así que la fuerza cortante permanece constante, esto es, $dV/dx = -w(x) = 0$. En C la fuerza de 600 lb actúa hacia abajo, por lo que la fuerza cortante salta hacia abajo 600 lb, de 100 lb a -500 lb. De nuevo, la fuerza cortante es constante (ninguna carga) y termina en -500 lb en el punto B. Observe que ningún salto o discontinuidad en la fuerza cortante ocurren en D, el punto donde es aplicado el momento de par de 4000 lb · pie, figura 7-19b. Esto es debido a que, por equilibrio de fuerzas, $\Delta V = 0$ en la figura 7-15b.

Diagrama de momento. El momento en cada extremo de la viga es cero. Esos dos puntos se grafican primero, figura 7-19d. La pendiente del diagrama de momento desde A hasta C es constante ya que $dM/dx = V = +100$. El valor del momento en C puede ser determinado por el método de las secciones, figura 7-19e donde $M_C = +1000$ lb · pie; o calculando primero el área rectangular bajo el diagrama de fuerza cortante entre A y C para obtener el cambio en momento $\Delta M_{AC} = (100 \text{ lb})(10 \text{ pies}) = 1000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$. Como $M_A = 0$, entonces $M_C = 0 + 1000 \text{ lb} \cdot \text{pie} = 1000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$. De C a D, la pendiente del diagrama de momento es $dM/dx = V = -500$, figura 7-19c. El área bajo el diagrama de fuerza cortante entre los puntos C y D es $\Delta M_{CD} = (-500 \text{ lb})(5 \text{ pies}) = -2500 \text{ lb} \cdot \text{pie}$, por lo que $M_D = M_C + \Delta M_{CD} = 1000 - 2500 = -1500 \text{ lb} \cdot \text{pie}$. En el punto D ocurre un salto en el diagrama de momento, el cual es causado por el momento de par concentrado de 4000 lb · pie. A partir de la ecuación 7-6, el salto es *positivo* ya que el momento de par tiene un sentido *igual al de las manecillas del reloj*. Así, en $x = 15^+$ pies, el momento es $M_D = -1500 + 4000 = 2500 \text{ lb} \cdot \text{pie}$. Este valor *también* puede ser determinado por el método de las secciones, figura 7-19f. Desde el punto D la pendiente de $dM/dx = -500$ es mantenida hasta que el diagrama se acerca a cero en B, figura 7-19d.

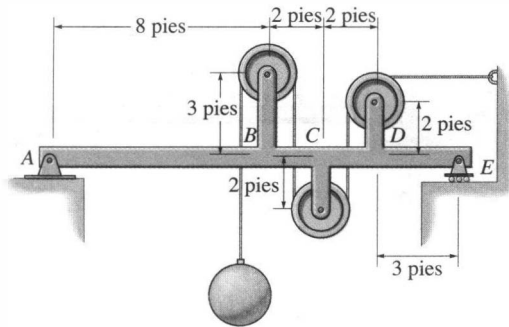
PROBLEMAS

7-66. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



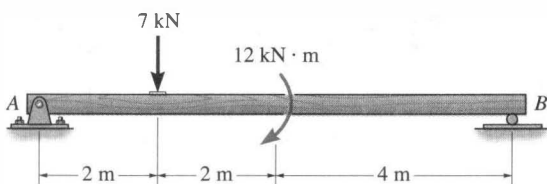
Prob. 7-66

7-67. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga *ABCDE*. Todas las poleas tienen radio de 1 pie. Ignore el peso de la viga y los arreglos de las poleas. La carga es de 500 lb.



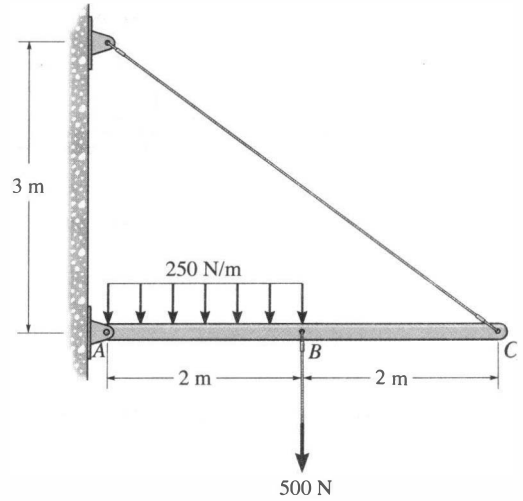
Prob. 7-67

***7-68.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



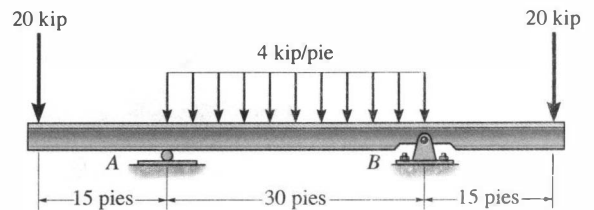
Prob. 7-68

7-69. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



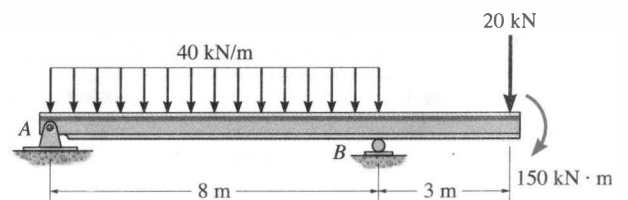
Prob. 7-69

7-70. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



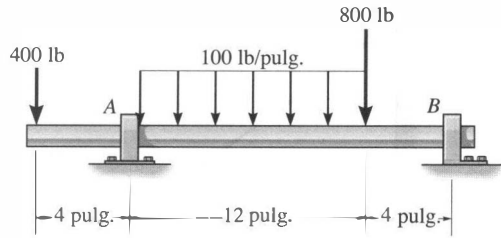
Prob. 7-70

7-71. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



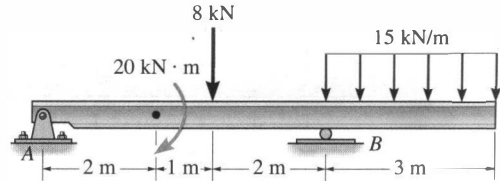
Prob. 7-71

*7-72. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la flecha. El soporte en A es una chumacera lisa y en B es una chumacera de empuje.



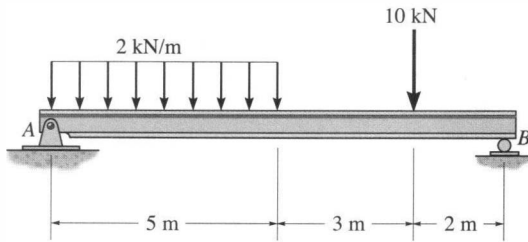
Prob. 7-72

7-75. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



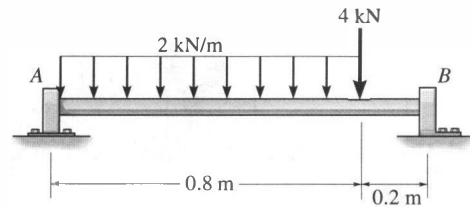
Prob. 7-75

7-73. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



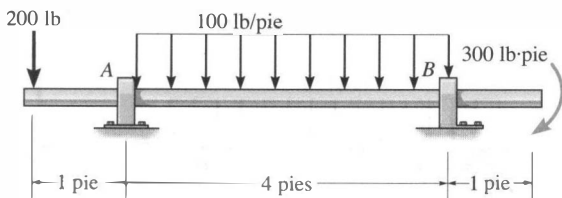
Prob. 7-73

*7-76. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la flecha. El soporte en A es una chumacera de empuje y en B es una chumacera lisa.



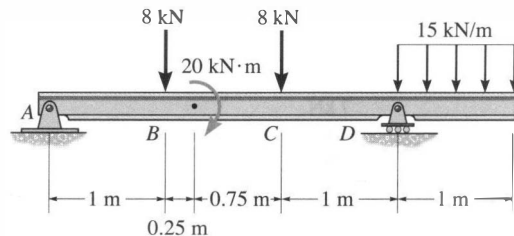
Prob. 7-76

7-74. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la flecha. El soporte en A es una chumacera lisa y en B es una chumacera de empuje.



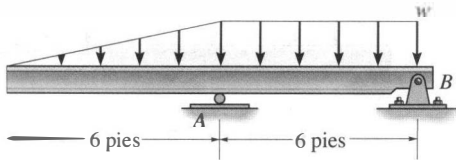
Prob. 7-74

7-77. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



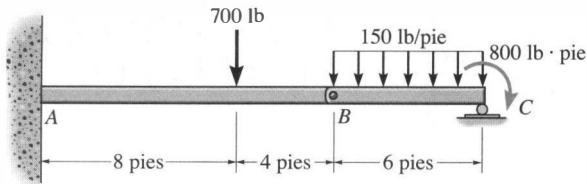
Prob. 7-77

7-78. La viga fallará cuando el momento máximo sea $M_{\text{máx}} = 30 \text{ kip} \cdot \text{pie}$ o la fuerza cortante máxima sea $V_{\text{máx}} = 8 \text{ kip}$. Determine la máxima carga distribuida w que la viga puede soportar.



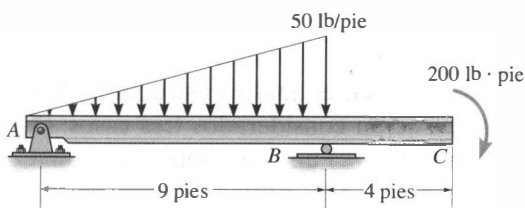
Prob. 7-78

7-79. La viga consiste en dos segmentos conectados mediante un pasador colocado en B. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



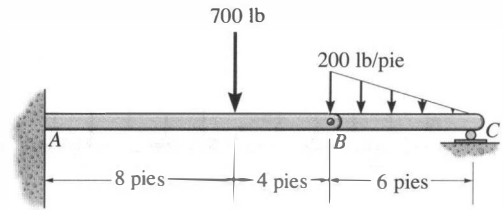
Prob. 7-79

*7-80. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



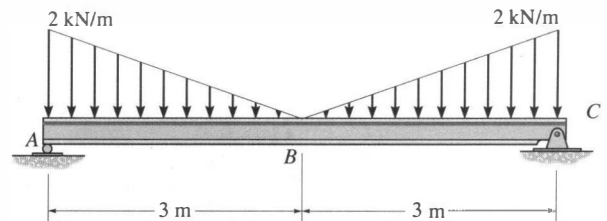
Prob. 7-80

7-81. La viga consiste en dos segmentos conectados mediante un pasador colocado en B. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



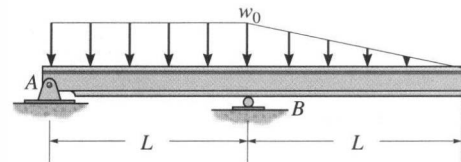
Prob. 7-81

7-82. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



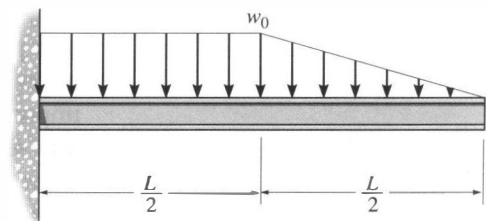
Prob. 7-82

7-83. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



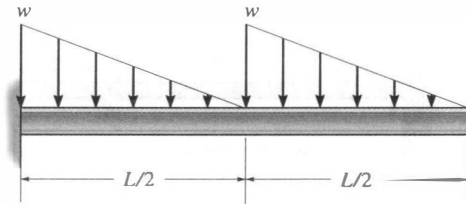
Prob. 7-83

*7-84. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



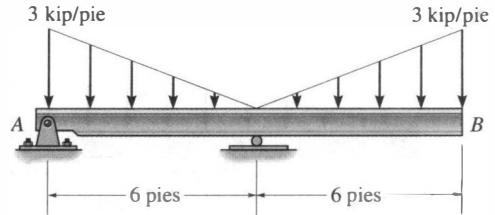
Prob. 7-84

7-85. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



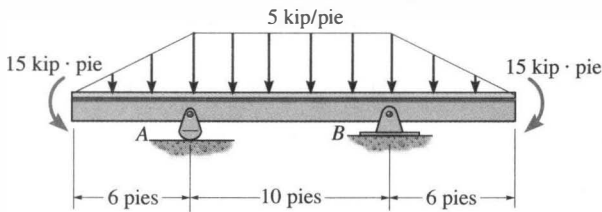
Prob. 7-85

7-87. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



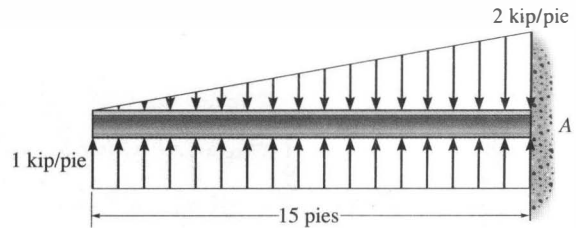
Prob. 7-87

7-86. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



Prob. 7-86

*7-88. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



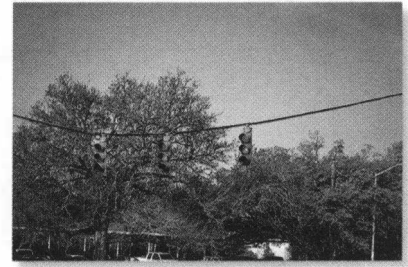
Prob. 7-88

*7.4 Cables

Los cables y las cadenas flexibles a menudo son usados en estructuras ingenieriles para soportar y transmitir cargas de un miembro a otro. Cuando se utilizan para soportar puentes colgantes y ruedas de tranvía, los cables constituyen el elemento principal de carga de la estructura. En el análisis de fuerzas de tales sistemas, el peso del cable puede ser ignorado por ser a menudo pequeño comparado con la carga que lleva. Por otra parte, cuando los cables se usan como líneas de transmisión y retenidas para antenas de radio y grúas, el peso del cable puede llegar a ser importante y debe ser incluido en el análisis estructural. En el análisis que se presenta en seguida serán considerados tres casos: (1) un cable sometido a cargas concentradas; (2) un cable sometido a una carga distribuida, y (3) un cable sometido a su propio peso. Independientemente de qué condiciones de carga estén presentes, siempre que la carga sea coplanar con el cable, los requisitos de equilibrio son formulados de manera idéntica.

Al derivar las relaciones necesarias entre la fuerza en el cable y su pendiente, formularemos la hipótesis de que el cable es *perfectamente flexible e inextensible*. Debido a su flexibilidad, el cable no ofrece resistencia a la flexión, y por tanto, la fuerza de tensión que actúa en él es siempre tangente en puntos localizados a lo largo de su longitud. Por ser inextensible, el cable tiene una longitud constante antes y después de aplicarse la carga. Como resultado, una vez aplicada la carga, la geometría del cable permanece fija, y el cable o segmento de él pueden ser tratados como un cuerpo rígido.

Cables sometidos a cargas concentradas. Cuando un cable de peso insignificante soporta varias cargas concentradas, toma la forma de varios segmentos de línea recta, cada uno de los cuales está sometido a una fuerza de tensión constante. Por ejemplo, considere el cable mostrado en la figura 7-20, donde las distancias h , L_1 , L_2 y L_3 y las cargas P_1 y P_2 son conocidas. El problema aquí es determinar las *nueve incógnitas* que constituyen la tensión en cada uno de los *tres* segmentos, las *cuatro* componentes de reacción en A y B , y las flechas y_C y y_D en los dos puntos C y D . Para la solución podemos escribir *dos* ecuaciones de equilibrio de fuerzas en cada uno de los puntos A , B , C y D . Esto resulta en un total de *ocho ecuaciones*.^{*} Para completar la solución, será necesario saber algo sobre la geometría del cable para obtener la necesaria novena ecuación. Por ejemplo, si la *longitud L* total del cable es especificada, entonces se puede usar el teorema de Pitágoras para relacionar cada una de las tres longitudes segmentales, escritas en términos de h , y_C , y_D , L_1 , L_2 y L_3 , con la longitud total L . Desafortunadamente, este tipo de problemas no puede ser resuelto fácilmente a mano. Sin embargo, otra posibilidad es especificar una de las flechas, y_C o y_D , en vez de la longitud del cable. Haciéndolo así, las ecuaciones de equilibrio son entonces suficientes para obtener las fuerzas desconocidas y la flecha restante. Una vez obtenida la flecha en cada punto de carga, la longitud del cable puede determinarse mediante trigonometría. El siguiente ejemplo ilustra un procedimiento útil para efectuar el análisis por equilibrio para un problema de este tipo.



Cada uno de los segmentos de cable permanece aproximadamente recto cuando soportan el peso de estos semáforos.

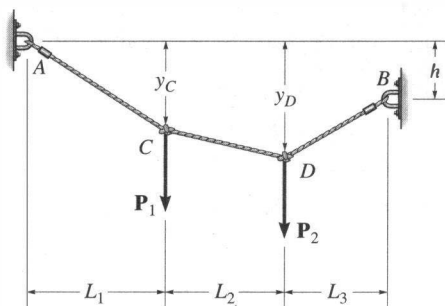


Fig. 7-20

^{*}Como se mostrará en el siguiente ejemplo, las ocho ecuaciones de equilibrio pueden escribirse *también* para todo el cable, o cualquier parte de él. Pero *no más* de *ocho* ecuaciones están disponibles.

EJEMPLO 7.13

Determine la tensión en cada segmento del cable mostrado en la figura 7-21a.

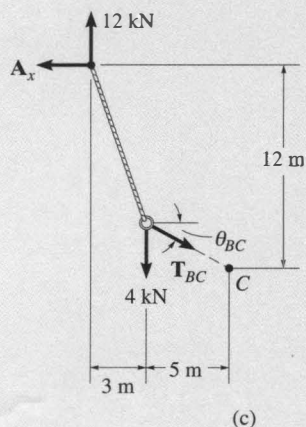
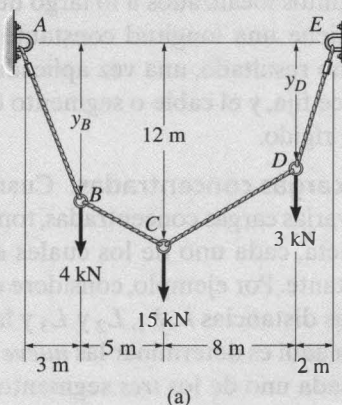
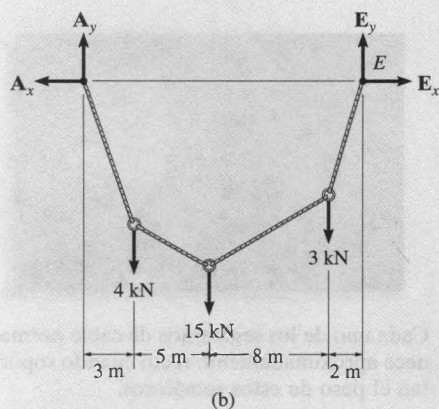


Fig. 7-21

Solución

Por inspección, hay cuatro reacciones externas desconocidas (A_x , A_y , E_x y E_y) y cuatro tensiones desconocidas en el cable, una en cada segmento. Esas ocho incógnitas junto con las dos flechas desconocidas y_B y y_D pueden ser determinadas a partir de diez ecuaciones de equilibrio disponibles. Un método consiste en aplicar esas ecuaciones como equilibrio de fuerzas ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$) a cada uno de los cinco puntos, de A a E. Sin embargo, aquí usaremos un enfoque más directo.

Considere el diagrama de cuerpo libre para todo el cable, figura 7-21b. Entonces,

$$\begin{aligned} \pm \rightarrow \Sigma F_x = 0; & \quad -A_x + E_x = 0 \\ \downarrow + \Sigma M_E = 0; & \quad -A_y(18\text{ m}) + 4\text{ kN}(15\text{ m}) + 15\text{ kN}(10\text{ m}) + 3\text{ kN}(2\text{ m}) = 0 \\ & \quad A_y = 12\text{ kN} \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; & \quad 12\text{ kN} - 4\text{ kN} - 15\text{ kN} - 3\text{ kN} + E_y = 0 \\ & \quad E_y = 10\text{ kN} \end{aligned}$$

Como la flecha $y_C = 12\text{ m}$ es conocida, consideraremos ahora la sección situada más a la izquierda, la cual corta al cable BC, figura 7-21c.

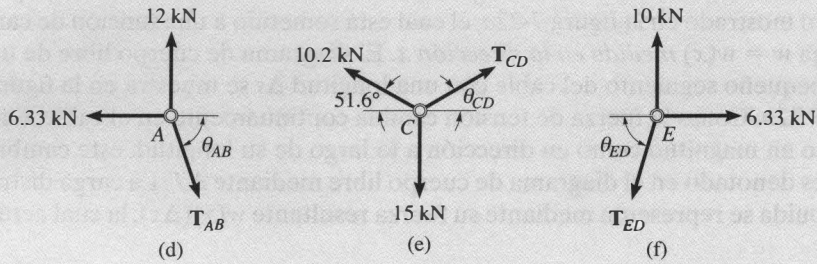
$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_C = 0; & \quad A_x(12\text{ m}) - 12\text{ kN}(8\text{ m}) + 4\text{ kN}(5\text{ m}) = 0 \\ & \quad A_x = E_x = 6.33\text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pm \rightarrow \Sigma F_x = 0; & \quad T_{BC} \cos \theta_{BC} - 6.33\text{ kN} = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; & \quad 12\text{ kN} - 4\text{ kN} - T_{BC} \sin \theta_{BC} = 0 \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \theta_{BC} &= 51.6^\circ \\ T_{BC} &= 10.2\text{ kN} \end{aligned}$$

Resp.



Procediendo ahora al análisis del equilibrio de los puntos A , C y E en secuencia, tenemos

Punto A. (Figura 7-21d)

$$\begin{aligned} \pm \rightarrow \Sigma F_x = 0; & \quad T_{AB} \cos \theta_{AB} - 6.33 \text{ kN} = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; & \quad -T_{AB} \sin \theta_{AB} + 12 \text{ kN} = 0 \\ & \quad \theta_{AB} = 62.2^\circ \\ & \quad T_{AB} = 13.6 \text{ kN} \end{aligned}$$

Resp.

Punto C. (Figura 7-21e)

$$\begin{aligned} \pm \rightarrow \Sigma F_x = 0; & \quad T_{CD} \cos \theta_{CD} - 10.2 \cos 51.6^\circ \text{ kN} = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; & \quad T_{CD} \sin \theta_{CD} + 10.2 \sin 51.6^\circ \text{ kN} - 15 \text{ kN} = 0 \\ & \quad \theta_{CD} = 47.9^\circ \\ & \quad T_{CD} = 9.44 \text{ kN} \end{aligned}$$

Resp.

Punto E. (Figura 7-21f)

$$\begin{aligned} \pm \rightarrow \Sigma F_x = 0; & \quad 6.33 \text{ kN} - T_{ED} \cos \theta_{ED} = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; & \quad 10 \text{ kN} - T_{ED} \sin \theta_{ED} = 0 \\ & \quad \theta_{ED} = 57.7^\circ \\ & \quad T_{ED} = 11.8 \text{ kN} \end{aligned}$$

Resp.

Por comparación, vemos que la tensión máxima en el cable está en el segmento AB ya que este segmento tiene la pendiente (θ) más grande, y se requiere que para cualquier segmento izquierdo de cable la componente horizontal $T \cos \theta = A_x$ (una constante). Además, como los ángulos de pendiente que los segmentos del cable forman con la horizontal han sido determinados, es posible encontrar las flechas y_B y y_D , figura 7-21a, usando trigonometría.

Cable sometido a una carga distribuida. Considere el cable sin peso mostrado en la figura 7-22a, el cual está sometido a una función de carga $w = w(x)$ medida en la dirección x . El diagrama de cuerpo libre de un pequeño segmento del cable con una longitud Δs se muestra en la figura 7-22b. Como la fuerza de tensión cambia continuamente en el cable, tanto en magnitud como en dirección a lo largo de su longitud, este cambio es denotado en el diagrama de cuerpo libre mediante ΔT . La carga distribuida se representa mediante su fuerza resultante $w(x)(\Delta x)$, la cual actúa

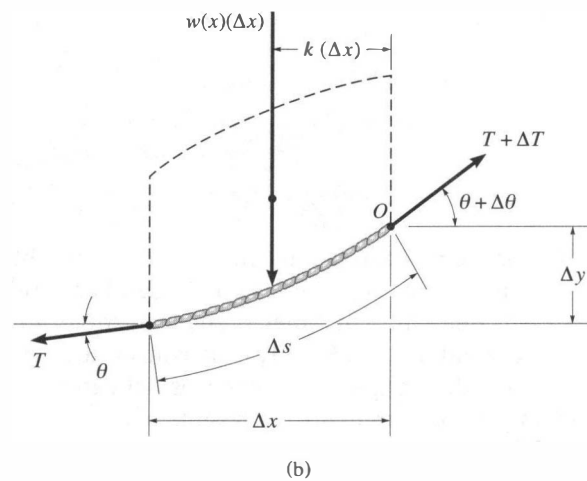
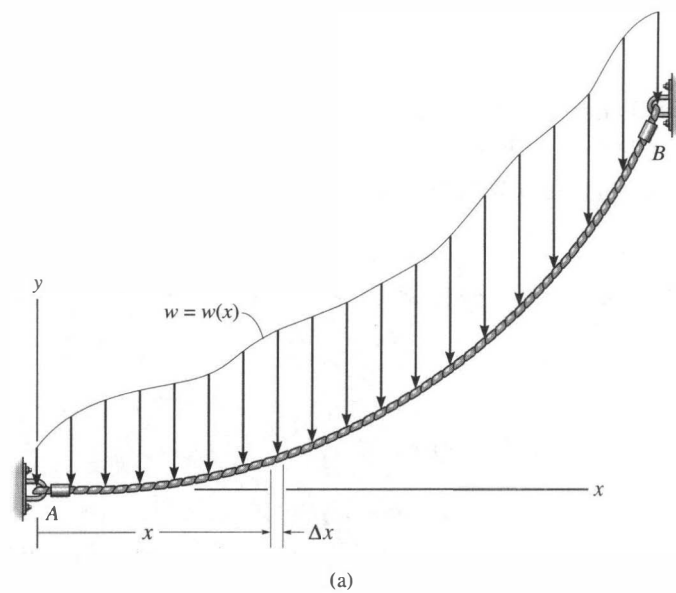


Fig. 7-22

a una distancia fraccional $k(\Delta x)$ del punto O , donde $0 < k < 1$. Aplicando las ecuaciones de equilibrio resulta

$$\begin{aligned} \pm \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & -T \cos \theta + (T + \Delta T) \cos(\theta + \Delta\theta) &= 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y &= 0; & -T \sin \theta - w(x)(\Delta x) + (T + \Delta T) \sin(\theta + \Delta\theta) &= 0 \\ \downarrow + \Sigma M_O &= 0; & w(x)(\Delta x)k(\Delta x) - T \cos \theta \Delta y + T \sin \theta \Delta x &= 0 \end{aligned}$$

Dividiendo cada una de esas ecuaciones entre Δx y tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, y por tanto, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta\theta \rightarrow 0$, y $\Delta T \rightarrow 0$, obtenemos

$$\frac{d(T \cos \theta)}{dx} = 0 \quad (7-7)$$

$$\frac{d(T \sin \theta)}{dx} - w(x) = 0 \quad (7-8)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta \quad (7-9)$$

Integrando la ecuación 7-7, tenemos

$$T \cos \theta = \text{constante} = F_H \quad (7-10)$$

Aquí F_H representa la componente horizontal de la fuerza de tensión en cualquier punto a lo largo del cable.

Integrando la ecuación 7-8 resulta

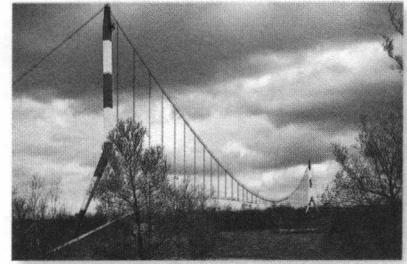
$$T \sin \theta = \int w(x) dx \quad (7-11)$$

Dividiendo la ecuación 7-11 entre la ecuación 7-10 se elimina T . Luego, usando la ecuación 7-9, podemos obtener la pendiente

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H} \int w(x) dx$$

Efectuando una segunda integración resulta

$$y = \frac{1}{F_H} \int \left(\int w(x) dx \right) dx \quad (7-12)$$

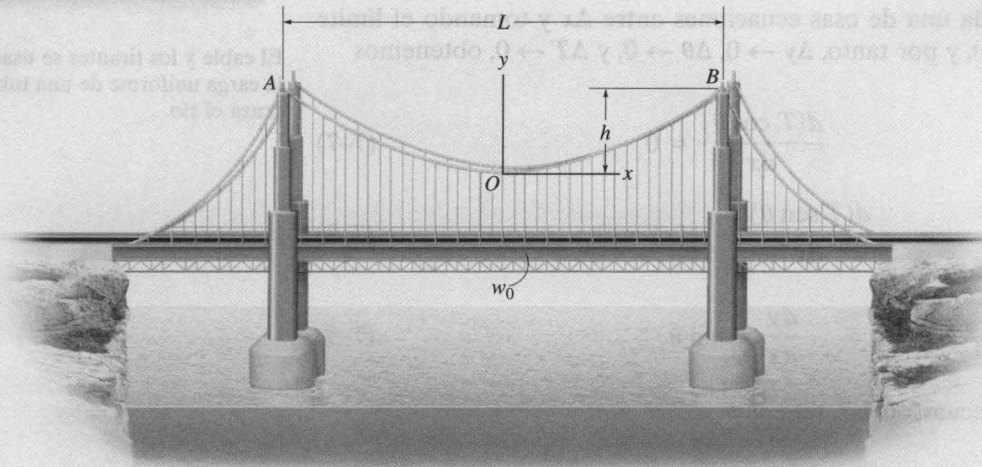


El cable y los tirantes se usan para soportar la carga uniforme de una tubería de gas que cruza el río.

Esta ecuación se usa para determinar la curva para el cable, $y = f(x)$. La componente horizontal de fuerza F_H y las dos constantes, digamos C_1 y C_2 , que resultan de la integración son determinadas aplicando las condiciones de frontera para el cable.

EJEMPLO 7.14

El cable de un puente colgante soporta la mitad de la superficie uniforme del camino que se localiza entre las dos columnas ubicadas en A y B , como se muestra en la figura 7-23a. Si esta carga distribuida es w_0 , determine la fuerza máxima desarrollada en el cable y la longitud requerida de éste. La longitud del claro L y la flecha h son conocidas.



(a)

Fig. 7-23

Solución

Podemos determinar las incógnitas en el problema encontrando primero la curva que define la forma del cable mediante la ecuación 7-12. Por razones de simetría, el origen de coordenadas ha sido colocado en el centro del cable. Observando que $w(x) = w_0$, tenemos

$$y = \frac{1}{F_H} \int \left(\int w_0 dx \right) dx$$

Efectuando las dos integraciones resulta

$$y = \frac{1}{F_H} \left(\frac{w_0 x^2}{2} + C_1 x + C_2 \right) \quad (1)$$

Las constantes de integración pueden ser determinadas aplicando las condiciones de frontera $y = 0$ en $x = 0$ y $dy/dx = 0$ en $x = 0$. Sustituyendo en la ecuación 1 resulta $C_1 = C_2 = 0$. La curva está dada entonces por

$$y = \frac{w_0}{2F_H} x^2 \quad (2)$$

Ésta es la ecuación de una *parábola*. La constante F_H puede ser obtenida aplicando la condición de frontera $y = h$ en $x = L/2$. Así,

$$F_H = \frac{w_0 L^2}{8h} \quad (3)$$

Por tanto, la ecuación 2 es entonces

$$y = \frac{4h}{L^2} x^2 \quad (4)$$

Como F_H es conocida, la tensión en el cable puede ser determinada usando la ecuación 7-10, escrita como $T = F_H / \cos \theta$. Para $0 \leq \theta < \pi/2$, la tensión máxima ocurrirá cuando θ sea *máximo*, es decir, en el punto B , figura 7-23a. A partir de la ecuación 2, la pendiente en este punto es

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L/2} = \tan \theta_{\text{máx}} = \left. \frac{w_0}{F_H} x \right|_{x=L/2}$$

o bien,

$$\theta_{\text{máx}} = \tan^{-1} \left(\frac{w_0 L}{2F_H} \right) \quad (5)$$

Por tanto,

$$T_{\text{máx}} = \frac{F_H}{\cos(\theta_{\text{máx}})} \quad (6)$$

Usando la relación triangular mostrada en la figura 7-23b, que se basa en la ecuación 5, la ecuación 6 puede escribirse como

$$T_{\text{máx}} = \frac{\sqrt{4F_H^2 + w_0^2 L^2}}{2}$$

Sustituyendo la ecuación 3 en la ecuación anterior resulta

$$T_{\text{máx}} = \frac{w_0 L}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{L}{4h} \right)^2} \quad \text{Resp.}$$

Para un segmento de longitud diferencial de cable ds , podemos escribir

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

Por tanto, la longitud total del cable, \mathcal{L} , puede ser determinada por integración. Usando la ecuación 4, tenemos

$$\mathcal{L} = \int ds = 2 \int_0^{L/2} \sqrt{1 + \left(\frac{8h}{L^2} x \right)^2} dx \quad (7)$$

La integración resulta en

$$\mathcal{L} = \frac{L}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{4h}{L} \right)^2} + \frac{L}{4h} \operatorname{senh}^{-1} \left(\frac{4h}{L} \right) \right] \quad \text{Resp.}$$

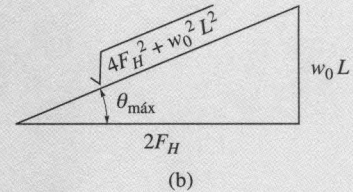
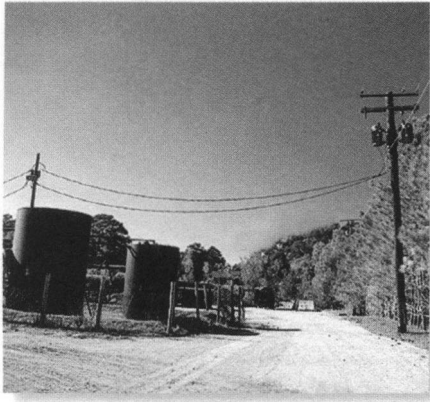


Fig. 7-23



Con el tiempo, las fuerzas que los cables ejercen sobre este poste de teléfonos han ocasionado que éste se incline. Se requiere un contraventeo apropiado.

Cable sometido a su propio peso. Cuando el peso del cable es importante en el análisis de fuerzas, la función de carga a lo largo del cable se vuelve una función de la longitud de arco s en vez de la longitud proyectada x . Una función de carga generalizada $w = w(s)$ actuando a lo largo del cable se muestra en la figura 7-24a. El diagrama de cuerpo libre para un segmento del cable aparece en la figura 7-24b. Aplicando las ecuaciones de equilibrio al sistema de fuerzas presentado en este diagrama, se obtienen relaciones idénticas a las dadas por las ecuaciones 7-7, 7-8 y 7-9, pero con ds reemplazando a dx . Por tanto, puede mostrarse que

$$T \cos \theta = F_H$$

$$T \sin \theta = \int w(s) ds \quad (7-13)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H} \int w(s) ds \quad (7-14)$$

Para efectuar una integración directa de la ecuación 7-14, es necesario reemplazar dy/dx por ds/dx . Como

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1}$$

Por tanto,

$$\frac{ds}{dx} = \left\{ 1 + \frac{1}{F_H^2} \left(\int w(s) ds \right)^2 \right\}^{1/2}$$

Separando las variables e integrando resulta

$$x = \int \frac{ds}{\left\{ 1 + \frac{1}{F_H^2} \left(\int w(s) ds \right)^2 \right\}^{1/2}} \quad (7-15)$$

Las dos constantes de integración, digamos C_1 y C_2 , se encuentran al aplicar las condiciones de frontera del cable.

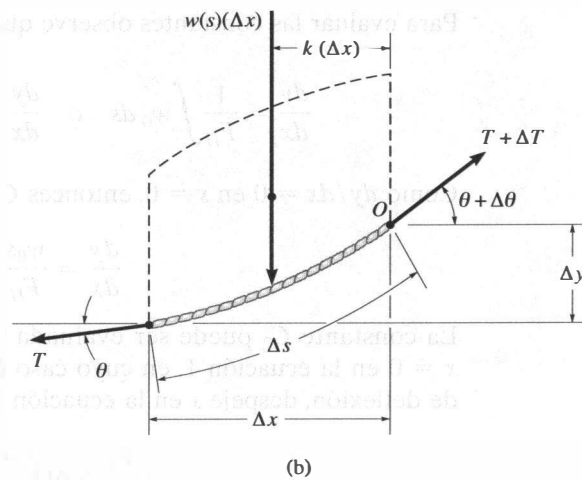
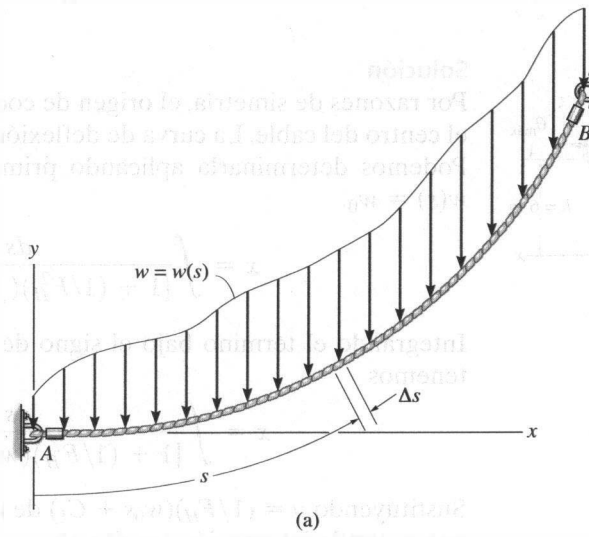


Fig. 7-24

EJEMPLO 7.15

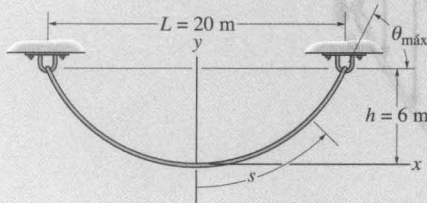


Fig. 7-25

Determine la curva de deflexión, la longitud y la tensión máxima en el cable uniforme mostrado en la figura 7-25. El cable pesa $w_0 = 5$ N/m.

Solución

Por razones de simetría, el origen de coordenadas se ha localizado en el centro del cable. La curva de deflexión es expresada como $y = f(x)$. Podemos determinarla aplicando primero la ecuación 7-15, donde $w(s) = w_0$.

$$x = \int \frac{ds}{[1 + (1/F_H^2)(\int w_0 ds)^2]^{1/2}}$$

Integrando el término bajo el signo de integral en el denominador, tenemos

$$x = \int \frac{ds}{[1 + (1/F_H^2)(w_0 s + C_1)^2]^{1/2}}$$

Sustituyendo $u = (1/F_H)(w_0 s + C_1)$ de manera que $du = (w_0/F_H) ds$, una segunda integración resulta en

$$x = \frac{F_H}{w_0} (\sinh^{-1} u + C_2)$$

o bien,

$$x = \frac{F_H}{w_0} \left\{ \sinh^{-1} \left[\frac{1}{F_H} (w_0 s + C_1) \right] + C_2 \right\} \quad (1)$$

Para evaluar las constantes observe que, a partir de la ecuación 7-14,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H} \int w_0 ds \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H} (w_0 s + C_1)$$

Como $dy/dx = 0$ en $s = 0$, entonces $C_1 = 0$. Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w_0 s}{F_H} \quad (2)$$

La constante C_2 puede ser evaluada usando la condición $s = 0$ en $x = 0$ en la ecuación 1, en cuyo caso $C_2 = 0$. Para obtener la curva de deflexión, despeje s en la ecuación 1, lo que resulta en

$$s = \frac{F_H}{w_0} \sinh \left(\frac{w_0}{F_H} x \right) \quad (3)$$

Ahora sustituya en la ecuación 2, en cuyo caso

$$\frac{dy}{dx} = \sinh \left(\frac{w_0}{F_H} x \right)$$

Por tanto,

$$y = \frac{F_H}{w_0} \cosh\left(\frac{w_0}{F_H} x\right) + C_3 \quad (4)$$

Si se aplica la condición de frontera $y = 0$ en $x = 0$, la constante $C_3 = -F_H/w_0$, y entonces la curva de deflexión resulta ser

$$y = \frac{F_H}{w_0} \left[\cosh\left(\frac{w_0}{F_H} x\right) - 1 \right]$$

Esta ecuación define la forma de una *curva catenaria*. La constante F_H se obtiene usando la condición de frontera $y = h$ en $x = L/2$, en cuyo caso

$$h = \frac{F_H}{w_0} \left[\cosh\left(\frac{w_0 L}{2F_H}\right) - 1 \right] \quad (5)$$

Como $w_0 = 5 \text{ N/m}$, $h = 6 \text{ m}$, y $L = 20 \text{ m}$, las ecuaciones 4 y 5 toman la forma

$$y = \frac{F_H}{5 \text{ N/m}} \left[\cosh\left(\frac{5 \text{ N/m}}{F_H} x\right) - 1 \right] \quad (6)$$

$$6 \text{ m} = \frac{F_H}{5 \text{ N/m}} \left[\cosh\left(\frac{50 \text{ N}}{F_H}\right) - 1 \right] \quad (7)$$

A partir de la ecuación 7 se puede despejar F_H usando un procedimiento de tanteo. El resultado es

$$F_H = 45.9 \text{ N}$$

Y, por tanto, la curva de deflexión, ecuación 6, resulta ser

$$y = 9.19[\cosh(0.109x) - 1] \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

Usando la ecuación 3 con $x = 10 \text{ m}$, la mitad de la longitud del cable es

$$\frac{l}{2} = \frac{45.9 \text{ N}}{5 \text{ N/m}} \operatorname{senh} \left[\frac{5 \text{ N/m}}{45.9 \text{ N}} (10 \text{ m}) \right] = 12.1 \text{ m}$$

Por consiguiente,

$$l = 24.2 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

Como $T = F_H/\cos \theta$, ecuación 7-13, la tensión máxima ocurre cuando θ es máximo, es decir, en $s = \mathcal{L}/2 = 12.1 \text{ m}$. Usando la ecuación 2 resulta

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{s=12.1 \text{ m}} &= \tan \theta_{\text{máx}} = \frac{5 \text{ N/m}(12.1 \text{ m})}{45.9 \text{ N}} = 1.32 \\ \theta_{\text{máx}} &= 52.8^\circ \end{aligned}$$

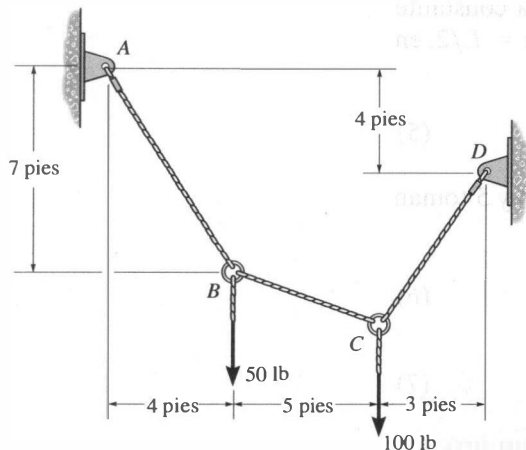
Entonces,

$$T_{\text{máx}} = \frac{F_H}{\cos \theta_{\text{máx}}} = \frac{45.9 \text{ N}}{\cos 52.8^\circ} = 75.9 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

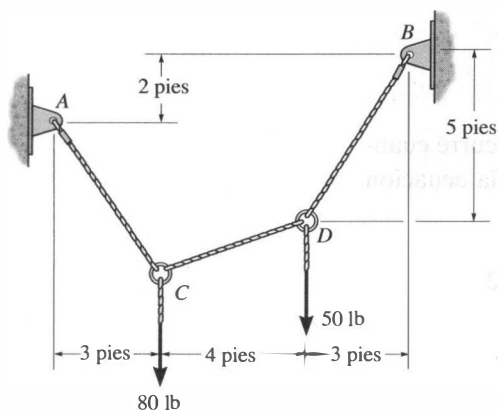
En los siguientes problemas ignore el peso del cable, a menos que se especifique otra cosa.

7-89. Determine la tensión en cada segmento del cable y la longitud total del cable.



Prob. 7-89

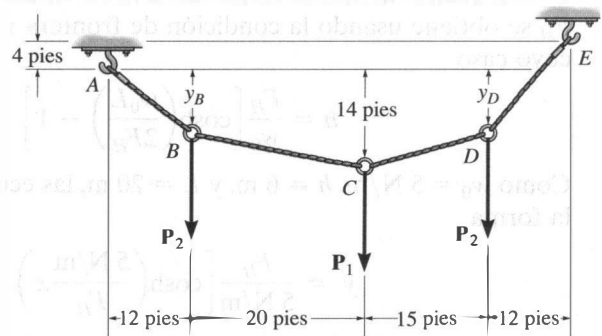
7-90. Determine la tensión en cada segmento del cable y la longitud total del cable.



Prob. 7-90

7-91. El cable soporta las tres cargas mostradas. Determine las flechas y_B y y_D de los puntos B y D . Considere $P_1 = 400$ lb, $P_2 = 250$ lb.

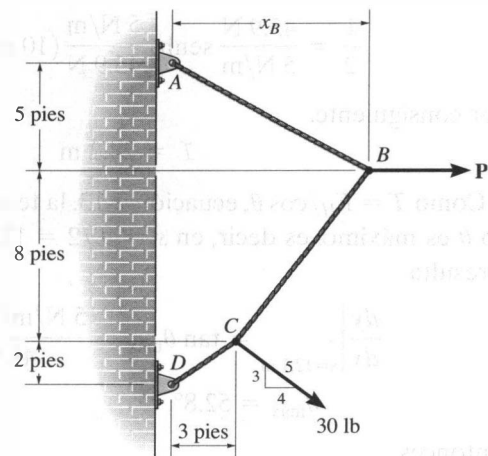
***7-92.** El cable soporta las tres cargas mostradas. Determine la magnitud de P_1 si $P_2 = 300$ lb y $y_B = 8$ pies. También encuentre la flecha y_D .



Probs. 7-91/92

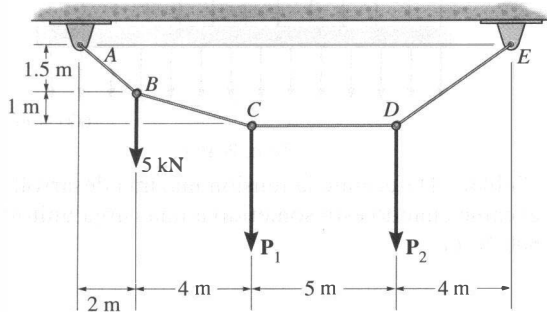
7-93. El cable soporta la carga mostrada. Determine la distancia x_B a que la fuerza en el punto B actúa a partir de A . Considere $P = 40$ lb.

7-94. El cable soporta la carga mostrada. Determine la magnitud de la fuerza horizontal P de modo que $x_B = 6$ pies.



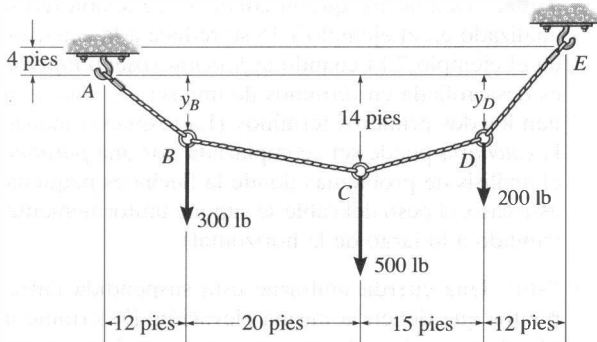
Probs. 7-93/94

7-95. Determine las fuerzas P_1 y P_2 necesarias para mantener el cable en la posición mostrada, esto es, de manera que el segmento CD permanezca horizontal. También, calcule la flecha y_D y la tensión máxima en el cable.



Prob. 7-95

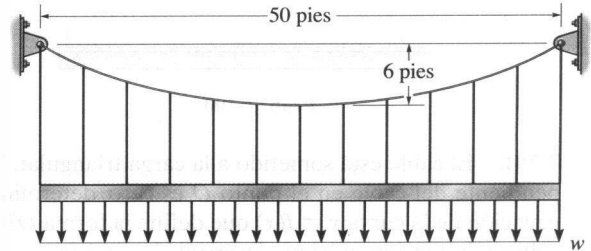
***7-96.** El cable soporta las tres cargas mostradas. Determine las flechas y_B y y_D de los puntos B y D y la tensión en cada segmento del cable.



Prob. 7-96

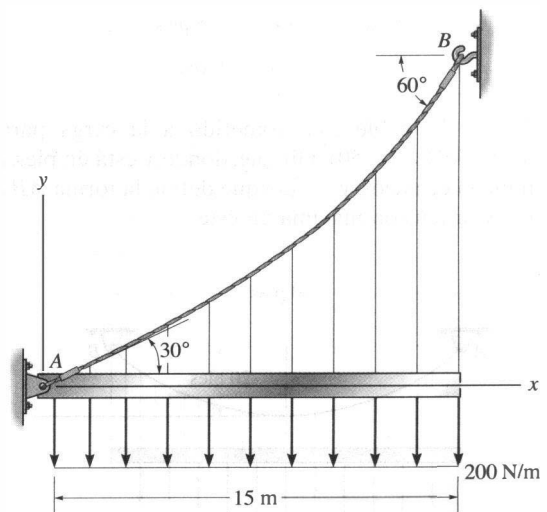
7-97. Determine la máxima carga uniforme w , medida en lb/pie, que el cable puede soportar si tiene capacidad para mantener una tensión máxima de 3000 lb antes de romperse.

7-98. El cable está sometido a una carga uniforme $w = 250$ lb/pie. Determine las tensiones máxima y mínima en el cable.



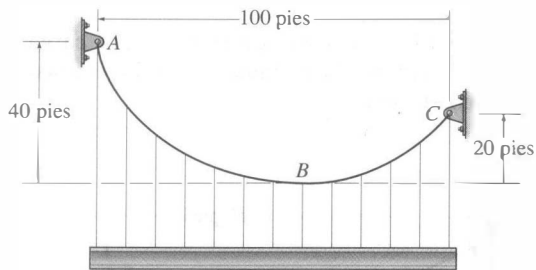
Probs. 7-97/98

7-99. El cable AB está sometido a una carga uniforme de 200 N/m. Si el peso del cable es ignorado y los ángulos de inclinación en los puntos A y B son de 30° y 60° , respectivamente, determine la curva que define la forma del cable y la tensión máxima desarrollada en éste.



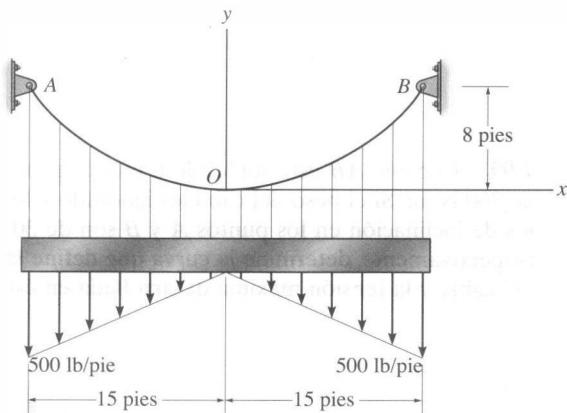
Prob. 7-99

***7-100.** El cable soporta una trabe que pesa 850 lb/pie. Determine la tensión en el cable en los puntos A , B y C .



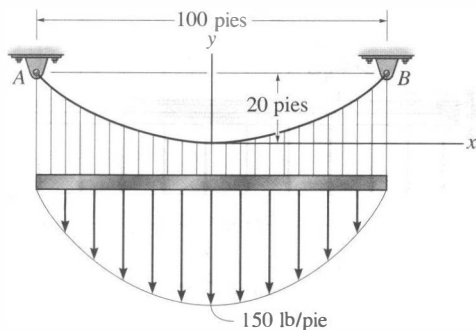
Prob. 7-100

7-101. El cable está sometido a la carga triangular. Si la pendiente del cable en el punto O es cero, determine la ecuación de la curva $y = f(x)$ que define la forma OB del cable, y la tensión máxima desarrollada en éste.



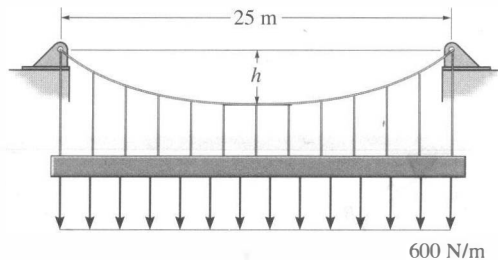
Prob. 7-101

7-102. El cable está sometido a la carga parabólica $w = 150(1 - (x/50)^2)$ lb/pie, donde x está en pies. Determine la ecuación $y = f(x)$ que define la forma AB del cable y la tensión máxima en éste.



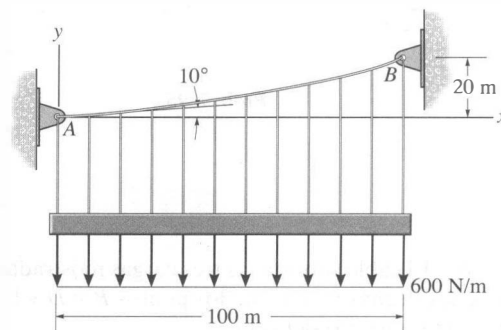
Prob. 7-102

7-103. El cable se romperá cuando la tensión máxima alcance $T_{\text{máx}} = 10$ kN. Determine la flecha h mínima si el cable soporta la carga uniformemente distribuida $w = 600$ N/m.



Prob. 7-103

***7-104.** Determine la tensión máxima desarrollada en el cable cuando está sometido a una carga uniforme de 600 N/m.



Prob. 7-104

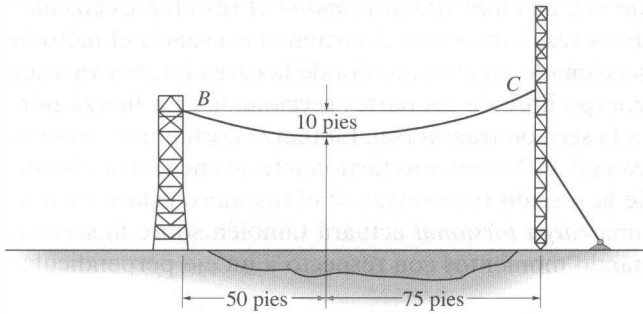
■ 7-105. Un cable tiene un peso de 5 lb/pie. Si salva 300 pies con una flecha de 15 pies, determine su longitud. Los extremos del cable están soportados a la misma elevación.

7-106. Demuestre que la curva de deflexión del cable analizado en el ejemplo 7.15 se reduce a la ecuación (4) en el ejemplo 7.14 cuando la *función coseno hiperbólico* es desarrollada en términos de una serie y sólo se retienen los dos primeros términos. (La respuesta indica que la *catenaria* puede ser reemplazada por una *parábola* en el análisis de problemas donde la flecha es pequeña. En este caso, el peso del cable se supone uniformemente distribuido a lo largo de la horizontal).

7-107. Una cuerda uniforme está suspendida entre dos puntos que tienen la misma elevación. Determine la razón flecha a claro de manera que la tensión máxima en la cuerda sea igual al peso total de ésta.

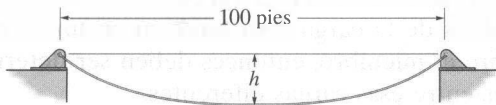
■ *7-108. Un cable tiene un peso de 2 lb/pie. Si puede salvar 100 pies con una flecha de 12 pies, determine su longitud. Los extremos del cable están soportados desde la misma elevación.

7-109. El cable de transmisión con peso de 20 lb/pie cruza el río como se muestra. Determine la fuerza requerida que debe ser aplicada al cable en sus puntos de unión a las torres en *B* y *C*.



Prob. 7-109

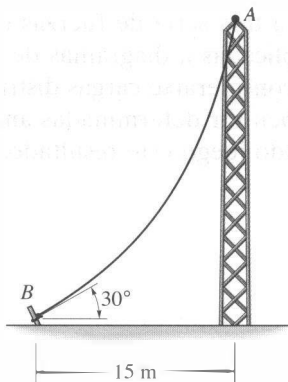
7-110. El cable pesa 6 lb/pie y tiene 150 pies de longitud. Determine la flecha *h* de manera que el cable salve 100 pies. Encuentre la tensión mínima en el cable.



Prob. 7-110

7-111. Una línea (cable) telefónica cuelga entre dos puntos separados por una distancia de 150 pies y que están a la misma elevación. La línea tiene una flecha de 5 pies y el cable un peso de 0.3 lb/pie. Determine la longitud del cable y su tensión máxima.

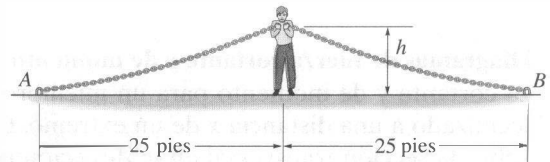
■*7-112. El cable tiene una masa de 0.5 kg/m y 25 m de longitud. Determine las componentes de fuerza vertical y horizontal que el cable ejerce sobre la parte superior de la torre.



Prob. 7-112

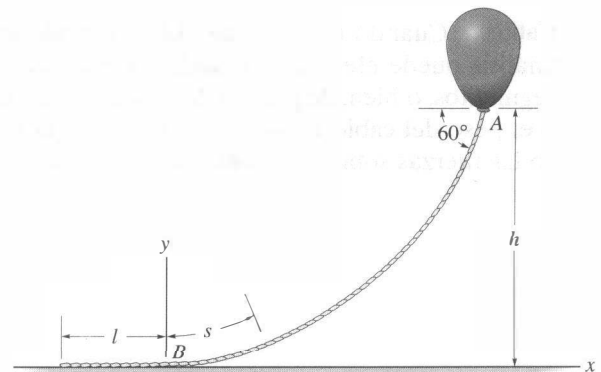
■7-113. Un cable de 50 pies está suspendido entre dos puntos separados por una distancia de 15 pies a la misma elevación. Si la tensión mínima en el cable es de 200 lb, determine su peso total y la tensión máxima que desarrolla.

7-114. El hombre toma la cadena de 52 pies y la mantiene justamente en alto de manera que no toque el suelo. La cadena tiene puntos de unión en *A* y *B* que están a 50 pies uno de otro. Si la cadena tiene un peso de 3 lb/pie y el hombre pesa 150 lb, determine la fuerza que él ejerce sobre el suelo. ¿A qué altura *h* debe levantar la cadena este hombre? *Sugerencia:* Las pendientes en *A* y *B* son cero.



Prob. 7-114

7-115. El globo es mantenido en posición usando una cuerda de 400 pies que pesa 0.8 lb/pie y forma un ángulo de 60° con la horizontal. Si la tensión en la cuerda en el punto *A* es de 150 lb, determine la longitud *l* de la cuerda que se encuentra en el suelo y la altura *h*. *Sugerencia:* Establezca el sistema coordenado en *B* como se muestra.



Prob. 7-115

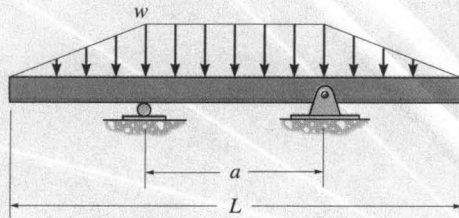
REPASO DEL CAPÍTULO

- Cargas internas.** Si un sistema coplanar de fuerzas actúa sobre un miembro, entonces, en general, actuarán una *fuerza interna normal* N , una *fuerza cortante* V , y un *momento flexionante* M resultantes en cualquier sección transversal a lo largo del miembro. Esas resultantes son determinadas usando el método de las secciones. Para encontrarlas, el miembro es seccionado en el punto donde la carga interna va a ser determinada. Se dibuja entonces un diagrama de cuerpo libre de las partes seccionadas. La fuerza normal es determinada sumando las fuerzas normales a la sección transversal. La fuerza cortante se encuentra al sumar las fuerzas tangentes a la sección transversal, y el momento flexionante se encuentra sumando momentos con respecto al centroide del área de la sección transversal. Si el miembro está sometido a una carga tridimensional, entonces, en general, una *carga torsional* actuará también sobre la sección transversal. Esta carga puede ser determinada sumando momentos con respecto a un eje perpendicular a la sección transversal que pasa por su centroide.
- Diagramas de fuerza cortante y de momento como funciones de x .** Para construir los diagramas de fuerza cortante y de momento para un miembro, es necesario seccionar el miembro en un punto arbitrario, localizado a una distancia x de un extremo. La fuerza cortante y el momento desconocidos son indicados sobre la sección transversal en la dirección positiva de acuerdo con la convención de signos establecida. La aplicación de las ecuaciones de equilibrio darán esas cargas como una función de x , la cual puede entonces ser graficada. Si la carga externa consiste en cambios de la carga distribuida, o en una serie de fuerzas concentradas y momentos de par que actúan sobre el miembro, entonces deben ser determinadas expresiones diferentes para V y M dentro de regiones entre esas cargas diferentes.
- Métodos gráficos para establecer los diagramas de fuerza cortante y momento.** Es posible graficar rápidamente los diagramas de fuerza cortante y momento usando relaciones diferenciales que existen entre la carga distribuida w y V y M . La pendiente del diagrama de fuerza cortante es igual a la carga distribuida en cualquier punto, $dV/dx = -w$; la pendiente del diagrama de momento es igual a la fuerza cortante en cualquier punto, $V = dM/dx$. También, el cambio de fuerza cortante entre dos puntos cualesquiera es igual al área bajo la carga distribuida entre los puntos, $\Delta V = \int w dx$, y el cambio en momento es igual al área bajo el diagrama de fuerza cortante entre los puntos, $\Delta M = \int V dx$.
- Cables.** Cuando un cable flexible e inextensible está sometido a una serie de fuerzas concentradas, su análisis puede efectuarse usando las ecuaciones de equilibrio aplicadas a diagramas de cuerpo libre de segmentos, o bien, de puntos de aplicación de la carga. Si deben considerarse cargas distribuidas externas o el peso del cable, entonces las fuerzas y la forma del cable deben ser determinadas analizando primero las fuerzas sobre un segmento diferencial del cable e integrando luego este resultado.

PROBLEMAS DE REPASO

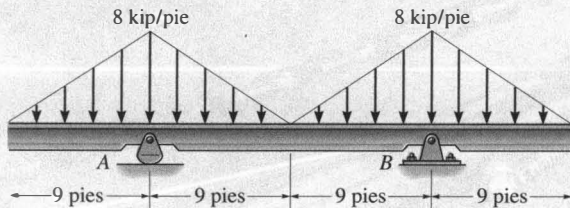
*7-116. Un cable de 100 lb está unido entre dos puntos separados por una distancia de 50 pies con elevaciones iguales. Si la tensión máxima desarrollada en el cable es de 75 lb, determine la longitud del cable y la flecha.

7-117. Determine la distancia a entre los soportes en términos de la longitud L de la viga de manera que el momento en la viga *simétrica* sea cero en el centro de la viga.



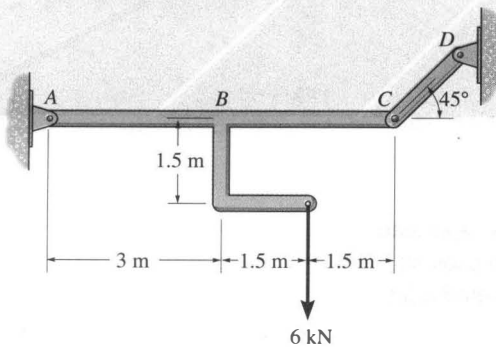
Prob. 7-117

7-118. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento para la viga.



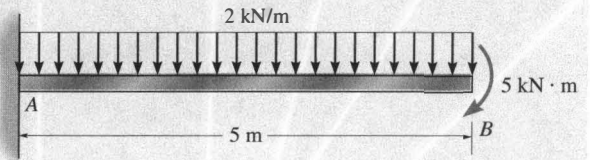
Prob. 7-118

7-119. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento para la viga ABC .



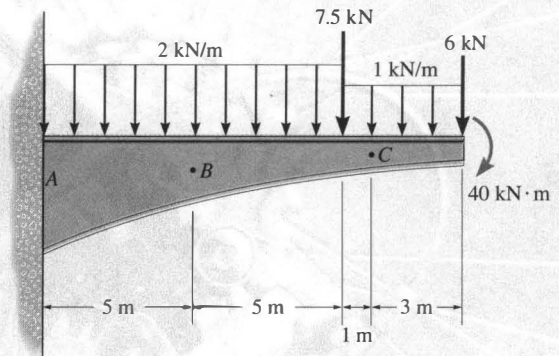
Prob. 7-119

*7-120. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento para la viga.



Prob. 7-120

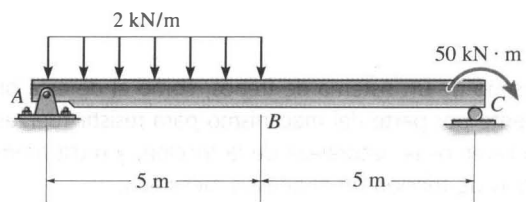
7-121. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en los puntos B y C de la viga.



Prob. 7-121

7-122. Una cadena está suspendida entre puntos a la misma elevación y separados por una distancia de 60 pies. Si la cadena tiene un peso de 0.5 lb/pie y la flecha es de 3 pies, determine la tensión máxima en la cadena.

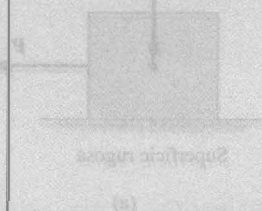
7-123. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento para la viga.



Prob. 7-123

CAPÍTULO 8

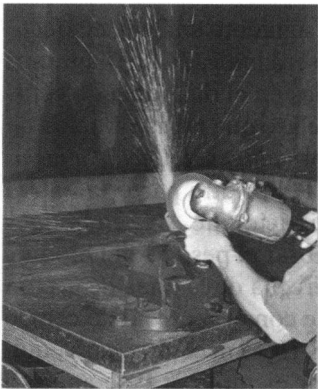
Fricción



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Presentar el concepto de fricción seca y mostrar cómo analizar el equilibrio de cuerpos rígidos sometidos a esta fuerza.
- Presentar aplicaciones específicas del análisis de la fuerza friccional en cuñas, tornillos, bandas y chumaceras.
- Estudiar el concepto de la resistencia al rodamiento.

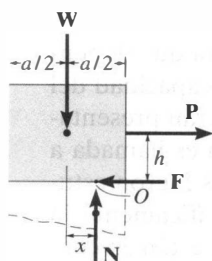
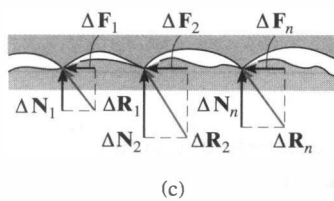
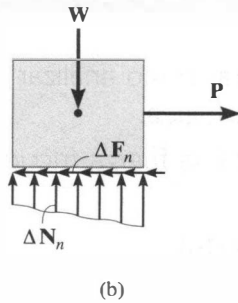
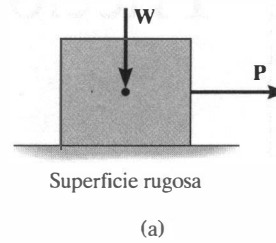
8.1 Características de la fricción seca



El calor que genera la acción abrasiva de la fricción puede ser evidenciado al usar esta esmeriladora para afilar una hoja metálica.

La *fricción* puede ser definida como una fuerza resistente que actúa sobre un cuerpo e impide o retarda el deslizamiento del cuerpo con relación a un segundo cuerpo o superficie con los cuales esté en contacto. La fuerza de fricción actúa siempre *tangencialmente* a la superficie en los puntos de contacto con otros cuerpos, y está dirigida en sentido opuesto al movimiento posible o existente del cuerpo con respecto a esos puntos.

En general, pueden ocurrir dos tipos de fricción entre superficies. La *fricción fluida* existe cuando las superficies en contacto están separadas por una película de fluido (gas o líquido). La naturaleza de la fricción fluida se estudia en la mecánica de fluidos, ya que depende del conocimiento de la velocidad del fluido y de la capacidad del fluido de resistir fuerzas cortantes. En este libro sólo serán presentados los efectos de la *fricción seca*. Este tipo de fricción es llamada a menudo *fricción de Coulomb*, ya que sus características fueron estudiadas extensamente por C. A. Coulomb en 1781. Específicamente, la fricción seca ocurre entre las superficies de cuerpos que están en contacto en ausencia de un fluido lubricante.



Fuerzas resultantes, normal y de fricción

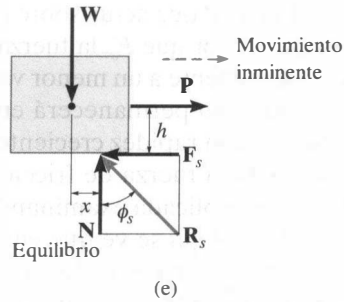
(d)

Fig. 8-1

Teoría de la fricción seca. La teoría de la fricción seca puede explicarse de manera conveniente considerando qué efectos provoca el tirar horizontalmente de un bloque de peso uniforme W que descansa sobre una superficie horizontal rugosa, figura 8-1a. Para obtener un entendimiento pleno de la naturaleza de la fricción, es necesario considerar a las superficies en contacto como *no rígidas, o deformables*. Sin embargo, el resto del bloque será considerado rígido. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre del bloque, figura 8-1b, el piso ejerce una *distribución de fuerza normal* ΔN_n y una *fuerza de fricción* ΔF_n a lo largo de la superficie de contacto. Por equilibrio, las fuerzas normales deben actuar *hacia arriba* para equilibrar el peso W del bloque, y las fuerzas de fricción deben actuar *hacia la izquierda* para prevenir que la fuerza aplicada P mueva el bloque hacia la derecha. Un examen preciso de las superficies en contacto entre el piso y el bloque revela cómo se desarrollan esas fuerzas de fricción y normales, figura 8-1c. Puede verse que existen muchas irregularidades microscópicas entre las dos superficies y, como resultado, son desarrolladas fuerzas reactivas ΔR_n en cada una de las protuberancias.* Esas fuerzas actúan en todos los puntos de contacto y, como se muestra, cada fuerza reactiva contribuye con una componente de fricción ΔF_n y con una componente normal ΔN_n .

Equilibrio. Por razones de simplicidad, en el siguiente análisis, el efecto de las cargas *distribuidas* normal y de fricción será indicado mediante sus *resultantes* N y F , las cuales están representadas en el diagrama de cuerpo libre como se muestra en la figura 8-1d. Es claro que la distribución de ΔF_n en la figura 8-1b indica que F actúa siempre *tangencialmente a la superficie de contacto, opuesta a la dirección de P*. Por otra parte, la fuerza normal N es determinada a partir de la distribución de ΔN_n en la figura 8-1b y está dirigida hacia arriba para equilibrar el peso W del bloque. Observe que N actúa a una distancia x a la derecha de la línea de acción de W , figura 8-1d. Esta ubicación, que coincide con el centroide o centro geométrico del diagrama de carga en la figura 8-1b, es necesaria para equilibrar el “efecto de volteo” causado por P . Por ejemplo, si P se aplica a una altura h desde la superficie, figura 8-1d, entonces el equilibrio por momento con respecto al punto O se satisface si $Wx = Ph$ o $x = Ph/W$. En particular, el bloque estará a punto de *volcarse* si N actúa en la esquina derecha del bloque, es decir, en $x = a/2$.

*Además de las interacciones mecánicas explicadas aquí, por lo que se refiere a un enfoque clásico, un tratamiento detallado de la naturaleza de las fuerzas de fricción también debe incluir los efectos de temperatura, densidad, limpieza y atracción atómica o molecular entre las superficies de contacto. Vea J. Krim, *Scientific American*, octubre de 1996.



Movimiento inminente. En los casos donde h es pequeña o las superficies de contacto son “resbalosas”, la fuerza \mathbf{F} de fricción puede *no* ser lo suficientemente grande como para equilibrar a \mathbf{P} , y en consecuencia, el bloque tenderá a resbalar *antes* que a volcarse. En otras palabras, al ser P incrementada lentamente, F aumenta de modo correspondiente hasta que alcanza un cierto *valor máximo* F_s , llamado *fuerza límite de fricción estática*, figura 8-1e. Cuando este valor es alcanzado, el bloque está en *equilibrio inestable* ya que cualquier incremento adicional en P ocasionará deformaciones y fracturas en los puntos de contacto superficial, y en consecuencia el bloque empezará a moverse. Experimentalmente, ha sido determinado que la fuerza límite de fricción estática F_s es *directamente proporcional* a la fuerza normal resultante N . Esto puede expresarse matemáticamente como

$$F_s = \mu_s N \quad (8-1)$$

donde la constante de proporcionalidad, μ_s , es llamada el *coeficiente de fricción estática*.

Entonces, cuando el bloque está *a punto de deslizarse*, la fuerza normal \mathbf{N} y la fuerza de fricción \mathbf{F}_s se combinan para crear una resultante \mathbf{R}_s , figura 8-1e. El ángulo ϕ_s que \mathbf{R}_s forma con \mathbf{N} se llama *ángulo de fricción estática*. A partir de la figura,

$$\phi_s = \tan^{-1}\left(\frac{F_s}{N}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\mu_s N}{N}\right) = \tan^{-1} \mu_s$$

Valores tabulares de μ_s . En la tabla 8-1 se proporcionan valores típicos de μ_s , los cuales se encuentran en muchos manuales de ingeniería. Aunque por lo general este coeficiente es menor que 1, el lector debe ser consciente de que en algunos casos es posible, como en el caso de aluminio sobre aluminio, que μ_s sea mayor que 1. Desde luego, físicamente esto significa que en este caso la fuerza de fricción es mayor que la correspondiente fuerza normal. Además, debe advertirse que μ_s es adimensional y depende sólo de las características de las dos superficies en contacto. Para cada valor de μ_s está dado un amplio rango de valores ya que los ensayos experimentales fueron hechos bajo condiciones variables de rugosidad y limpieza de las superficies en contacto. Por tanto, en las aplicaciones es importante tener cuidado y buen juicio al seleccionar un coeficiente de fricción para un conjunto dado de condiciones. Cuando se requiere un cálculo más preciso de F_s , el coeficiente de fricción debe ser determinado directamente por medio de un experimento que implique los dos materiales por ser usados.

TABLA 8-1
Valores típicos para μ_s

Materiales en contacto	Coefficiente de fricción estática (μ_s)
Metal sobre hielo	0.03–0.05
Madera sobre madera	0.30–0.70
Cuero sobre madera	0.20–0.50
Cuero sobre metal	0.30–0.60
Aluminio sobre aluminio	1.10–1.70

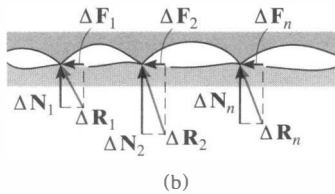
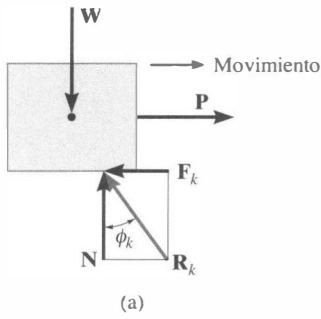


Fig. 8-2

Movimiento. Si la magnitud de P que actúa sobre el bloque es incrementada de manera que resulta mayor que F_s , la fuerza de fricción en las superficies de contacto cae ligeramente a un menor valor F_k , llamado *fuerza de fricción cinética*. El bloque *no* permanecerá en equilibrio ($P > F_k$), sino que empezará a resbalar con rapidez creciente, figura 8-2a. La caída que ocurre en la magnitud de la fuerza de fricción, desde F_s (estática) hasta F_k (cinética), puede ser explicada examinando de nuevo las superficies de contacto, figura 8-2b. Aquí se ve que cuando $P > F_s$, entonces P tiene la capacidad de cortar los picos en las superficies de contacto y ocasionar que el bloque se “levante” un tanto de su posición asentada y “viaje” por encima de esos picos. Una vez que el bloque empieza a deslizarse, altas temperaturas locales en los puntos de contacto causan una momentánea adhesión (soldadura) de esos puntos. El corte continuado de esas soldaduras es el mecanismo dominante que genera la fricción. Como las fuerzas de contacto resultantes ΔR_n están más ligeramente alineadas en la dirección vertical que antes, aportan componentes de fricción *más pequeñas*, ΔF_n , que cuando las irregularidades están trabadas entre sí.

Los experimentos con bloques deslizables indican que la magnitud de la fuerza de fricción resultante F_k es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza normal resultante N . Esto puede ser expresado matemáticamente como

$$F_k = \mu_k N \tag{8-2}$$

Aquí la constante de proporcionalidad, μ_k , se llama *coeficiente de fricción cinética*. Los valores típicos de μ_k son aproximadamente 25 por ciento *más pequeños* que los dados en la tabla 8-1 para μ_s .

Como se muestra en la figura 8-2a, en este caso, la resultante R_k tiene una línea de acción definida por ϕ_k . Este ángulo se llama *ángulo de fricción cinética*, donde

$$\phi_k = \tan^{-1}\left(\frac{F_k}{N}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\mu_k N}{N}\right) = \tan^{-1} \mu_k$$

Por comparación, $\phi_s \geq \phi_k$.

Los efectos mencionados con respecto a la fricción pueden ser resumidos mediante referencia a la gráfica que aparece en la figura 8-3, la cual muestra la variación de la fuerza de fricción F contra la carga aplicada P . Aquí, la fuerza de fricción está clasificada en tres maneras diferentes: F es una *fuerza de fricción estática* si se mantiene el equilibrio; F es una *fuerza de fricción estática límite* F_s cuando alcanza un valor máximo necesario para mantener el equilibrio; y finalmente, F se llama *fuerza de fricción cinética* F_k cuando el deslizamiento ocurre en la superficie de contacto. Observe también en la gráfica que para valores muy grandes de P o para velocidades altas, debido a los efectos aerodinámicos, F_k e igualmente μ_k empiezan a disminuir.

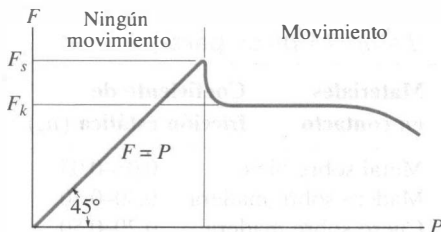


Fig. 8-3

Características de la fricción seca. Como resultado de *experimentos* que son pertinentes a la argumentación anterior, deben establecerse las siguientes reglas aplicables a cuerpos sometidos a fricción seca.

- La fuerza de fricción actúa *tangencialmente* a las superficies de contacto en una dirección *opuesta* al *movimiento relativo* o a la tendencia al movimiento de una superficie con respecto a otra.
- La fuerza de fricción estática máxima F_s que puede ser desarrollada es independiente del área de contacto, siempre que la presión normal no sea ni muy baja ni muy grande como para deformar o aplastar severamente las superficies de contacto de los cuerpos.
- La fuerza de fricción estática máxima es generalmente mayor que la fuerza de fricción cinética para dos superficies de contacto cualesquiera. Sin embargo, si uno de los cuerpos se está moviendo a *velocidad muy baja* sobre la superficie de otro cuerpo, F_k resulta aproximadamente igual a F_s , es decir, $\mu_s \approx \mu_k$.
- Cuando en la superficie de contacto está a *punto de ocurrir el deslizamiento*, la fuerza de fricción estática máxima es proporcional a la fuerza normal, de manera tal que $F_s = \mu_s N$.
- Cuando está *ocurriendo el deslizamiento* en la superficie de contacto, la fuerza de fricción cinética es proporcional a la fuerza normal, de manera tal que $F_k = \mu_k N$.

8.2 Problemas que implican fricción seca

Si un cuerpo rígido está en equilibrio cuando es sometido a un sistema de fuerzas que incluye el efecto de la fricción, el sistema de fuerzas debe satisfacer no sólo las ecuaciones de equilibrio sino *también* las leyes que gobiernan a las fuerzas de fricción.

Tipos de problemas de fricción. En general, en mecánica hay tres tipos de problemas que implican la fricción seca. Estos problemas pueden ser fácilmente clasificados una vez que son trazados los diagramas de cuerpo libre y es identificado el número total de incógnitas y comparado con el número total de ecuaciones de equilibrio disponibles. Cada tipo de problema será explicado a continuación e ilustrado gráficamente con ejemplos. En todos esos casos la geometría y las dimensiones para los problemas se suponen conocidas.

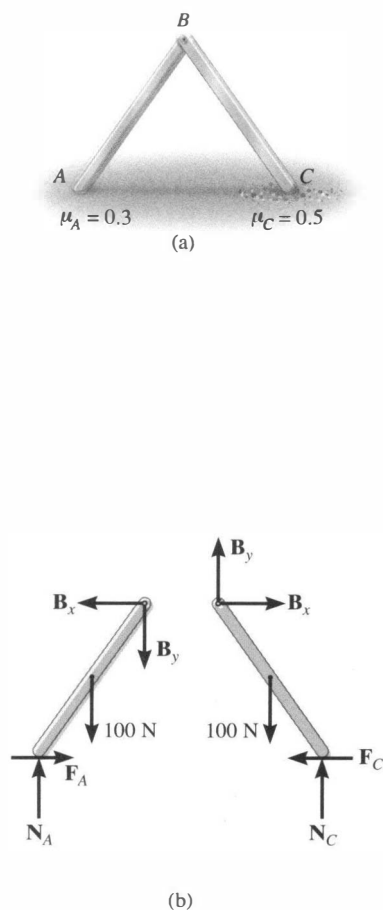


Fig. 8-4

Equilibrio. Los problemas de este tipo son estrictamente problemas de equilibrio que requieren que el *número total de incógnitas sea igual al número total de ecuaciones de equilibrio disponibles*. Sin embargo, una vez que las fuerzas de fricción están determinadas, sus valores numéricos deben ser revisados para garantizar que satisfacen la desigualdad $F \leq \mu_s N$; de otra manera, ocurrirá el deslizamiento y el cuerpo no permanecerá en equilibrio. Un problema de este tipo se muestra en la figura 8-4a. Aquí debemos determinar las fuerzas de fricción en A y C para verificar si la posición de equilibrio del bastidor de dos miembros puede ser mantenida. Si las barras son uniformes y tienen pesos conocidos de 100 N cada una, entonces los diagramas de cuerpo libre son como se muestra en la figura 8-4b. Se tienen seis componentes desconocidas de fuerza que pueden ser determinadas *estrictamente* a partir de las seis ecuaciones de equilibrio (tres para cada miembro). Una vez determinadas F_A , N_A , F_C y N_C , las barras permanecerán en equilibrio si $F_A \leq 0.3N_A$ y $F_C \leq 0.5N_C$ se cumplen.

Movimiento inminente en todos los puntos. En este caso *el número total de incógnitas será igual al número total de ecuaciones de equilibrio disponibles más el número total de ecuaciones de fricción disponibles*, $F = \mu N$. En particular, si el *movimiento es inminente* en los puntos de contacto, entonces $F_s = \mu_s N$; mientras que si el cuerpo se está *deslizándose*, entonces $F_k = \mu_k N$. Por ejemplo, considere el problema de encontrar el ángulo θ más pequeño bajo el cual la barra de 100 N que aparece en la figura 8-5a puede ser recargada contra la pared sin que se deslice. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 8-5b. Aquí se tienen *cinco* incógnitas: F_A , N_A , F_B , N_B , θ . Para la solución, se dispone de *tres* ecuaciones de equilibrio y de *dos* ecuaciones de fricción estática que se aplican en *ambos* puntos de contacto, de manera que $F_A = 0.3N_A$ y $F_B = 0.4N_B$.

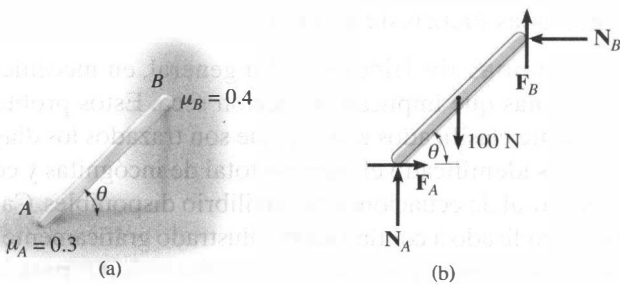
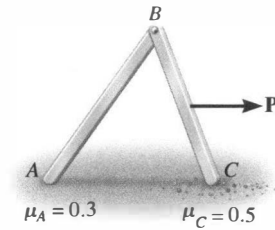
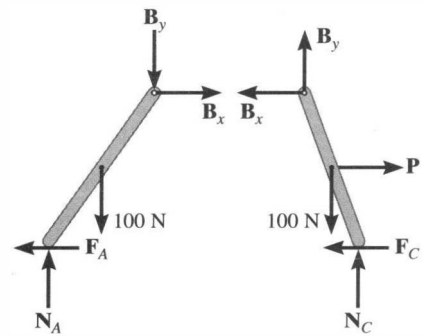


Fig. 8-5

Movimiento inminente en algunos puntos. Aquí el número total de incógnitas será menor que el número de ecuaciones disponibles de equilibrio más el número total de ecuaciones de fricción o ecuaciones de condición para el volteo. En consecuencia, existirán varias posibilidades para que se produzca el movimiento o el movimiento inminente y el problema implicará determinar qué tipo de movimiento ocurrirá realmente. Por ejemplo, considere el bastidor de dos miembros mostrado en la figura 8-6a. En este problema queremos determinar la fuerza horizontal P necesaria para ocasionar el movimiento. Si cada miembro tiene un peso de 100 N, entonces los diagramas de cuerpo libre son como se muestran en la figura 8-6b. Se tienen *siete* incógnitas: $N_A, F_A, N_C, F_C, B_x, B_y, P$. Para encontrar una solución única debemos satisfacer las *seis* ecuaciones de equilibrio (tres para cada miembro) y sólo *una* de dos posibles ecuaciones de fricción estática. Esto significa que conforme P aumenta causará deslizamiento en A y ningún deslizamiento en C , de manera que $F_A = 0.3N_A$ y $F_C \leq 0.5N_C$, o bien deslizamiento en C y ningún deslizamiento en A , en cuyo caso $F_C = 0.5N_C$ y $F_A \leq 0.3N_A$. La situación real puede ser determinada calculando P en cada caso y seleccionando luego el caso para el cual P es *más pequeña*. Si en ambos casos se calcula el *mismo valor* para P , lo que en la práctica sería altamente improbable, entonces el deslizamiento ocurre simultáneamente en ambos puntos; es decir, las *siete incógnitas* satisfacen *ocho ecuaciones*.



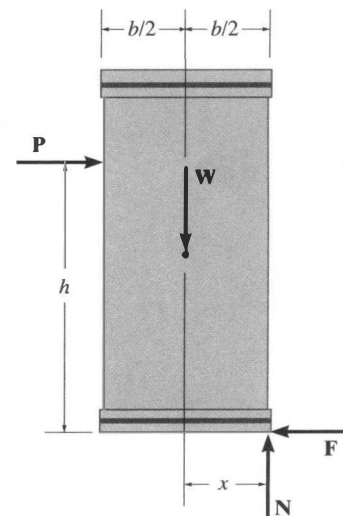
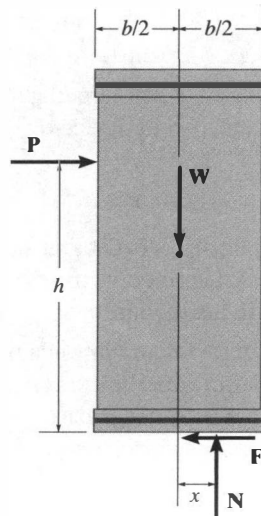
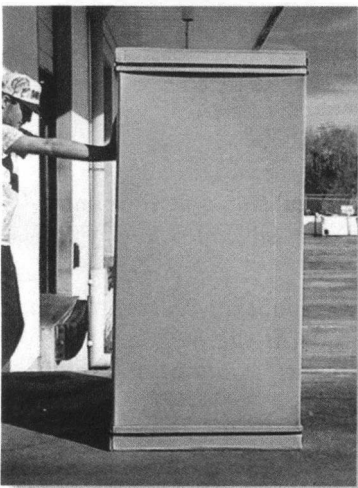
(a)



(b)

Fig. 8-6

Considere que la caja uniforme con peso W y que descansa sobre una superficie rugosa está siendo empujada. Como se muestra en el primer diagrama de cuerpo libre, si la magnitud de P es pequeña, la caja permanecerá en equilibrio. Cuando P aumenta la caja está a punto de deslizarse sobre la superficie ($F = \mu_s W$), o si la superficie es muy rugosa (μ_s grande) entonces la fuerza normal resultante se desplazará a la esquina, $x = b/2$, como se muestra en el segundo diagrama de cuerpo libre, y la caja se volcará. La caja podrá volcarse más fácilmente si P es aplicada a una gran altura h sobre la superficie, o si la caja tiene un ancho b pequeño.



Ecuaciones de equilibrio contra ecuaciones de fricción. Señalamos antes que la fuerza de fricción *siempre* actúa oponiéndose al movimiento relativo o impidiendo el movimiento de un cuerpo sobre su superficie de contacto. Sin embargo, observe que podemos *suponer* el sentido de la fuerza de fricción en problemas que requieren que F sea una “fuerza de equilibrio” y satisfaga la desigualdad $F < \mu_s N$. El sentido correcto se conoce *después* de obtener F a partir de las ecuaciones de equilibrio. Por ejemplo, si F es un escalar negativo, el sentido de \mathbf{F} es el opuesto del que se supuso. Esta conveniencia de *suponer* el sentido de \mathbf{F} es posible porque las ecuaciones de equilibrio igualan a cero las *componentes de vectores* que actúan en la *misma dirección*. Sin embargo, en los casos en que la ecuación de fricción $F = \mu N$ se usa para resolver un problema, la conveniencia de *suponer* el sentido de \mathbf{F} *se pierde*, ya que la ecuación de fricción relaciona sólo las *magnitudes* de dos vectores perpendiculares. En consecuencia, cuando se use la ecuación de fricción para solucionar un problema, en el diagrama de cuerpo libre \mathbf{F} *debe* mostrarse *siempre* actuando con su *sentido correcto*.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Los problemas de equilibrio que implican fricción seca pueden ser resueltos usando el siguiente procedimiento.

Diagramas de cuerpo libre.

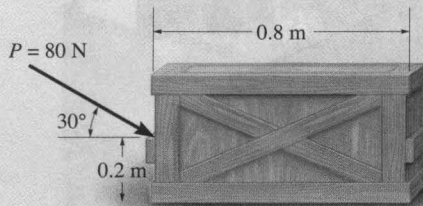
- Trace los diagramas de cuerpo libre necesarios, y a menos que esté indicado en el problema que el movimiento es inminente o que ocurre deslizamiento, muestre *siempre* las fuerzas de fricción como incógnitas; es decir, *no suponga* que $F = \mu N$.
- Determine el número de incógnitas y compárelo con el número de ecuaciones de equilibrio disponibles.
- Si hay más incógnitas que ecuaciones de equilibrio, será necesario aplicar la ecuación de fricción en algunos, si no es que en todos los puntos de contacto para obtener las ecuaciones adicionales necesarias para una solución completa.
- Si va a usarse la ecuación $F = \mu N$, será necesario mostrar a \mathbf{F} actuando en la dirección correcta en el diagrama de cuerpo libre.

Ecuaciones de equilibrio y de fricción.

- Aplique las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones de fricción necesarias (o ecuaciones condicionales si es posible el volteo) y despeje las incógnitas.
- Si el problema implica un sistema tridimensional de fuerzas tal que resulta difícil obtener las componentes de fuerza o los brazos de momento necesarios, aplique las ecuaciones de equilibrio usando vectores cartesianos.

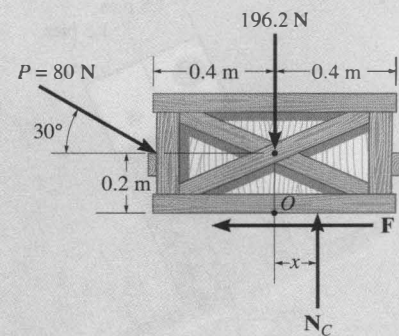
EJEMPLO 8.1

La caja uniforme mostrada en la figura 8-7a tiene una masa de 20 kg. Si una fuerza $P = 80 \text{ N}$ se aplica a la caja, determine si ésta permanece en equilibrio. El coeficiente de fricción estática es $\mu = 0.3$.



(a)

Fig. 8-7



(b)

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 8-7b, la fuerza normal *resultante* N_C debe actuar a una distancia x de la línea central de la caja para contrarrestar el efecto de volteo causado por P . Hay *tres incógnitas*, F , N_C y x , que pueden ser determinadas estrictamente a partir de las *tres* ecuaciones de equilibrio.

Ecuaciones de equilibrio.

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 80 \cos 30^\circ \text{ N} - F = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -80 \sin 30^\circ \text{ N} + N_C - 196.2 \text{ N} = 0$$

$$\curvearrowleft + \Sigma M_O = 0; \quad 80 \sin 30^\circ \text{ N}(0.4 \text{ m}) - 80 \cos 30^\circ \text{ N}(0.2 \text{ m}) + N_C(x) = 0$$

Despejando,

$$F = 69.3 \text{ N}$$

$$N_C = 236 \text{ N}$$

$$x = -0.00908 \text{ m} = -9.08 \text{ mm}$$

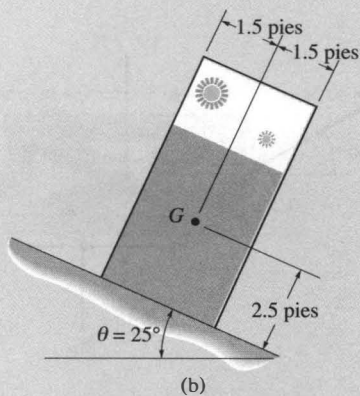
Como x es negativa, ello indica que la fuerza normal *resultante* actúa (ligeramente) a la *izquierda* de la línea central de la caja. No ocurrirá ningún volteo ya que $x \leq 0.4 \text{ m}$. Además, la fuerza de fricción *máxima* que puede ser desarrollada en la superficie de contacto es $F_{\text{máx}} = \mu_s N_C = 0.3(236 \text{ N}) = 70.8 \text{ N}$. Como $F = 69.3 \text{ N} < 70.8 \text{ N}$, la caja *no se deslizará*, aunque estará muy cerca de hacerlo.

EJEMPLO 8.2

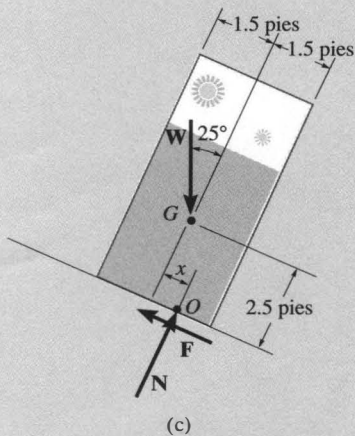
Se observa que cuando la caja del camión de volteo es elevada a un ángulo de $\theta = 25^\circ$, las máquinas expendedoras comienzan a deslizarse fuera de la caja, figura 8-8a. Determine el coeficiente de fricción estática entre las máquinas y la superficie del camión.



(a)



(b)



(c)

Fig. 8-8

Solución

Un modelo idealizado de una máquina expendedora que descansa sobre la caja del camión se muestra en la figura 8-8b. Las dimensiones han sido medidas y el centro de gravedad se ha localizado. Supondremos que la máquina pesa W .

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 8-8c, la dimensión x se usa para localizar la posición de la fuerza normal resultante N . Hay cuatro incógnitas, N , F , μ_s y x .

Ecuaciones de equilibrio.

$$+\curvearrowleft \Sigma F_x = 0; \quad W \sin 25^\circ - F = 0 \quad (1)$$

$$+\nearrow \Sigma F_y = 0; \quad N - W \cos 25^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\downarrow + \Sigma M_O = 0; \quad -W \sin \theta (2.5 \text{ pies}) + W \cos \theta (x) = 0 \quad (3)$$

Como el movimiento es inminente en $\theta = 25^\circ$, usando las primeras dos ecuaciones, tenemos

$$F_s = \mu_s N; \quad W \sin 25^\circ = \mu_s (W \cos 25^\circ)$$

$$\mu_s = \tan 25^\circ = 0.466 \quad \text{Resp.}$$

Al ángulo $\theta = 25^\circ$ se le llama *ángulo de reposo*, y por comparación, es igual al ángulo de fricción estática $\theta = \phi_s$. Observe a partir de los cálculos que θ es independiente del peso de la máquina expendedora, por lo que conociendo θ se tiene un método conveniente para determinar el coeficiente de fricción estática.

A partir de la ecuación 3, con $\theta = 25^\circ$, encontramos $x = 1.17$ pies. Como 1.17 pies $<$ 1.5 pies, la máquina expendedora se deslizará antes de que pueda volcarse, como se observa en la figura 8-8a.

EJEMPLO 8.3

La barra uniforme con peso W y longitud l está soportada en sus extremos contra la superficie localizada en los puntos A y B en la figura 8-9a. Si la barra está a punto de deslizarse cuando $\theta = 30^\circ$, determine el coeficiente de fricción estática μ_s en A y B . En los cálculos ignore el espesor de la barra.

Solución

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 8-9b, hay cinco incógnitas: F_A , N_A , F_B , N_B y μ_s . Éstas pueden ser determinadas a partir de las tres ecuaciones de equilibrio y las dos ecuaciones de fricción aplicadas en los puntos A y B . Las fuerzas de fricción deben ser trazadas con sus sentidos correctos de manera que se opongan a la tendencia de la barra al movimiento. ¿Por qué? (Remítase a la página 386).

Ecuaciones de fricción y de equilibrio. Escribiendo las ecuaciones de fricción,

$$F = \mu_s N; \quad \begin{aligned} F_A &= \mu_s N_A \\ F_B &= \mu_s N_B \end{aligned}$$

Usando estos resultados y aplicando las ecuaciones de equilibrio resulta

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad \mu_s N_A + \mu_s N_B \cos 30^\circ - N_B \sin 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad N_A - W + N_B \cos 30^\circ + \mu_s N_B \sin 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad N_B l - W \left(\frac{l}{2} \right) \cos 30^\circ = 0 \quad (3)$$

$$N_B = 0.4330 W$$

A partir de las ecuaciones 1 y 2,

$$\mu_s N_A = 0.2165 W - (0.3750 W) \mu_s$$

$$N_A = 0.6250 W - (0.2165 W) \mu_s$$

Por división,

$$0.6250 \mu_s - 0.2165 \mu_s^2 = 0.2165 - 0.375 \mu_s$$

o bien,

$$\mu_s^2 - 4.619 \mu_s + 1 = 0$$

Despejando la raíz más pequeña,

$$\mu_s = 0.228 \quad \text{Resp.}$$

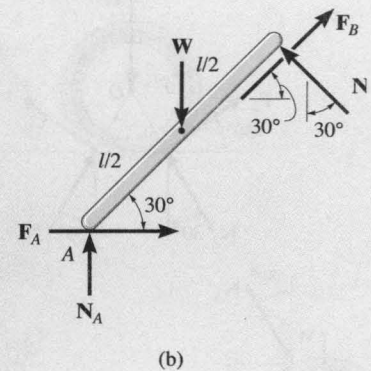
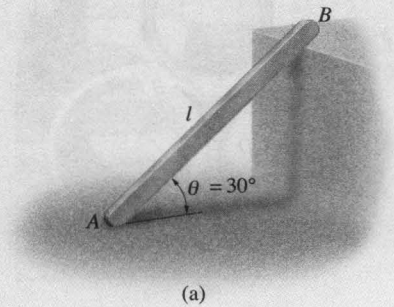
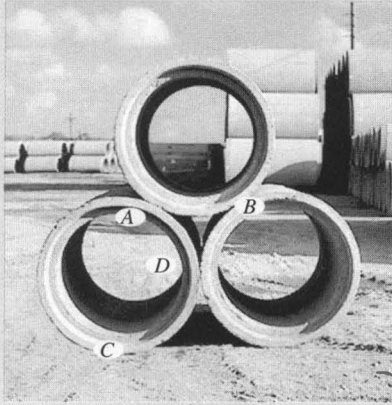
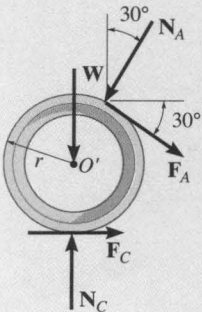
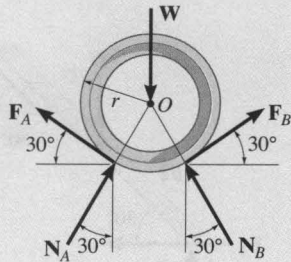


Fig. 8-9

EJEMPLO 8.4



(a)



(b)

Fig. 8-10

Los tubos de concreto están almacenados como se muestra en la figura 8-10a. Determine el coeficiente mínimo de fricción estática en cada punto de contacto de manera que el apilamiento no se colapse.

Solución

Diagramas de cuerpo libre. Observe que el coeficiente de fricción estática entre dos tubos, en A y B , y entre un tubo y el terreno, en C , será diferente ya que las superficies de contacto son distintas. Supondremos que cada tubo tiene un radio exterior r y peso W . Los diagramas de cuerpo libre de dos de los tubos se muestran en la figura 8-10b. Se tienen seis incógnitas: N_A , F_A , N_B , F_B , N_C y F_C . (Observe que cuando el colapso está a punto de ocurrir, la fuerza normal en D es cero). Como sólo las seis ecuaciones de equilibrio son necesarias para obtener las incógnitas, el sentido de las fuerzas de fricción puede ser verificado a partir de la solución.

Ecuaciones de equilibrio. Para el tubo superior tenemos

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_O = 0; & -F_A(r) + F_B(r) = 0; F_A = F_B = F \\ \rightarrow \Sigma F_x = 0; & N_A \sin 30^\circ - F \cos 30^\circ - N_B \sin 30^\circ + F \cos 30^\circ = 0 \\ & N_A = N_B = N \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; & 2N \cos 30^\circ + 2F \sin 30^\circ - W = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Para los tubos inferiores, usando $F_A = F$ y $N_A = N$, tenemos

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_{O'} = 0; & F_C(r) - F(r) = 0; F_C = F \\ \rightarrow \Sigma F_x = 0; & -N \sin 30^\circ + F \cos 30^\circ + F = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; N_C - W - N \cos 30^\circ - F \sin 30^\circ = 0 \quad (3)$$

A partir de la ecuación 2, $F = 0.2679 N$, de manera que entre los tubos

$$(\mu_s)_{\min} = \frac{F}{N} = 0.268 \quad \text{Resp.}$$

Usando este resultado en la ecuación 1,

$$N = 0.5 W$$

A partir de la ecuación 3,

$$\begin{aligned} N_C - W - (0.5 W) \cos 30^\circ - 0.2679 (0.5 W) \sin 30^\circ &= 0 \\ N_C &= 1.5 W \end{aligned}$$

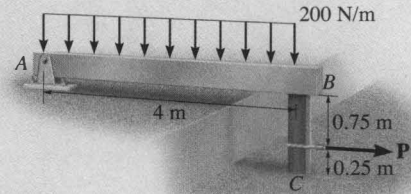
En el terreno, el coeficiente de fricción estática más pequeño requerido sería

$$(\mu'_s)_{\min} = \frac{F}{N_C} = \frac{0.2679(0.5 W)}{1.5 W} = 0.0893 \quad \text{Resp.}$$

Por consiguiente, entre los tubos es requerido un mayor coeficiente de fricción estática que en el terreno; y así es probable que si ocurre el deslizamiento entre los tubos, los dos inferiores rodarán separándose uno de otro sin deslizarse al caer el tubo superior.

EJEMPLO 8.5

La viga AB está sometida a una carga uniforme de 200 N/m y es soportada en B mediante el poste BC , figura 8-11a. Si los coeficientes de fricción estática en B y C son $\mu_B = 0.2$ y $\mu_C = 0.5$, determine la fuerza P necesaria para jalar el poste por debajo de la viga. Ignore el peso de los miembros y el espesor del poste.



(a)

Solución

Diagramas de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre de la viga AB se muestra en la figura 8-11b. Aplicando $\sum M_A = 0$, obtenemos $N_B = 400 \text{ N}$. Este resultado se muestra en el diagrama de cuerpo libre del poste, figura 8-11c. Con referencia a este miembro, las *cuatro* incógnitas F_B , P , F_C y N_C son determinadas con las *tres* ecuaciones de equilibrio y una ecuación de fricción aplicada en B o en C .

Ecuaciones de equilibrio y fricción.

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad P - F_B - F_C = 0 \quad (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad N_C - 400 \text{ N} = 0 \quad (2)$$

$$\curvearrowleft + \sum M_C = 0; \quad -P(0.25 \text{ m}) + F_B(1 \text{ m}) = 0 \quad (3)$$

(El poste se desliza sólo en B) Esto requiere que $F_C \leq \mu_C N_C$ y

$$F_B = \mu_B N_B; \quad F_B = 0.2(400 \text{ N}) = 80 \text{ N}$$

Usando este resultado y resolviendo las ecuaciones 1, 2 y 3, obtenemos

$$P = 320 \text{ N}$$

$$F_C = 240 \text{ N}$$

$$N_C = 400 \text{ N}$$

Como $F_C = 240 \text{ N} > \mu_C N_C = 0.5(400 \text{ N}) = 200 \text{ N}$, el otro caso de movimiento debe ser estudiado.

(El poste se desliza sólo en C). Donde $F_B \leq \mu_B N_B$ y

$$F_C = \mu_C N_C; \quad F_C = 0.5 N_C \quad (4)$$

Al resolver las ecuaciones de la 1 a la 4 resulta

$$P = 267 \text{ N}$$

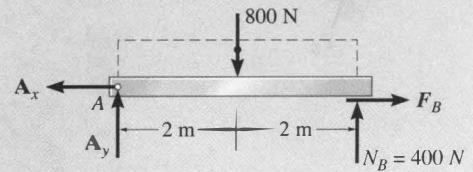
Resp.

$$N_C = 400 \text{ N}$$

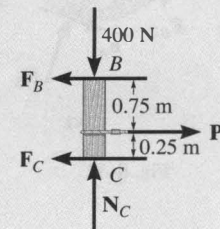
$$F_C = 200 \text{ N}$$

$$F_B = 66.7 \text{ N}$$

Es evidente que este caso se presenta primero ya que requiere un valor *menor* para P .



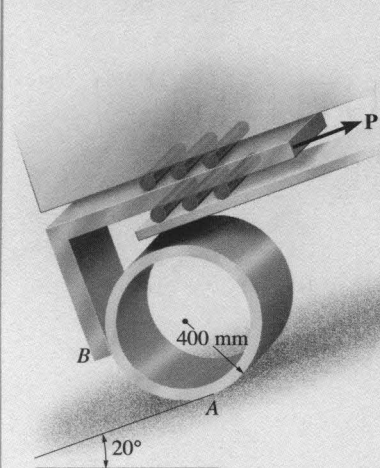
(b)



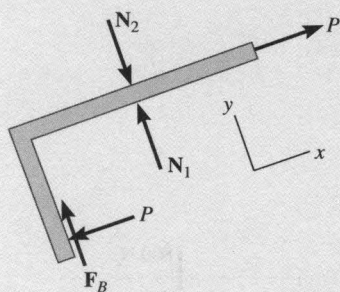
(c)

Fig. 8-11

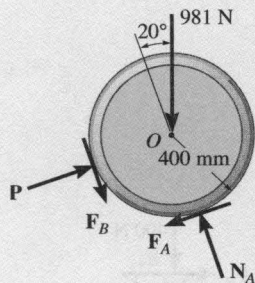
EJEMPLO 8.6



(a)



(b)



(c)

Fig. 8-12

Determine la fuerza normal P que se debe ejercer sobre la escuadra para empezar a empujar el tubo de 100 kg mostrado en la figura 8-12a hacia arriba por el plano inclinado a 20° . Los coeficientes de fricción estática en los puntos de contacto son $(\mu_s)_A = 0.15$, y $(\mu_s)_B = 0.4$.

Solución

Diagramas de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 8-12b, la escuadra debe ejercer una fuerza P sobre el tubo debido al equilibrio de fuerzas en la dirección x . Se tienen cuatro incógnitas, P , F_A , N_A , y F_B , actuando sobre el tubo, figura 8-12c. Estas incógnitas se pueden determinar a partir de las *tres* ecuaciones de equilibrio y de *una* ecuación de fricción, que se aplica en A o en B . Si el deslizamiento empieza a ocurrir sólo en B , el tubo empezará a rodar hacia arriba por el plano inclinado; mientras que si el deslizamiento ocurre sólo en A , el tubo comenzará a deslizarse hacia arriba por el plano. Aquí debemos encontrar N_B .

Ecuaciones de equilibrio y de fricción (para la figura 8-12c)

$$+\nearrow \Sigma F_x = 0; \quad -F_A + P - 981 \sin 20^\circ \text{ N} = 0 \quad (1)$$

$$+\curvearrowleft \Sigma F_y = 0; \quad N_A - F_B - 981 \cos 20^\circ \text{ N} = 0 \quad (2)$$

$$\downarrow + \Sigma M_O = 0; \quad F_B(400 \text{ mm}) - F_A(400 \text{ mm}) = 0 \quad (3)$$

(El tubo rueda hacia arriba por el plano inclinado). En este caso $F_A \leq 0.15N_A$ y

$$(F_s)_B = (\mu_s)_B N_B; \quad F_B = 0.4P \quad (4)$$

La dirección de la fuerza de fricción en B debe ser especificada correctamente. ¿Por qué? Como el carrito está siendo forzado hacia arriba por el plano, F_B actúa hacia abajo para impedir cualquier movimiento de rodamiento del tubo en el sentido de las manecillas del reloj, figura 8-12c. Resolviendo las ecuaciones de la 1 a la 4 tenemos

$$N_A = 1146 \text{ N} \quad F_A = 224 \text{ N} \quad F_B = 224 \text{ N} \quad P = 559 \text{ N}$$

La hipótesis relativa a no deslizamiento en A debe ser revisada.

$$F_A \leq (\mu_s)_A N_A; \quad 224 \text{ N} \stackrel{?}{\leq} 0.15(1146 \text{ N}) = 172 \text{ N}$$

La desigualdad *no es aplicable*, y por tanto, el deslizamiento ocurre en A y no en B . Por consiguiente, ocurrirá el otro caso de movimiento.

(El tubo se desliza hacia arriba por el plano inclinado). En este caso, $P \leq 0.4N_B$ y

$$(F_s)_A = (\mu_s)_A N_A; \quad F_A = 0.15N_A \quad (5)$$

Resolviendo las ecuaciones 1, 2, 3 y 5 resulta

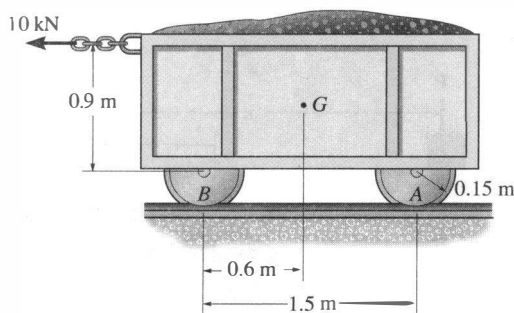
$$N_A = 1085 \text{ N} \quad F_A = 163 \text{ N} \quad F_B = 163 \text{ N} \quad P = 498 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

La validez de la solución ($P = 498 \text{ N}$) puede ser verificada probando la hipótesis de que no ocurre deslizamiento en B .

$$F_B \leq (\mu_s)_B P; \quad 163 \text{ N} < 0.4(498 \text{ N}) = 199 \text{ N} \quad (\text{comprueba})$$

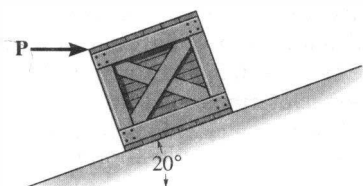
PROBLEMAS

8-1. El vagón de mina y su contenido tienen una masa total de 6 Mg y centro de gravedad en G . Si el coeficiente de fricción estática entre las ruedas y los rieles es $\mu_s = 0.4$ cuando las ruedas están frenadas, encuentre la fuerza normal que actúa sobre las ruedas frontales en B y las ruedas posteriores en A cuando los frenos en A y B están bloqueados. ¿Se mueve el vagón?



Prob. 8-1

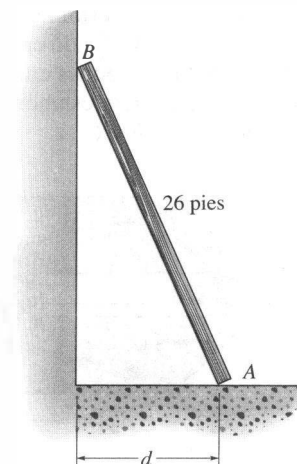
8-2. Si la fuerza horizontal $P = 80$ lb, determine las fuerzas normal y de fricción que actúan sobre la caja de 300 lb. Considere $\mu_s = 0.3$, $\mu_k = 0.2$.



Prob. 8-2

8-3. El poste uniforme tiene un peso de 30 lb y longitud de 26 pies. Si se le coloca contra la pared lisa y sobre el piso rugoso en la posición $d = 10$ pies, ¿permanecerá en esa posición cuando se libere? El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$.

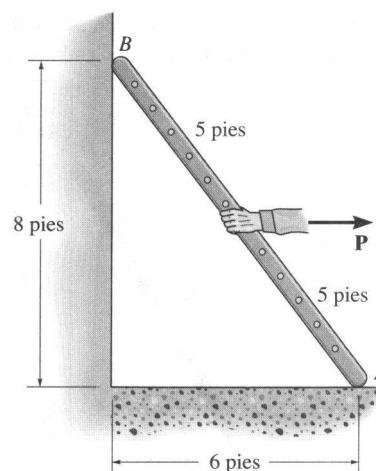
*8-4. El poste uniforme tiene un peso de 30 lb y longitud de 26 pies. Determine la distancia d máxima a que puede colocarse de la pared lisa sin deslizarse. El coeficiente de fricción estática entre el piso y el poste es $\mu_s = 0.3$.



Probs. 8-3/4

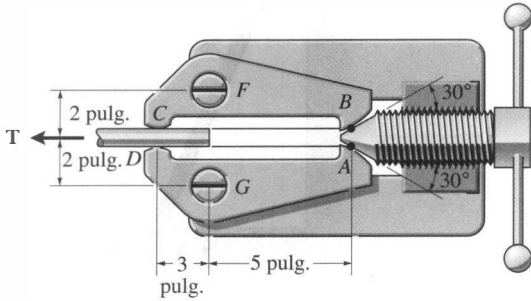
8-5. La escalera uniforme de 20 lb descansa sobre el piso rugoso, cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.8$, y contra la pared lisa en B . Determine la fuerza horizontal P que el hombre debe ejercer sobre la escalera para que se mueva.

8-6. La escalera uniforme de 20 lb descansa sobre el piso rugoso, cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.4$, y contra la pared lisa en B . Determine la fuerza horizontal P que el hombre debe ejercer sobre la escalera para que se mueva.



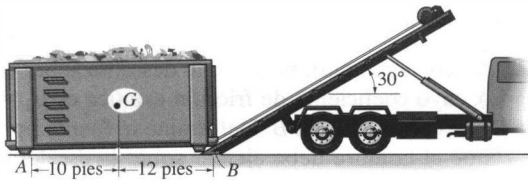
Probs. 8-5/6

8-7. Una fuerza axial de $T = 800$ lb es aplicada a la barra. Si el coeficiente de fricción estática en las mordazas C y D es $\mu_s = 0.5$, determine la fuerza normal más pequeña que el tornillo localizado en A debe ejercer sobre la superficie lisa de los eslabones en B y C para mantener a la barra estacionaria. Los eslabones están conectados mediante pasadores en F y G .



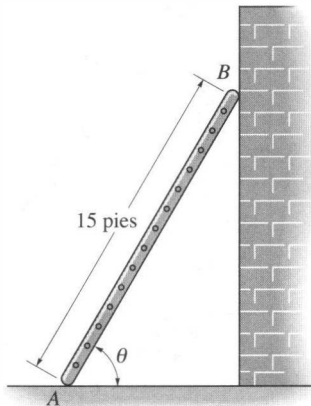
Prob. 8-7

*8-8. El malacate sobre el camión se usa para elevar el contenedor de basura hasta la caja del camión. Si el contenedor pesa 8500 lb y tiene su centro de gravedad en G , determine la fuerza necesaria en el cable para comenzar el izado. Los coeficientes de fricción estática en A y B son $\mu_A = 0.3$ y $\mu_B = 0.2$, respectivamente. Ignore la altura del soporte en A .



Prob. 8-8

8-9. La escalera de 15 pies tiene un peso uniforme de 80 lb y descansa contra la pared lisa en el punto B . Si el coeficiente de fricción estática en A es $\mu_A = 0.4$, determine si la escalera se deslizará. Considere $\theta = 60^\circ$.

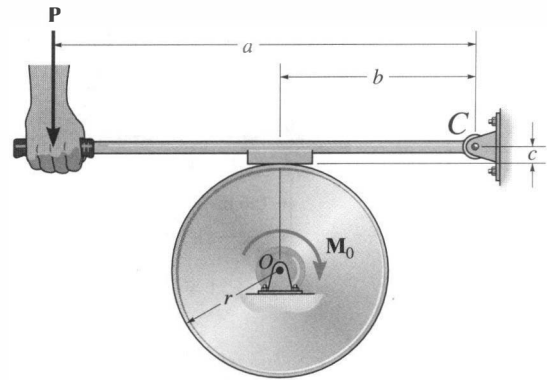


Prob. 8-9

8-10. El freno de zapata se usa para impedir que la rueda gire cuando está sometida a un momento de par M_0 . Si el coeficiente de fricción estática entre la rueda y la zapata es μ_s , determine la fuerza más pequeña P que debe ser aplicada.

8-11. Demuestre que el freno en el problema 8-10 es autobloqueante, es decir, $P \leq 0$, siempre que $b/c \leq \mu_s$.

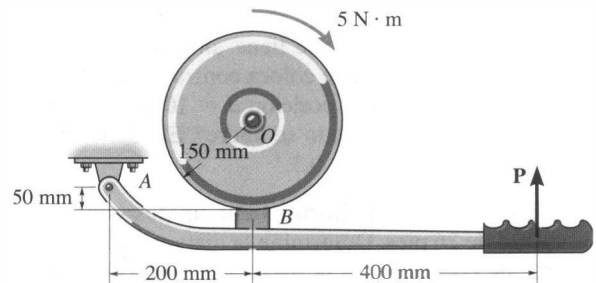
*8-12. Resuelva el problema 8-10 si el momento de par M_0 es aplicado en sentido contrario al de las manecillas del reloj.



Probs. 8-10/11/12

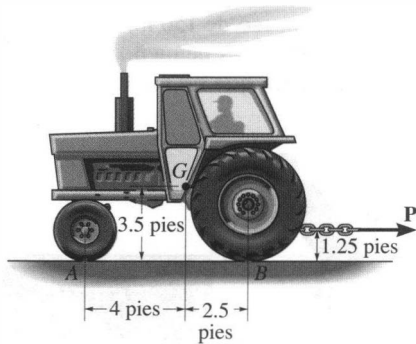
8-13. El freno consiste en una palanca conectada mediante un pasador en A y un bloque de fricción en B . El coeficiente de fricción estática entre la rueda y la palanca es $\mu_s = 0.3$; una torca de $5 \text{ N} \cdot \text{m}$ es aplicada a la rueda. Determine si el freno puede mantener estacionaria a la rueda cuando la fuerza aplicada a la palanca es (a) $P = 30 \text{ N}$, (b) $P = 70 \text{ N}$.

8-14. Resuelva el problema 8-13 si el par de $5 \text{ N} \cdot \text{m}$ es aplicada en sentido contrario al de las manecillas del reloj.



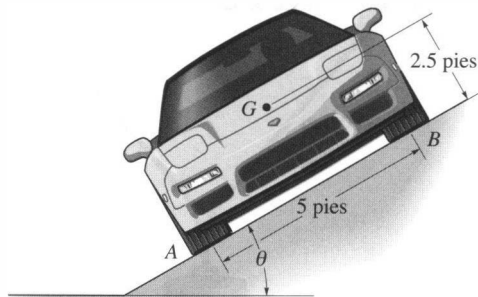
Probs. 8-13/14

8-15. El tractor tiene un peso de 4500 lb y centro de gravedad en G . La tracción impulsora es desarrollada en las ruedas posteriores B , mientras que las ruedas frontales en A tienen libertad de girar. Si el coeficiente de fricción estática entre las ruedas situadas en B y el terreno es $\mu_s = 0.5$, determine si es posible jalar con $P = 1200$ lb sin que las ruedas en B se deslicen o las ruedas frontales localizadas en A se levanten del terreno.



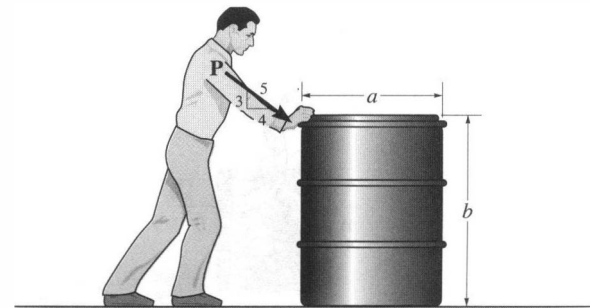
Prob. 8-15

*8-16. El carro tiene una masa de 1.6 Mg y centro de masa en G . Si el coeficiente de fricción estática entre el borde del camino y los neumáticos es $\mu_s = 0.4$, determine la pendiente máxima θ que puede tener el borde del camino sin que el carro se deslice o se voltee cuando viaja con velocidad constante.



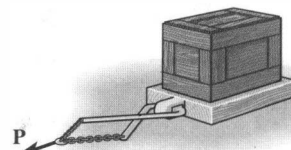
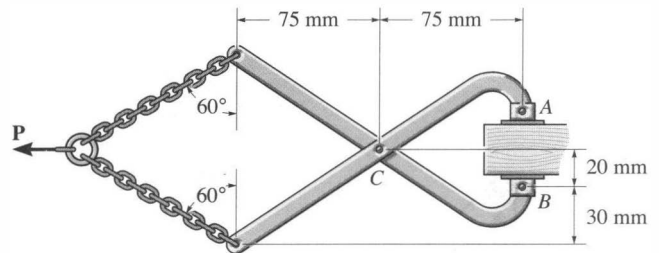
Prob. 8-16

8-17. El tambor tiene un peso de 100 lb y descansa sobre el piso cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.6$. Si $a = 2$ pies y $b = 3$ pies, determine la magnitud más pequeña de la fuerza P que causará el movimiento inminente del tambor.



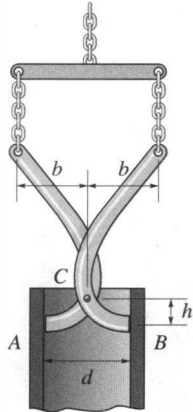
Probs. 8-17/18

8-19. El coeficiente de fricción estática entre las zapatas colocadas en los puntos A y B de las tenazas y la plataforma es $\mu'_s = 0.5$, y entre la plataforma y el piso es $\mu_s = 0.4$. Si se aplica una fuerza $P = 300$ N horizontal a las tenazas, determine la masa más grande que puede ser remolcada.



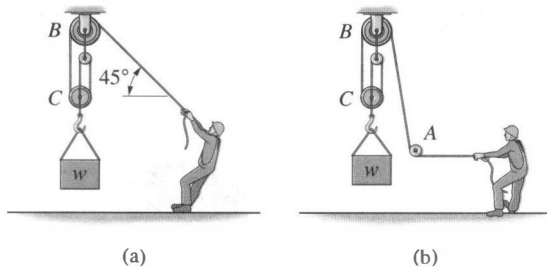
Prob. 8-19

*8-20. El tubo es levantado usando las tenazas. Si el coeficiente de fricción estática en A y B es μ_s , determine la dimensión b más pequeña de manera que cualquier tubo de diámetro interno d pueda ser levantado.



Prob. 8-20

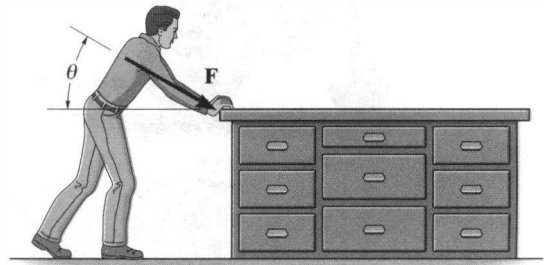
8-21. Determine el peso máximo W que el hombre puede levantar con velocidad constante usando el sistema de poleas, sin y luego con la polea ubicada en A . El hombre tiene un peso de 200 lb y el coeficiente de fricción estática entre sus zapatos y el suelo es $\mu_s = 0.6$.



Prob. 8-21

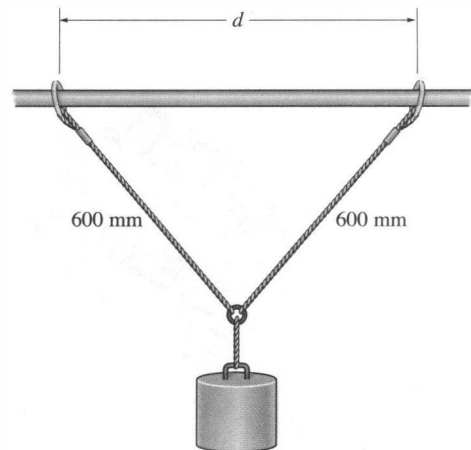
8-22. El mueble uniforme tiene un peso de 90 lb y descansa sobre un piso de losetas con $\mu_s = 0.25$. Si el hombre lo empuja en dirección horizontal $\theta = 0^\circ$, determine la magnitud más pequeña de la fuerza F necesaria para moverlo. Si el hombre tiene un peso de 150 lb, encuentre el coeficiente de fricción estática más pequeño necesario entre sus zapatos y el piso para que no resbale.

8-23. El mueble uniforme tiene un peso de 90 lb y descansa sobre un piso de losetas con $\mu_s = 0.25$. Si el hombre lo empuja en dirección $\theta = 30^\circ$, determine la magnitud más pequeña de la fuerza F necesaria para moverlo. Si el hombre tiene un peso de 150 lb, encuentre el coeficiente de fricción estática más pequeño necesario entre sus zapatos y el piso para que no resbale.



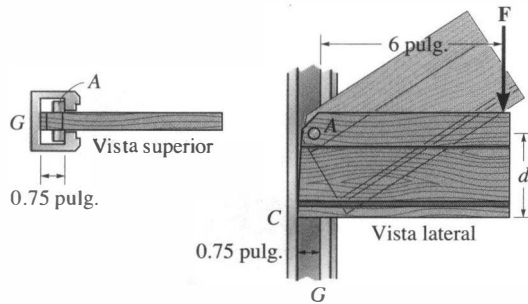
Probs. 8-22/23

*8-24. El cilindro de 5 kg está suspendido de dos cuerdas de misma longitud. El extremo de cada cuerda está unido a un anillo de masa insignificante que pasa a lo largo de una flecha horizontal. Si el coeficiente de fricción estática entre cada anillo y la flecha es $\mu_s = 0.5$, determine la distancia d más grande a la que los anillos pueden estar separados y seguir aún soportando al cilindro.



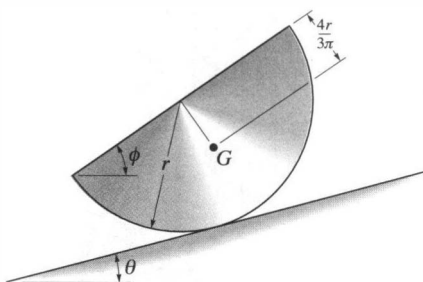
Prob. 8-24

8-25. La tabla puede ajustarse verticalmente inclinándola hacia arriba y deslizando el pasador A a lo largo de la guía vertical G. Cuando se coloca horizontalmente, la parte inferior C se apoya a lo largo del borde de la guía, mientras que $\mu_s = 0.4$. Determine la dimensión d más grande que soportará cualquier fuerza F aplicada sin causar que la tabla resbale hacia abajo.



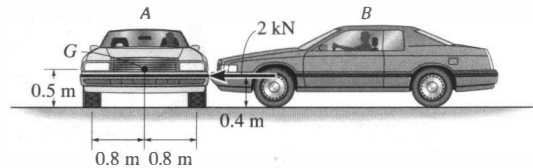
Prob. 8-25

8-26. El semicilindro homogéneo tiene una masa m y centro de masa en G . Determine el ángulo θ más grande del plano inclinado sobre el que descansa el cilindro de manera que éste no se deslice hacia abajo por el plano. El coeficiente de fricción estática entre el plano y el cilindro es $\mu_s = 0.3$. ¿Cuál es el ángulo ϕ para este caso?



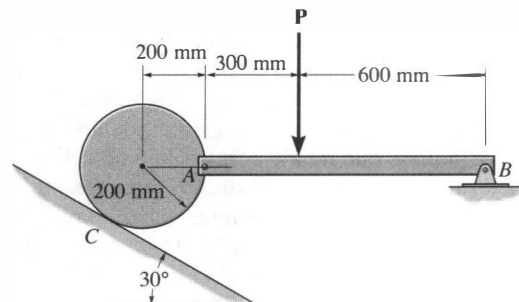
Prob. 8-26

8-27. El automóvil A tiene una masa de 1.4 Mg y centro de masa en G. Si el automóvil B ejerce una fuerza horizontal sobre A de 2 kN, determine si esta fuerza es lo suficientemente grande como para mover el automóvil A. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre los neumáticos y el camino son $\mu_s = 0.5$ y $\mu_k = 0.35$, respectivamente. Suponga que la defensa de B es lisa.



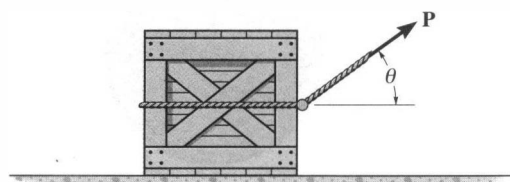
Prob. 8-27

*8-28. Un disco de 35 kg descansa sobre una superficie inclinada para la cual $\mu_s = 0.2$. Determine la fuerza vertical máxima P que puede ser aplicada al eslabón AB sin que el disco se deslice en C.



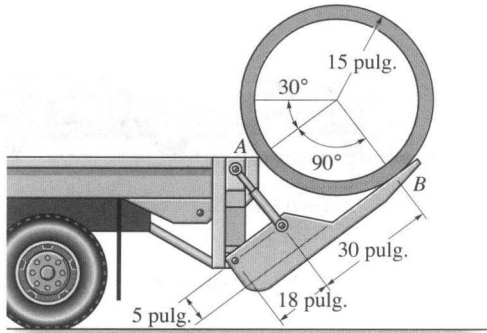
Prob. 8-28

8-29. La caja tiene un peso W y el coeficiente de fricción estática en la superficie es $\mu_s = 0.3$. Determine la orientación de la cuerda y la fuerza P más pequeña posible que tiene que aplicarse a la cuerda para que la caja esté a punto de moverse.



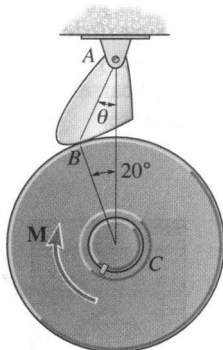
Prob. 8-29

8-30. El tubo de concreto de 800 lb está siendo bajado de la cama del camión cuando se encuentra en la posición mostrada. Si el coeficiente de fricción estática en los puntos de soporte A y B es $\mu_s = 0.4$, determine dónde comienza a deslizarse primero: en A o en B , o en A y B .



Prob. 8-30

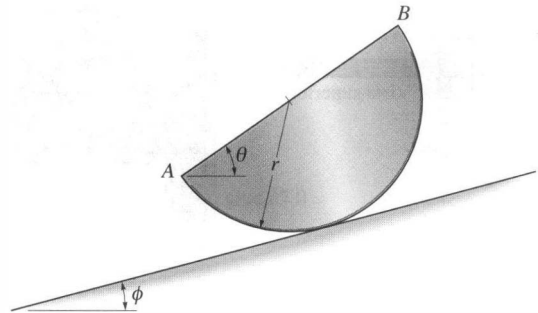
8-31. El trinquete de fricción está colgado de un pasador ubicado en A y descansa contra la rueda en B . Permite libertad de movimiento cuando la rueda gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto a C . La rotación opuesta está impedida debido a la fricción del trinquete que tiende a frenar la rueda. Si $(\mu_s)_B = 0.6$, determine el ángulo θ de diseño que impedirá el movimiento en el sentido de las manecillas del reloj para cualquier valor del momento aplicado M . *Sugerencia:* Ignore el peso del trinquete de modo que se considere como un miembro de dos fuerzas.



Prob. 8-31

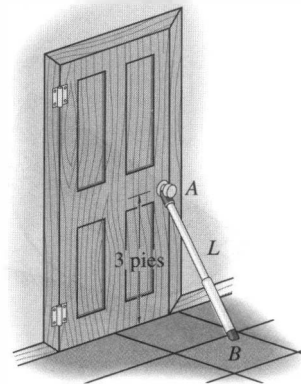
***8-32.** El semicilindro de masa m y radio r está sobre el plano inclinado rugoso para el cual $\phi = 10^\circ$ y el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$. Determine si el semicilindro resbala por el plano, y si no, encuentre el ángulo de volteo θ de su base AB .

8-33. El semicilindro de masa m y radio r se encuentra sobre el plano inclinado rugoso. Si la inclinación $\phi = 15^\circ$, determine el coeficiente de fricción estática más pequeño que impedirá su deslizamiento.



Probs. 8-32/33

8-34. El puntal AB de la puerta se diseña para impedir que ésta se abra. Si el puntal forma una conexión de pasador bajo la perilla y el coeficiente de fricción estática con el piso es $\mu_s = 0.5$, determine la longitud L más larga que el puntal puede tener para impedir que la puerta se abra. Ignore el peso del puntal.



Prob. 8-34

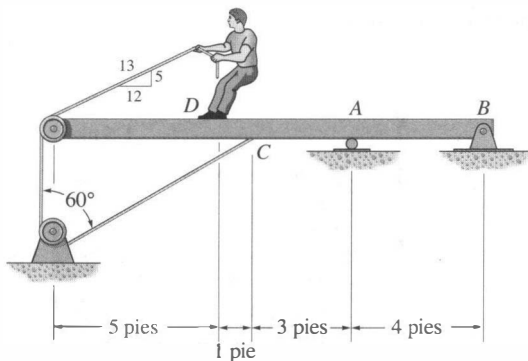
8-35. El hombre tiene un peso de 200 lb, y el coeficiente de fricción estática entre sus zapatos y el piso es $\mu_s = 0.5$. Determine dónde debe colocar él su centro de gravedad G en d para ejercer la fuerza horizontal máxima sobre la puerta. ¿Cuánto vale esta fuerza?



Prob. 8-35

*8-36. El joven pesa 80 lb, está de pie sobre la viga y jala la cuerda con una fuerza tan grande que lo hace resbalar. Si $(\mu_s)_D = 0.4$ entre sus zapatos y la viga, determine las reacciones en A y B . La viga es uniforme y pesa 100 lb. Ignore el tamaño de las poleas y el espesor de la viga.

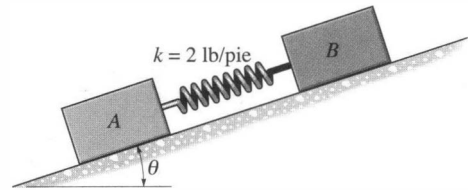
8-37. El joven de 80 lb está de pie sobre la viga y jala con una fuerza de 40 lb. Si $(\mu_s)_D = 0.4$, determine la fuerza de fricción entre sus zapatos y la viga y las reacciones en A y B . La viga es uniforme y pesa 100 lb. Ignore el tamaño de las poleas y el espesor de la viga.



Probs. 8-36/37

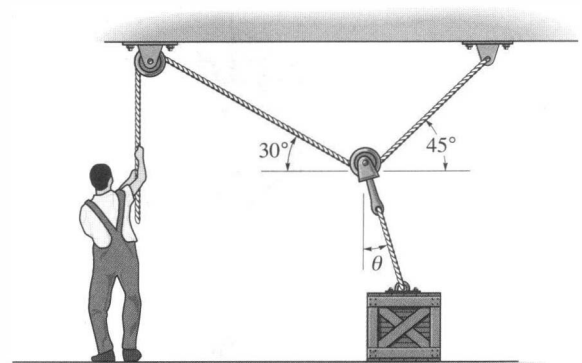
8-38. Dos bloques A y B tienen un peso de 10 y 6 lb, respectivamente. Descansan sobre el plano inclinado cuyos coeficientes de fricción estática son $\mu_A = 0.15$ y $\mu_B = 0.25$. Determine el ángulo de inclinación θ para el cual ambos bloques empiezan a resbalar. Encuentre también el alargamiento o acortamiento requerido en el resorte que los conecta para que esto ocurra. El resorte tiene rigidez de $k = 2$ lb/pie.

8-39. Dos bloques A y B tienen un peso de 10 y 6 lb, respectivamente. Descansan sobre el plano inclinado para el cual los coeficientes de fricción estática son $\mu_A = 0.15$ y $\mu_B = 0.25$. Determine el ángulo θ que ocasionará el movimiento de uno de los bloques. ¿Cuál será la fuerza de fricción bajo cada uno de los bloques cuando esto ocurra? El resorte tiene rigidez de $k = 2$ lb/pie e inicialmente no está alargado.



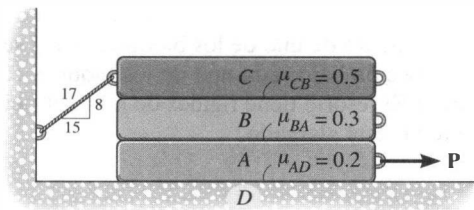
Probs. 8-38/39

*8-40. Determine la fuerza más pequeña que el hombre debe ejercer sobre la cuerda para mover la caja de 80 kg. ¿Cuál es el ángulo θ en este momento? El coeficiente de fricción estática entre la caja y el piso es $\mu_s = 0.3$.



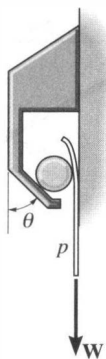
Prob. 8-40

8-41. Las tres barras tienen pesos de $W_A = 20$ lb, $W_B = 40$ lb, y $W_C = 60$ lb, respectivamente. Si los coeficientes de fricción estática en las superficies de contacto son como se muestran, determine la fuerza horizontal P más pequeña necesaria para mover la barra A.



Prob. 8-41

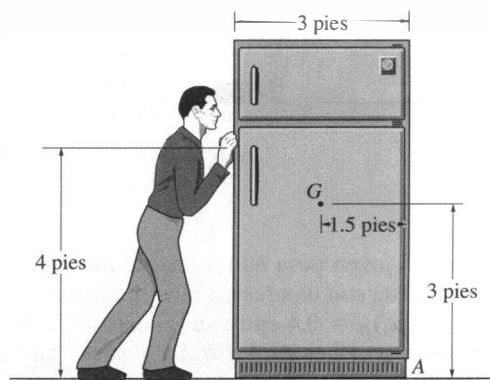
8-42. El gancho de fricción se hizo a partir de un marco fijo que se muestra en un tono más oscuro y de un cilindro con peso insignificante. Una pieza de papel está colocada entre la pared lisa y el cilindro. Si $\theta = 20^\circ$, determine el coeficiente de fricción estática μ más pequeño necesario en todos los puntos de contacto de manera que cualquier peso W de papel p pueda sostenerse.



Prob. 8-42

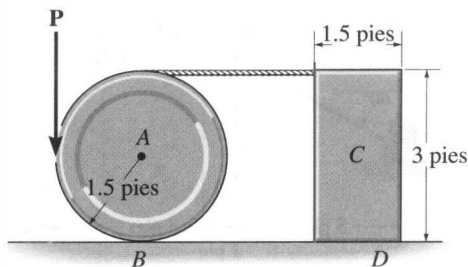
8-43. El refrigerador tiene un peso de 180 lb y descansa sobre un piso de mosaicos cuyo $\mu_s = 0.25$. Si el hombre empuja horizontalmente sobre el refrigerador en la dirección mostrada, determine la magnitud más pequeña de la fuerza necesaria para moverlo. Si el hombre tiene un peso de 150 lb, determine también el coeficiente de fricción más pequeño necesario entre sus zapatos y el piso para que no resbale.

*8-44. El refrigerador tiene un peso de 180 lb y descansa sobre un piso de mosaicos cuyo $\mu_s = 0.25$. El hombre tiene un peso de 150 lb y el coeficiente de fricción estática entre el piso y sus zapatos es $\mu_s = 0.6$. Si él empuja horizontalmente sobre el refrigerador, determine si puede moverlo. De ser así, ¿el refrigerador se deslizará o se volteará?



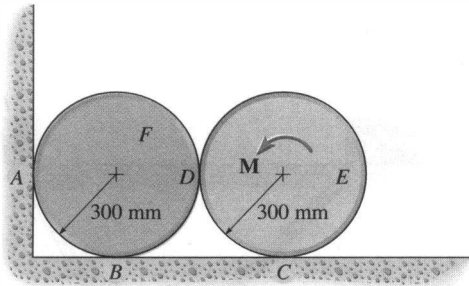
Probs. 8-43/44

8-45. La rueda pesa 20 lb y descansa sobre una superficie cuyo $\mu_B = 0.2$. Una cuerda enrollada a su alrededor está unida a la parte superior del bloque homogéneo de 30 lb. Si el coeficiente de fricción estática en D es $\mu_D = 0.3$, determine la fuerza vertical más pequeña que puede ser aplicada tangencialmente a la rueda para que el movimiento sea inminente.



Prob. 8-45

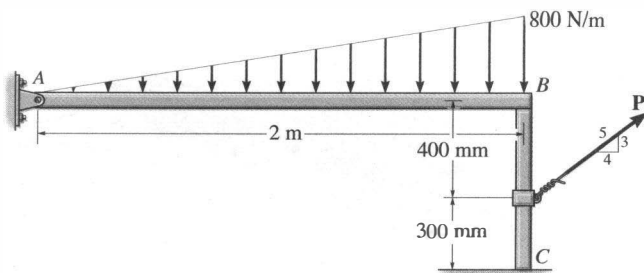
8-46. Cada uno de los cilindros tiene una masa de 50 kg. Si los coeficientes de fricción estática en los puntos de contacto son $\mu_A = 0.5$, $\mu_B = 0.5$, $\mu_C = 0.5$ y $\mu_D = 0.6$, determine el momento de par M necesario para hacer girar el cilindro E .



Prob. 8-46

8-47. La viga AB tiene masa y espesor insignificantes y está sometida a una carga triangular distribuida. Está soportada en un extremo por un pasador y en el otro por un poste con masa de 50 kg y espesor insignificante. Determine la fuerza P mínima necesaria para mover el poste. Los coeficientes de fricción estática en B y en C son $\mu_B = 0.4$ y $\mu_C = 0.2$, respectivamente.

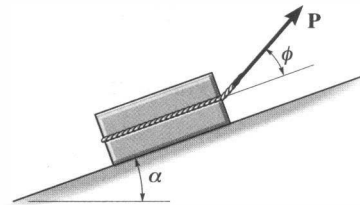
*8-48. La viga AB tiene masa y espesor insignificantes y está sometida a una carga triangular distribuida. Está soportada en un extremo por un pasador y en el otro por un poste con masa de 50 kg y espesor insignificante. Determine los dos coeficientes de fricción estática en B y en C de manera que cuando la magnitud de la fuerza aplicada es incrementada a $P = 150$ N, el poste se desliza en B y C simultáneamente.



Probs. 8-47/48

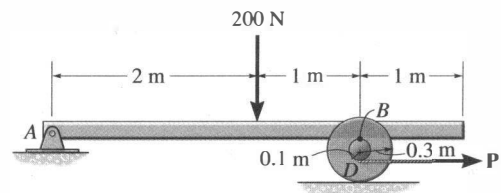
8-49. El bloque de peso W está siendo jalado hacia arriba por el plano inclinado de pendiente α usando una fuerza P . Si P actúa con el ángulo ϕ como se aprecia en la figura, demuestre que para que ocurra el deslizamiento, $P = W \sin(\alpha + \theta) / \cos(\phi - \theta)$, donde θ es el ángulo de fricción; $\theta = \tan^{-1} \mu$.

8-50. Determine el ángulo ϕ a que debe actuar P sobre el bloque de manera que la magnitud de P sea tan pequeña como sea posible para comenzar a empujar el bloque hacia arriba por el plano inclinado. ¿Cuál es el valor correspondiente de P ? El bloque pesa W y la pendiente α es conocida.



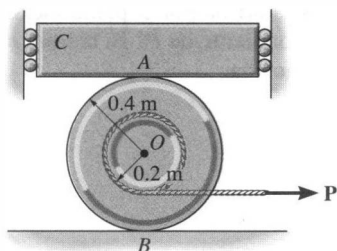
Probs. 8-49/50

8-51. La viga AB tiene masa y espesor insignificantes y es sometida a una fuerza de 200 N. Está soportada en un extremo por un pasador y en el otro por un carrete con masa de 40 kg. Si un cable se enrolla alrededor del núcleo interno del carrete, determine la fuerza P mínima necesaria en el cable para mover el carrete. Los coeficientes de fricción estática en B y D son $\mu_B = 0.4$ y $\mu_D = 0.2$, respectivamente.



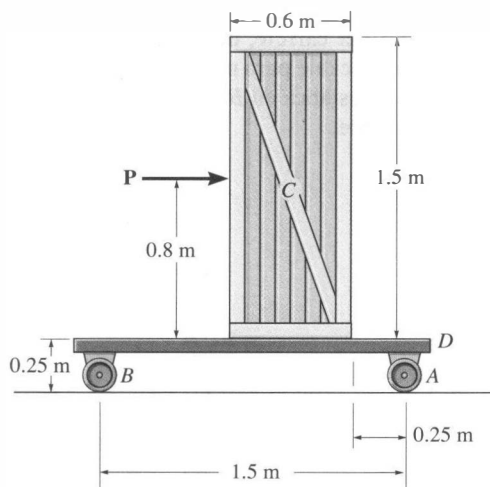
Prob. 8-51

***8-52.** El bloque *C* tiene masa de 50 kg y está confinado entre dos paredes mediante rodillos lisos. Si este bloque descansa sobre un carrete de 40 kg, determine la fuerza *P* mínima necesaria en el cable para mover el carrete. El cable está enrollado alrededor del núcleo central del carrete. Los coeficientes de fricción estática en *A* y *B* son $\mu_A = 0.3$ y $\mu_B = 0.6$.



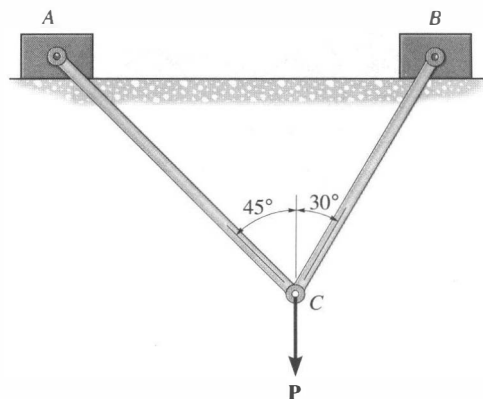
Prob. 8-52

8-53. La caja *C* de estructura homogénea y peso de 60 kg descansa uniformemente sobre un carro *D* de 10 kg. Si las ruedas frontales del carro localizadas en *A* están trabadas para impedir su rodamiento mientras que las ruedas ubicadas en *B* están libres para rodar, determine la fuerza máxima **P** que puede ser aplicada sin causar movimiento de la caja. El coeficiente de fricción estática entre las ruedas y el piso es $\mu_f = 0.35$, y entre el carro y la caja es $\mu_d = 0.5$.



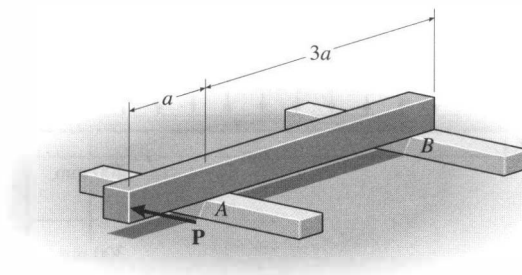
Prob. 8-53

8-54. Dos bloques *A* y *B*, cada uno con masa de 6 kg, están conectados mediante los eslabones que se muestran. Si los coeficientes de fricción estática en las superficies de contacto son $\mu_A = 0.2$ y $\mu_B = 0.8$, determine la fuerza vertical *P* más grande que puede aplicarse al pasador *C* sin que los bloques se deslicen. Ignore el peso de los eslabones.



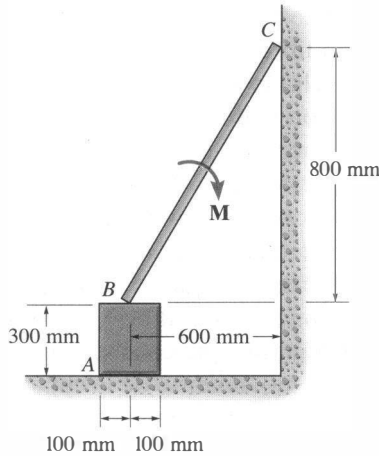
Prob. 8-54

8-55. La viga uniforme tiene un peso *W*, longitud de $4a$ y descansa sobre los rieles fijos en *A* y *B*. Si el coeficiente de fricción estática en los rieles es μ_s , determine la fuerza horizontal *P*, aplicada perpendicularmente a la cara de la viga, que hará que la viga se mueva.



Prob. 8-55

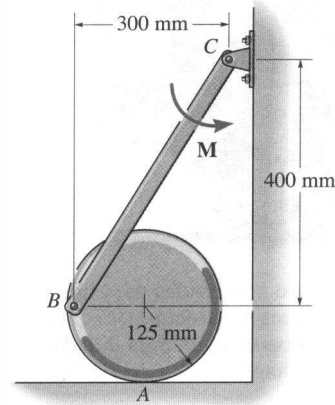
***8-56.** La barra esbelta uniforme de 6 kg descansa sobre el centro superior del bloque de 3 kg. Si los coeficientes de fricción estática en los puntos de contacto son $\mu_A = 0.4$, $\mu_B = 0.6$, y $\mu_C = 0.3$, determine el momento de par M más grande que puede ser aplicado a la barra sin generar movimiento.



Prob. 8-56

8-59. El disco de 45 kg descansa sobre la superficie cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_A = 0.2$. Determine el momento de par M más grande que puede ser aplicado a la barra sin producir movimiento.

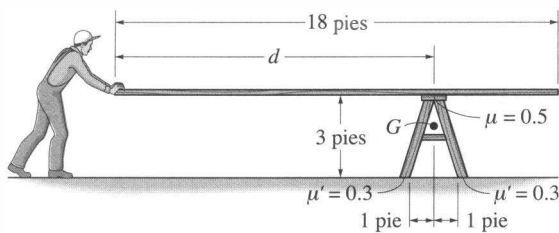
***8-60.** El disco de 45 kg descansa sobre la superficie cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_A = 0.15$. Si $M = 50 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine la fuerza de fricción en A .



Probs. 8-59/60

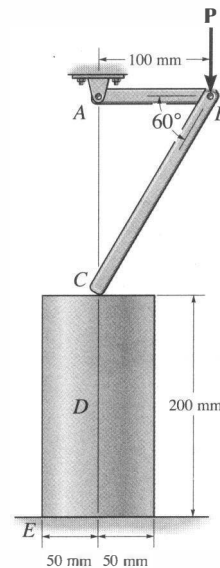
8-57. El carpintero empuja lenta y horizontalmente la tabla uniforme sobre la parte superior de la mesa de trabajo. La tabla tiene un peso uniforme de 3 lb/pie, la mesa tiene un peso de 15 lb y centro de gravedad en G . Determine si la mesa permanecerá en posición, resbalará o se volteará si la tabla es empujada hacia delante cuando $d = 10$ pies. Los coeficientes de fricción estática se muestran en la figura.

8-58. El carpintero empuja lenta y horizontalmente la tabla uniforme sobre la parte superior de la mesa de trabajo. La tabla tiene un peso uniforme de 3 lb/pie, la mesa tiene un peso de 15 lb y centro de gravedad en G . Determine si la mesa permanecerá en posición, resbalará o se volteará si la tabla es empujada hacia delante cuando $d = 14$ pies. Los coeficientes de fricción estática se muestran en la figura.



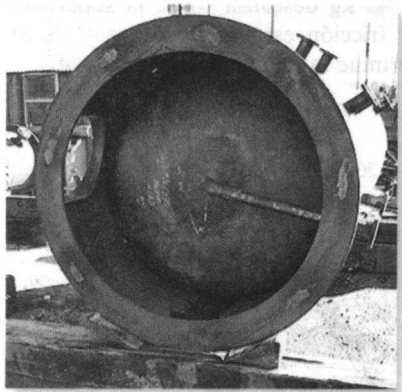
Probs. 8-57/58

8-61. El extremo C del eslabonamiento de dos barras descansa sobre el centro superior del cilindro de 50 kg. Si los coeficientes de fricción estática en C y E son $\mu_C = 0.6$ y $\mu_E = 0.3$, determine la fuerza vertical más grande que puede ser aplicada en B sin generar movimiento. Ignore la masa de las barras.



Prob. 8-61

8.3 Cuñas



Las cuñas a menudo son usadas para ajustar la elevación de partes estructurales o mecánicas. También proporcionan estabilidad a objetos como este tanque.

Una *cuña* es una máquina simple que se usa a menudo para transformar una fuerza aplicada en fuerzas mucho más grandes, dirigidas aproximadamente en ángulo recto con respecto a la fuerza aplicada. Las cuñas también pueden ser usadas para propiciar desplazamientos pequeños o ajustes en cargas pesadas.

Por ejemplo, considere la cuña mostrada en la figura 8-13a, la cual se usa para *levantar* un bloque de peso W aplicando una fuerza P a la cuña. Los diagramas de cuerpo libre de bloque y cuña se muestran en la figura 8-13b. Aquí hemos excluido el peso de la cuña ya que usualmente es *pequeño* comparado con el del bloque. Observe que las fuerzas de fricción F_1 y F_2 deben oponerse al movimiento de la cuña. De la misma manera, la fuerza de fricción F_3 de la pared sobre el bloque debe actuar hacia abajo para oponerse al movimiento hacia arriba del bloque. Las posiciones de las fuerzas normales resultantes no tienen importancia en el análisis de fuerzas ya que ni el bloque ni la cuña se “voltarán”. Por ello, las ecuaciones de equilibrio por momento no serán consideradas. Hay siete incógnitas que consisten en la fuerza aplicada P , necesaria para generar el movimiento de la cuña, y las seis fuerzas normales y de fricción. Las siete ecuaciones disponibles consisten en dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$) aplicadas a la cuña y al bloque (cuatro ecuaciones en total) y la ecuación de fricción $F = \mu N$ aplicada en cada superficie de contacto (tres ecuaciones en total).

Si el bloque debe *descender*, las fuerzas de fricción actuarán en un sentido opuesto al mostrado en la figura 8-13b. La fuerza aplicada P actuará hacia la derecha como se muestra si el coeficiente de fricción es muy *pequeño* o si el ángulo θ de la cuña es *grande*. De otra manera, P puede tener el sentido inverso de dirección para *jalar* en la cuña y retirarla. Si P *no es aplicada*, o $P = 0$, y las fuerzas de fricción mantienen el bloque en su lugar, entonces se dice que la cuña es *autobloqueante*.

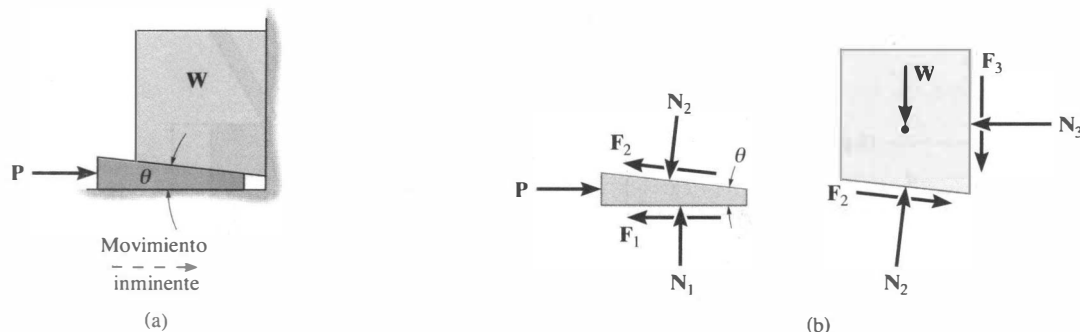


Fig. 8-13

EJEMPLO 8.7

La piedra uniforme que se muestra en la figura 8-14a tiene una masa de 500 kg y es mantenida en posición horizontal usando una cuña en el punto B . Si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$, en las superficies de contacto, determine la fuerza P mínima necesaria para retirar la cuña. ¿Es la cuña autobloqueante? Suponga que la piedra no desliza en el punto A .

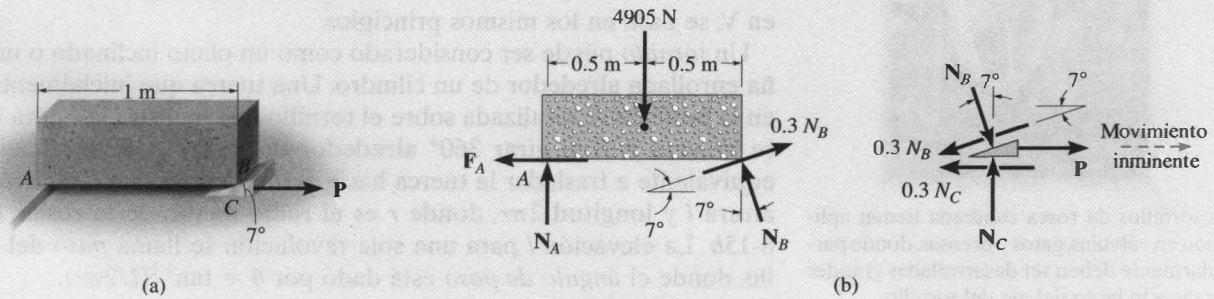


Fig. 8-14

Solución

La fuerza P mínima requiere que $F = \mu_s N$ en las superficies de contacto con la cuña. Los diagramas de cuerpo libre de la piedra y la cuña se muestran en la figura 8-14b. Sobre la cuña, la fuerza de fricción se opone al movimiento, y sobre la piedra en A , $F_A \leq \mu_s N_A$, ya que el deslizamiento no ocurre ahí. Hay cinco incógnitas: F_A , N_A , N_B , N_C y P . Para encontrar la solución se dispone de tres ecuaciones de equilibrio para la piedra y de dos para la cuña. A partir del diagrama de cuerpo libre de la piedra,

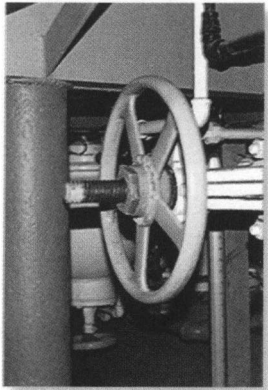
$$\begin{aligned} \zeta + \Sigma M_A = 0; & \quad -4905 \text{ N}(0.5 \text{ m}) + (N_B \cos 7^\circ \text{ N})(1 \text{ m}) \\ & \quad + (0.3N_B \text{ sen } 7^\circ \text{ N})(1 \text{ m}) = 0 \\ N_B = & \quad 2383.1 \text{ N} \end{aligned}$$

Usando este resultado para la cuña, tenemos

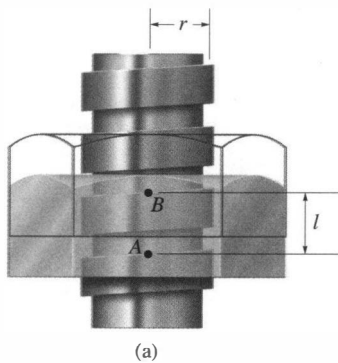
$$\begin{aligned} \pm \Sigma F_x = 0; & \quad 2383.1 \text{ sen } 7^\circ \text{ N} - 0.3(2383.1 \cos 7^\circ \text{ N}) + P - 0.3N_C = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; & \\ N_C - 2383.1 \cos 7^\circ \text{ N} - 0.3(2383.1 \text{ sen } 7^\circ \text{ N}) = 0 & \\ N_C = & \quad 2452.5 \text{ N} \\ P = & \quad 1154.9 \text{ N} = 1.15 \text{ kN} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Como P es positiva, la cuña debe ser extraída. Si P fuese cero, la cuña permanecería en su lugar (autobloqueante) y las fuerzas de fricción desarrolladas en B y C podrían satisfacer $F_B < \mu_s N_B$ y $F_C < \mu_s N_C$.

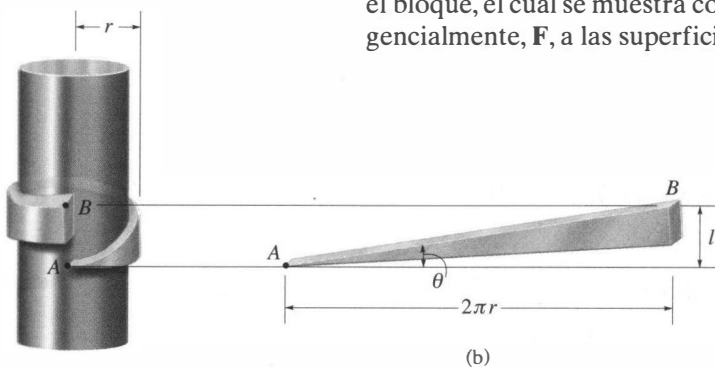
8.4 Fuerzas de fricción en tornillos



Los tornillos de rosca cuadrada tienen aplicación en válvulas, gatos y prensas, donde particularmente deben ser desarrolladas grandes fuerzas a lo largo del eje del tornillo.



(a)



(b)

En la mayoría de los casos los tornillos se usan como sujetadores; sin embargo, en muchos tipos de máquinas son incorporados para transmitir potencia o movimiento desde una parte de una máquina a otra. Un *tornillo de rosca cuadrada* es usado comúnmente para este último fin, sobre todo cuando son aplicadas grandes fuerzas a lo largo de su eje. En esta sección analizaremos las fuerzas que actúan sobre los tornillos de rosca cuadrada. El análisis de otros tipos de tornillos, como el de rosca en V, se basa en los mismos principios.

Un *tornillo* puede ser considerado como un plano inclinado o una cuña enrollada alrededor de un cilindro. Una tuerca que inicialmente está en la posición *A* localizada sobre el tornillo que muestra la figura 8-15a, se moverá a *B* al girar 360° alrededor del tornillo. Esta rotación es equivalente a trasladar la tuerca hacia arriba por un plano inclinado de altura *l* y longitud $2\pi r$, donde *r* es el radio medio de la rosca, figura 8-15b. La elevación *l* para una sola revolución se llama *paso* del tornillo, donde el *ángulo de paso* está dado por $\theta = \tan^{-1}(l/2\pi r)$.

Análisis por fricción. Cuando un tornillo está sometido a grandes fuerzas axiales, las fuerzas desarrolladas en la rosca resultan importantes si se va a determinar el momento M^* necesario para girar el tornillo. Por ejemplo, considere el tornillo de gato de rosca cuadrada mostrado en la figura 8-16, el cual soporta la carga vertical W . Las fuerzas reactivas del gato hacia esta carga realmente están distribuidas sobre la circunferencia de la rosca del tornillo que está en contacto con el orificio del tornillo hecho en el gato, esto es, dentro de la región *h* mostrada en la figura 8-16. Por razones de sencillez, esta porción de rosca puede ser imaginada desenrollándose del tornillo, y representarse como un simple bloque descansando sobre un plano inclinado con el ángulo θ de paso del tornillo, figura 8-17a. Aquí, el plano inclinado representa la *rosca de soporte* interior de la base del gato. Tres fuerzas actúan sobre el bloque o tornillo. La fuerza W es la carga axial total aplicada al tornillo. La fuerza horizontal S es causada por el momento aplicado M , tal que al sumar momentos con respecto al eje del tornillo, $M = Sr$, donde *r* es el radio medio del tornillo. Como resultado de W y S , el plano inclinado ejerce una fuerza resultante R sobre el bloque, el cual se muestra con componentes actuando normal, N , y tangencialmente, F , a las superficies de contacto.

Fig. 8-15

*Para aplicaciones, M es desarrollado aplicando una fuerza horizontal P en ángulo recto al extremo de una palanca fija al tornillo.

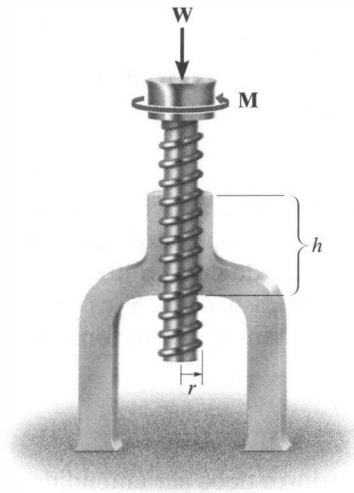


Fig. 8-16

Movimiento del tornillo hacia arriba. Siempre que M sea lo suficientemente grande, el tornillo (y por ello el bloque) puede estar a punto de tener un movimiento inminente o estarse moviendo. Bajo esas condiciones, \mathbf{R} actúa en cierto ángulo $(\theta + \phi)$ desde la vertical como se muestra en la figura 8-17a, donde $\mu = \tan^{-1}(F/N) = \tan^{-1}(\mu N/N) = \tan^{-1}\mu$. Aplicando las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas al bloque, obtenemos

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0; & \quad S - R \operatorname{sen}(\theta + \phi) = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; & \quad R \cos(\theta + \phi) - W = 0 \end{aligned}$$

Al eliminar R y despejar para S , luego se sustituye este valor en la ecuación $M = Sr$, resulta

$$M = Wr \tan(\theta + \phi) \quad (8-3)$$

Como se indicó, M es el momento necesario para causar el movimiento inminente del tornillo hacia arriba, siempre que $\phi = \phi_s = \tan^{-1} \mu_s$ (el ángulo de fricción estática). Si ϕ es reemplazado por $\phi_k = \tan^{-1} \mu_k$ (el ángulo de fricción cinética), la ecuación 8-3 dará un valor menor M necesario para mantener el movimiento del tornillo uniforme hacia arriba.

Movimiento del tornillo hacia abajo ($\theta > \phi$). Si la superficie del tornillo es muy *resbalosa*, es posible que el tornillo gire hacia abajo cuando la magnitud del momento se reduzca a, digamos, $M' < M$. Como se ve en la figura 8-17b, esto causa el efecto de que \mathbf{M}' se vuelva \mathbf{S}' , y requiere que el ángulo ϕ (ϕ_s o ϕ_k) se encuentre sobre el lado opuesto de la normal n al plano que soporta el bloque, tal que $\theta > \phi$. Para este caso, la ecuación 8-3 se convierte en

$$M' = Wr \tan(\theta - \phi) \quad (8-4)$$

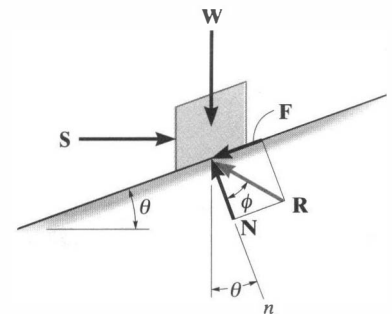
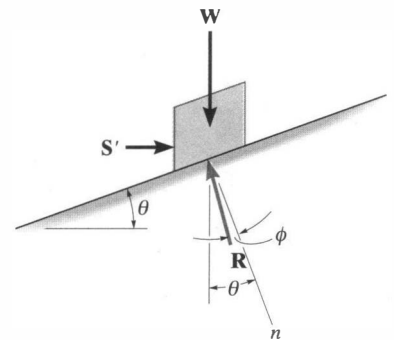
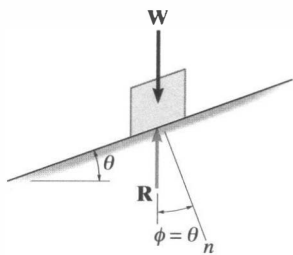
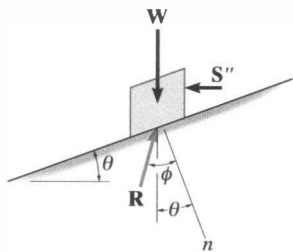

 Movimiento del tornillo hacia arriba
(a)

 Movimiento del tornillo hacia abajo ($\theta > \phi$)
(b)

Fig. 8-17



Tornillo autobloqueante ($\theta = \phi$)
(a punto de girar hacia abajo)

(c)



Movimiento del tornillo hacia abajo ($\theta < \phi$)

(d)

Tornillo autobloqueante. Si el momento M (o su efecto S) es *retirado*, el tornillo permanecerá *autobloqueado*; esto es, soportará la carga W sólo por *fuerzas de fricción* siempre que $\phi \geq \theta$. Para mostrar esto, considere el caso límite necesario en que $\phi = \theta$, figura 8-17c. Aquí el equilibrio vertical se mantiene ya que R es vertical y equilibra a W .

Movimiento del tornillo hacia abajo ($\theta < \phi$). Cuando la superficie del tornillo es *muy rugosa*, el tornillo no girará hacia abajo como se describió. En vez de eso, la dirección del momento aplicado debe *invertirse* para generar el movimiento. El diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 8-17d es representativo de este caso. Aquí, S'' es causado por el momento aplicado (invertido) M'' . Por tanto, la ecuación 8-3 toma la forma

$$M'' = Wr \tan(\phi - \theta) \quad (8-5)$$

Cada uno de los casos anteriores debe ser entendido perfectamente antes de proceder a resolver problemas.

Fig. 8-17

EJEMPLO 8.8

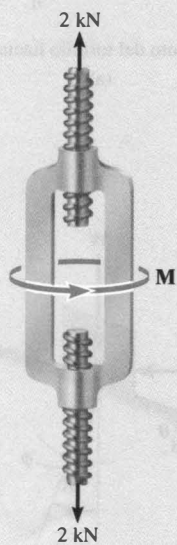


Fig. 8-18

El tensor mostrado en la figura 8-18 tiene una cuerda cuadrada con radio medio de 5 mm y paso de 2 mm. Si el coeficiente de fricción estática entre el tornillo y el tensor es $\mu_s = 0.25$, determine el momento M que debe aplicarse para acercar los extremos de los tornillos. ¿El tensor es autobloqueante?

Solución

El momento se puede obtener usando la ecuación 8-3. ¿Por qué? Como la fricción debe ser vencida en *dos tornillos*, esto requiere

$$M = 2[Wr \tan(\theta + \phi)] \quad (1)$$

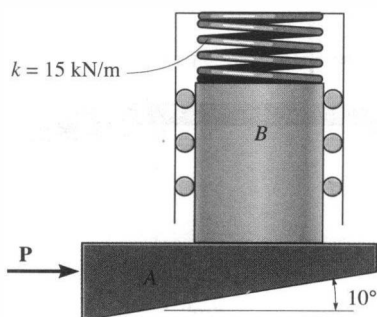
Aquí $W = 2000 \text{ N}$, $r = 5 \text{ mm}$, $\phi_s = \tan^{-1} \mu_s = \tan^{-1}(0.25) = 14.04^\circ$, y $\theta = \tan^{-1}(l/2\pi r) = \tan^{-1}(2 \text{ mm}/[2\pi(5 \text{ mm})]) = 3.64^\circ$. Sustituyendo estos valores en la ecuación 1 y resolviendo se obtiene

$$M = 2[(2000 \text{ N})(5 \text{ mm}) \tan(14.04^\circ + 3.64^\circ)] = 6374.7 \text{ N} \cdot \text{mm} = 6.37 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Cuando el momento sea *retirado*, el tensor será autobloqueante; esto es, no se desatornillará ya que $\phi_s > \theta$.

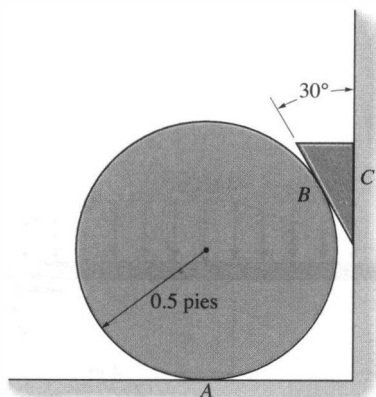
PROBLEMAS

8-62. Determine la fuerza mínima aplicada \mathbf{P} que se requiere para mover la cuña A hacia la derecha. El resorte está comprimido una distancia de 175 mm. Ignore el peso de A y B . El coeficiente de fricción estática para todas las superficies en contacto es $\mu_s = 0.35$. Ignore la fricción en los rodillos.



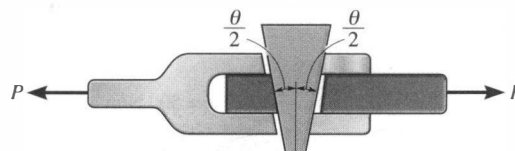
Prob. 8-62

8-63. Determine el peso más grande de la cuña que puede colocarse entre el cilindro de 8 lb y la pared sin perturbar el equilibrio. El coeficiente de fricción estática en A y C es $\mu_s = 0.5$, y en B , $\mu'_s = 0.6$.



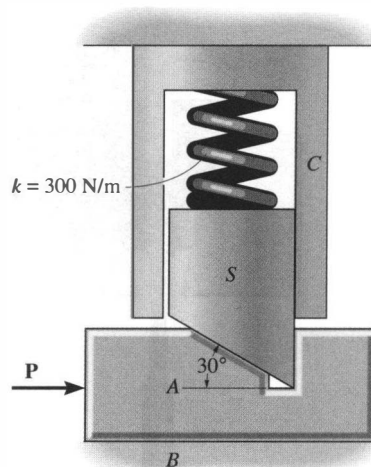
Prob. 8-63

*8-64. La cuña tiene peso insignificante y un coeficiente de fricción estática $\mu_s = 0.35$ con todas las superficies en contacto. Determine el ángulo θ más grande posible de manera que sea "autobloqueante". Esto no implica deslizamiento alguno para cualquier magnitud de la fuerza \mathbf{P} aplicada al nudo.



Prob. 8-64

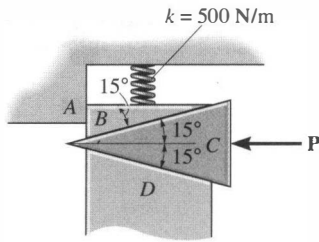
8-65. Si el resorte está comprimido 60 mm y el coeficiente de fricción estática entre la pieza ahusada S y el deslizador A es $\mu_{sA} = 0.5$, determine la fuerza \mathbf{P} horizontal necesaria para mover el deslizador hacia delante. La pieza ahusada puede moverse libremente sin fricción dentro del collar fijo C . El coeficiente de fricción estática entre A y la superficie B es $\mu_{AB} = 0.4$. Ignore los pesos del deslizador y la pieza ahusada.



Prob. 8-65

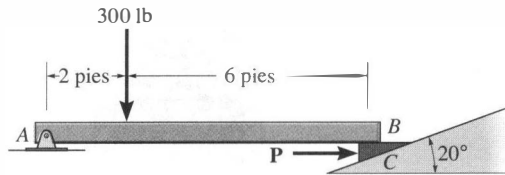
8-66. El coeficiente de fricción estática entre las cuñas B y C es $\mu_s = 0.6$, y entre las superficies de contacto B y A y C y D es $\mu'_s = 0.4$. Si el resorte está comprimido 200 mm en la posición mostrada, determine la fuerza P más pequeña necesaria para mover la cuña C hacia la izquierda. Ignore el peso de las cuñas.

8-67. El coeficiente de fricción estática entre las cuñas B y C es $\mu_s = 0.6$, y entre las superficies de contacto B y A y C y D es $\mu'_s = 0.4$. Si $P = 50$ N, determine la compresión más grande permisible del resorte sin que la cuña C se mueva hacia la izquierda. Ignore el peso de las cuñas.



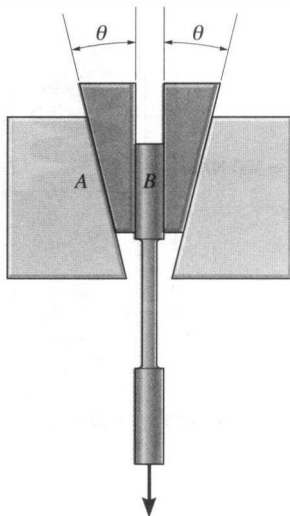
Probs. 8-66 / 67

8-69. La viga está ajustada a la posición horizontal por medio de una cuña localizada en su soporte derecho. Si el coeficiente de fricción estática entre la cuña y las dos superficies de contacto es $\mu_s = 0.25$, determine la fuerza horizontal P requerida para empujar la cuña hacia delante. Ignore el peso y el tamaño de la cuña y el espesor de la viga.



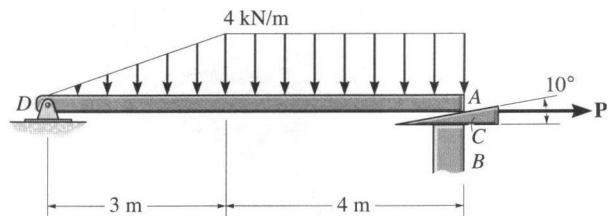
Prob. 8-69

***8-68.** Los bloques de cuña se usan para sostener el espécimen en una máquina de pruebas a tensión. Determine el ángulo θ de diseño de las cuñas de manera que el espécimen no se deslice cualquiera que sea la carga aplicada. Los coeficientes de fricción estática son $\mu_A = 0.1$ en A y $\mu_B = 0.6$ en B . Ignore el peso de los bloques.



Prob. 8-68

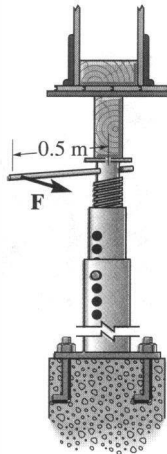
8-70. Si la viga AD está cargada como se muestra, determine la fuerza horizontal P que debe aplicarse a la cuña para quitarla de bajo la viga. Los coeficientes de fricción estática en las superficies superior e inferior de la cuña son $\mu_{CA} = 0.25$ y $\mu_{CB} = 0.35$, respectivamente. Si $P = 0$, ¿es la cuña autobloqueante? Ignore el peso y el tamaño de la cuña y el espesor de la viga.



Prob. 8-70

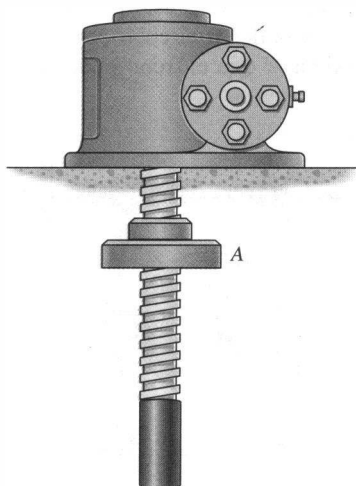
8-71. La columna se usa para soportar el piso superior. Si una fuerza $F = 80 \text{ N}$ se aplica perpendicularmente a la manija para apretar el tornillo, determine la fuerza de compresión en la columna. El tornillo de rosca cuadrada sobre el gato tiene un coeficiente de fricción estática de $\mu_s = 0.4$, diámetro medio de 25 mm y paso de 3 mm .

***8-72.** Si la fuerza F se retira de la manija del gato en el problema 8-71, determine si el tornillo es autobloqueante.



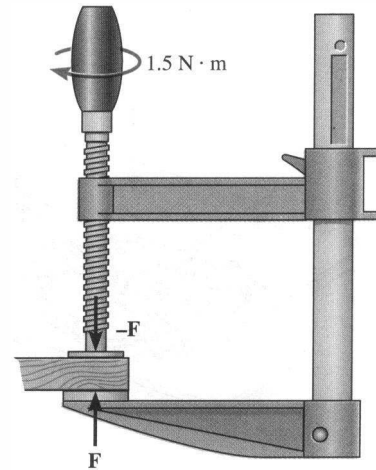
Probs. 8-71/72

8-73. El tornillo de rosca cuadrada tiene un diámetro medio de 20 mm y paso de 4 mm . Si el peso de la placa A es de 5 lb , determine el coeficiente de fricción estática más pequeño entre el tornillo y la placa de manera que la placa no descienda por el tornillo cuando está suspendida como se muestra.



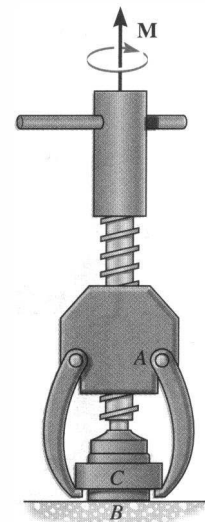
Prob. 8-73

8-74. El tornillo de rosca cuadrada de la prensa tiene un diámetro medio de 14 mm y paso de 6 mm . Si $\mu_s = 0.2$ para las roscas, y el par aplicado a la manija es de $1.5 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine la fuerza de compresión F sobre el bloque.



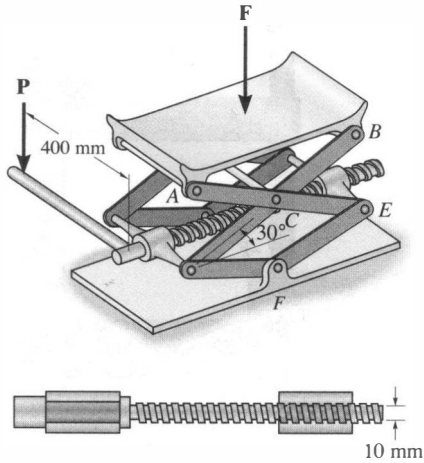
Prob. 8-74

8-75. El dispositivo se usa para extraer la terminal del cable de la batería C del poste de una batería. Si la fuerza de extracción requerida es de 85 lb , determine el par M que debe ser aplicada a la manija localizada sobre el tornillo para apretarlo. El tornillo tiene roscas cuadradas, diámetro medio de 0.2 pulg , paso de 0.08 pulg , y el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.5$.



Prob. 8-75

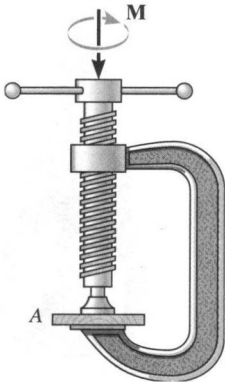
*8-76. El gato de automóvil está sometido a una carga vertical de $F = 8 \text{ kN}$. Si un tornillo de rosca cuadrada, con paso de 5 mm y diámetro medio de 10 mm es usado en el gato, determine la fuerza que debe ser aplicada perpendicularmente a la manija para (a) elevar la carga, y (b) bajar la carga; $\mu_s = 0.2$. La placa de soporte ejerce sólo fuerzas verticales en A y B .



Prob. 8-76

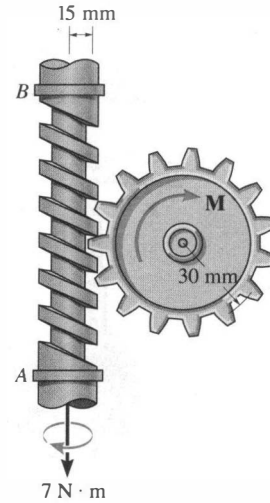
8-77. Determine la fuerza de prensado sobre la tabla A si el tornillo de la prensa "C" es apretado con un giro de $M = 8 \text{ N} \cdot \text{m}$. El tornillo simple de rosca cuadrada tiene radio medio de 10 mm , paso de 3 mm , y el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.35$.

8-78. Si la fuerza de prensado requerida en la tabla A es de 50 N , determine el par M que debe ser aplicado a la manija de la prensa "C" para apretarla hacia abajo. El tornillo simple de rosca cuadrada tiene radio medio de 10 mm , paso de 3 mm , y su coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.35$.



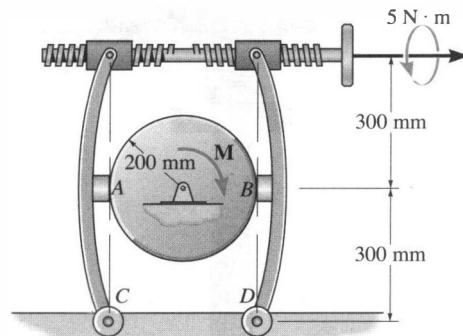
Probs. 8-77/78

8-79. La flecha tiene un tornillo de rosca cuadrada con paso de 8 mm y radio medio de 15 mm . Si está en contacto con una placa engranada con radio medio de 30 mm , determine la torca resistente M sobre la placa que puede ser vencido si se aplica a la flecha una torca de $7 \text{ N} \cdot \text{m}$. El coeficiente de fricción estática en el tornillo es $\mu_B = 0.2$. Ignore la fricción de las chumaceras localizadas en A y B .



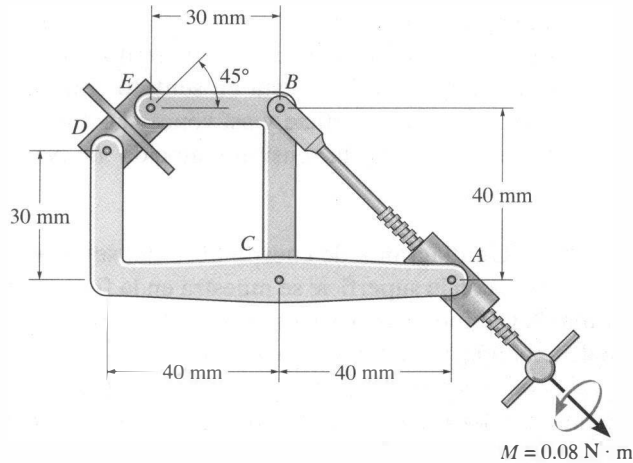
Prob. 8-79

*8-80. El mecanismo de frenado consiste en dos brazos articulados y un tornillo de cuerdas cuadradas con cuerdas izquierdas y derechas. Cuando es girado, el tornillo acerca los dos brazos. Si el paso del tornillo es de 4 mm , el diámetro medio de 12 mm , y el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.35$, determine la tensión en el tornillo cuando se le aplica una torca de $5 \text{ N} \cdot \text{m}$ para apretarlo. Si el coeficiente de fricción estática entre las zapatas de frenado A y B y la flecha circular es $\mu'_s = 0.5$, determine la torca máxima M que el freno puede resistir.



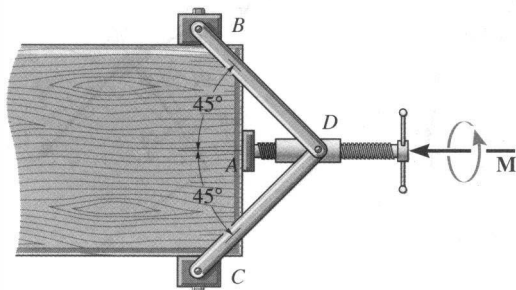
Prob. 8-80

8-81. La prensa que se muestra consiste en un tornillo de rosca cuadrada con coeficiente de fricción estática $\mu_s = 0.3$, diámetro medio de 3 mm y paso de 1 mm. Los cinco puntos indicados son conexiones de pasador. Determine la fuerza de prensado en los bloques lisos D y E cuando se aplica una torca de $M = 0.08 \text{ N} \cdot \text{m}$ a la manija del tornillo.



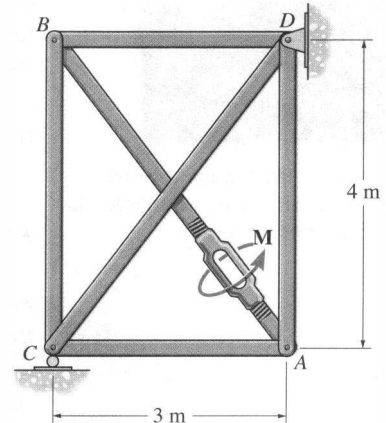
Prob. 8-81

8-82. La prensa proporciona presión desde varias direcciones sobre los bordes de la tabla. Si el tornillo de rosca cuadrada tiene un paso de 3 mm, radio de 10 mm, y su coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.4$, determine la fuerza horizontal desarrollada sobre la tabla en A y las fuerzas verticales desarrolladas en B y C cuando se aplica una torca de $M = 1.5 \text{ N} \cdot \text{m}$ a la manija para apretarla más aún. Los bloques en B y C están conectados a la tabla mediante pasadores.



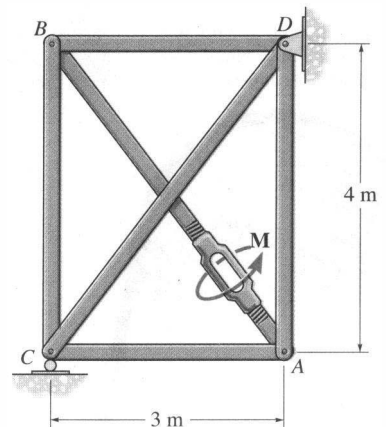
Prob. 8-82

8-83. Un tensor, similar al mostrado en la figura 8-18, se usa para estirar el miembro AB de la armadura. El coeficiente de fricción estática entre los tornillos de rosca cuadrada y el tensor es $\mu_s = 0.5$. Los tornillos tienen radio medio de 6 mm y paso de 3 mm. Si una torca de $M = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$ es aplicada al tensor, para acercar los tornillos entre sí, determine la fuerza en cada miembro de la armadura. Ninguna fuerza externa actúa sobre la armadura.



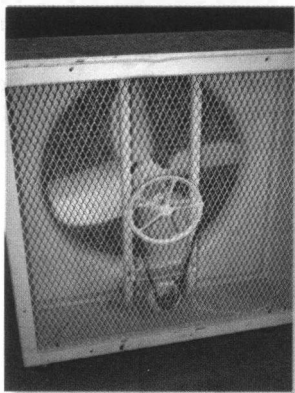
Prob. 8-83

*8-84. Un tensor, similar al mostrado en la figura 8-18, se usa para estirar el miembro AB de la armadura. El coeficiente de fricción estática entre los tornillos de rosca cuadrada y el tensor es $\mu_s = 0.5$. Los tornillos tienen radio medio de 6 mm y paso de 3 mm. Determine la torca M que debe ser aplicada al tensor para acercar los tornillos entre sí, de manera que una fuerza de compresión de 500 N sea desarrollada en el miembro BC .



Prob. 8-84

8.5 Fuerzas de fricción sobre bandas planas



Las bandas planas o las bandas V se usan a menudo para transmitir a un ventilador la torca desarrollada por un motor.

Cuando se diseñan bandas impulsoras o de frenado, es necesario determinar las fuerzas de fricción desarrolladas entre la banda y su superficie de contacto. En esta sección analizaremos las fuerzas de fricción que actúan en una banda plana, aunque el análisis de otros tipos de bandas, como la banda V, se basa en principios similares.

Aquí consideraremos la banda plana mostrada en la figura 8-19a, la cual pasa sobre una superficie curva fija, de manera que el ángulo total de contacto entre la banda y la superficie es β en radianes y el coeficiente de fricción entre las dos superficies es μ . Determinaremos la tensión T_2 que es necesaria en la banda para jalar ésta en sentido contrario al de las manecillas del reloj sobre la superficie y así vencer las fuerzas de fricción en la superficie de contacto y la tensión conocida T_1 . Naturalmente, $T_2 > T_1$.

Análisis por fricción. Un diagrama de cuerpo libre del segmento de banda que está en contacto con la superficie se muestra en la figura 8-19b. Aquí la fuerza normal N y la fuerza de fricción F , actuando en puntos diferentes a lo largo de la banda, variarán en magnitud y dirección. Debido a esta distribución *desconocida* de la fuerza, el análisis del problema se resolverá inicialmente con base en el estudio de las fuerzas que actúan sobre un elemento diferencial de la banda.

Un diagrama de cuerpo libre de un elemento con longitud ds se muestra en la figura 8-19c. Suponiendo movimiento inminente o movimiento de la banda, la magnitud de la fuerza de fricción $dF = \mu dN$. Esta fuerza se opone al movimiento deslizante de la banda y por ello aumenta la magnitud de la fuerza de tensión que actúa en la banda mediante dT . Aplicando las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas, tenemos

$$\sum F_x = 0; \quad T \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + \mu dN - (T + dT) \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

$$\sum F_y = 0; \quad dN - (T + dT) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - T \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

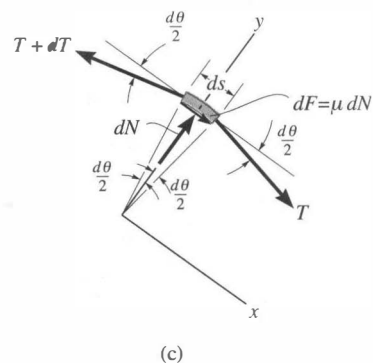
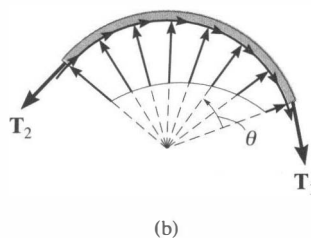
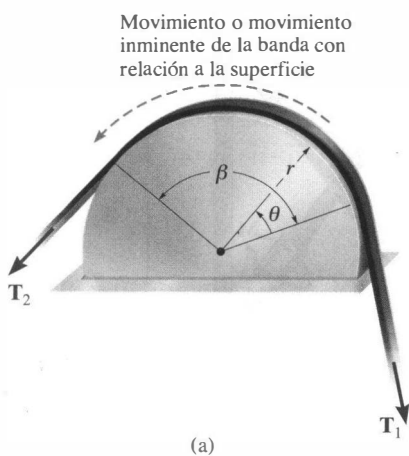


Fig. 8-19

Como $d\theta$ es de *tamaño infinitesimal*, $\sin(d\theta/2)$ y $\cos(d\theta/2)$ pueden ser reemplazados por $d\theta/2$ y 1, respectivamente. Además, el *producto* de los dos infinitesimales dT y $d\theta/2$ puede ser ignorado al compararlo con infinitesimales de primer orden. Por tanto, las dos ecuaciones anteriores se reducen a

$$\mu dN = dT$$

y

$$dN = T d\theta$$

Al eliminar dN resulta

$$\frac{dT}{T} = \mu d\theta$$

Integrando esta ecuación entre todos los puntos de contacto que la banda tiene con el tambor, y observando que $T = T_1$ en $\theta = 0$ y $T = T_2$ en $\theta = \beta$, resulta

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^\beta d\theta$$

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu\beta$$

Despejando para T_2 , obtenemos

$$T_2 = T_1 e^{\mu\beta} \quad (8-6)$$

donde T_2, T_1 = tensiones en la banda; T_1 se opone a la dirección del movimiento (o movimiento inminente) de la banda medido con relación a la superficie, mientras que T_2 actúa en la dirección del movimiento relativo de la banda (o movimiento inminente); debido a la fricción, $T_2 > T_1$.

μ = coeficiente de fricción estática o cinética entre la banda y la superficie de contacto.

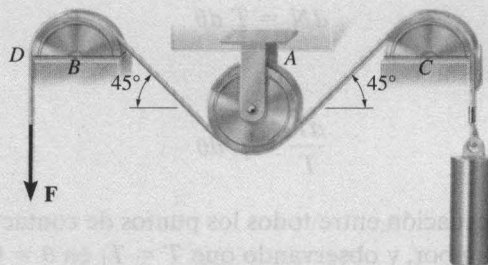
β = ángulo entre la banda y la superficie de contacto, medido en radianes.

$e = 2.718\dots$, base de los logaritmos naturales.

Observe que T_2 es *independiente* del *radio* del tambor y que es una función del ángulo de contacto entre la banda y la superficie, β . Además, como lo indica la integración, esta ecuación es válida para bandas planas colocadas sobre *cualquier forma* de superficie de contacto. Para las aplicaciones, la ecuación 8-6 es válida sólo cuando ocurre el *movimiento* o el *movimiento es inminente*.

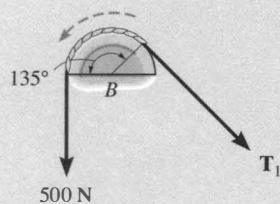
EJEMPLO 8.9

La tensión máxima que puede ser desarrollada en la cuerda mostrada en la figura 8-20a es de 500 N. Si la polea en A puede girar libremente y el coeficiente de fricción estática en los tambores fijos B y C es $\mu_s = 0.25$, determine la masa más grande que puede tener el cilindro y ser levantado por la cuerda. Suponga que la fuerza F aplicada en el extremo de la cuerda está dirigida verticalmente hacia abajo, como se muestra.



(a)

Movimiento inminente



(b)

Solución

Levantar el cilindro, que tiene un peso $W = mg$, ocasiona que la cuerda se mueva en sentido contrario al de las manecillas del reloj sobre los tambores localizados en B y C ; por tanto, la tensión máxima T_2 en la cuerda ocurre en D . Así, $T_2 = 500$ N. Una sección de la cuerda que pasa sobre el tambor en B se muestra en la figura 8-20b. Como $180^\circ = \pi$ rad, el ángulo de contacto entre el tambor y la cuerda es $\beta = (135^\circ/180^\circ)\pi = 3\pi/4$ rad. Usando la ecuación 8-6, tenemos

$$T_2 = T_1 e^{\mu_s \beta}; \quad 500 \text{ N} = T_1 e^{0.25[(3/4)\pi]}$$

Por consiguiente,

$$T_1 = \frac{500 \text{ N}}{e^{0.25[(3/4)\pi]}} = \frac{500 \text{ N}}{1.80} = 277.4 \text{ N}$$

Como la polea ubicada en A puede girar libremente, el equilibrio requiere que la tensión en la cuerda permanezca *igual* en ambos lados de la polea.

La sección de la cuerda que pasa sobre el tambor en C se muestra en la figura 8-20c. El peso $W < 277.4$ N. ¿Por qué? Aplicando la ecuación 8-6, obtenemos

$$T_2 = T_1 e^{\mu_s \beta}; \quad 277.4 \text{ N} = W e^{0.25[(3/4)\pi]}$$

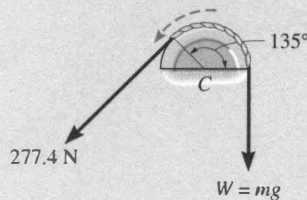
$$W = 153.9 \text{ N}$$

de modo que

$$m = \frac{W}{g} = \frac{153.9 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2}$$

$$= 15.7 \text{ kg}$$

Movimiento inminente



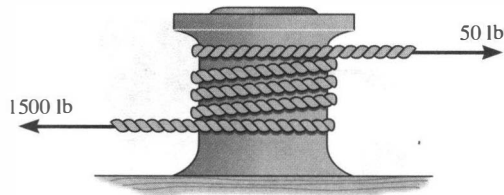
(c)

Fig. 8-20

Resp.

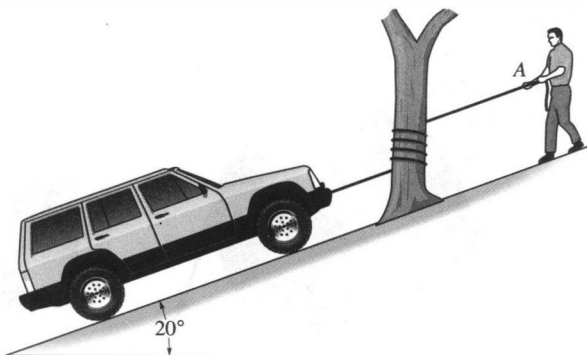
PROBLEMAS

8-85. Un cable es enrollado alrededor de un bolardo fijo para asegurar un buque durante su amarre. Si la tensión en la cuerda, causada por el buque, es de 1500 lb, determine el número mínimo de vueltas completas que debe tener la cuerda alrededor del bolardo para impedir el deslizamiento de la cuerda. La fuerza horizontal más grande que un estibador puede ejercer sobre la cuerda es de 50 lb. El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$.



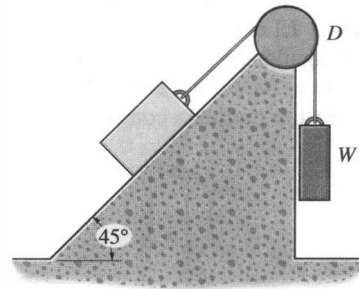
Prob. 8-85

8-86. El camión, que tiene una masa de 3.4 Mg, va a ser bajado por la pendiente usando una cuerda que está enrollada alrededor de un árbol. Si las ruedas pueden girar libremente y el hombre en A puede resistir un jalón de 300 N, determine el número mínimo de vueltas que la cuerda debe enrollarse alrededor del árbol para bajar el camión con velocidad constante. El coeficiente de fricción cinética entre el árbol y la cuerda es $\mu_k = 0.3$.



Prob. 8-86

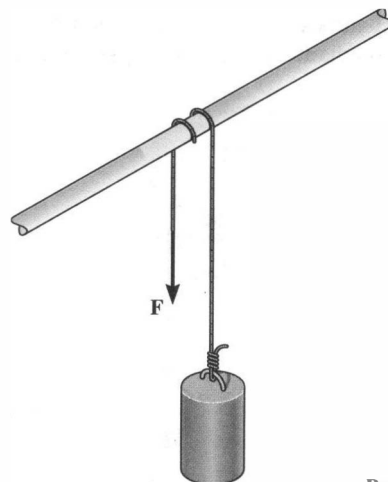
8-87. Determine los valores máximo y mínimo del peso W que pueden ser aplicados sin que el bloque de 50 lb se deslice. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano es $\mu_s = 0.2$, y entre la cuerda y el tambor D es $\mu_s' = 0.3$.



Prob. 8-87

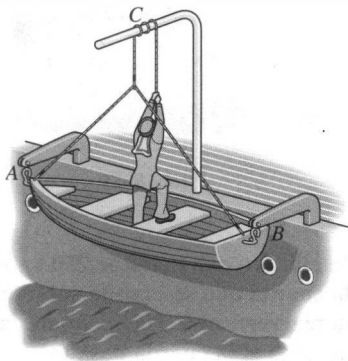
***8-88.** Un cilindro con masa de 250 kg va a ser soportado por la cuerda que se enrolla sobre el tubo. Determine la fuerza vertical F más pequeña necesaria para soportar la carga si la cuerda pasa (a) una vez sobre el tubo, $\beta = 180^\circ$, y (b) dos veces sobre el tubo, $\beta = 540^\circ$. Considere $\mu_s = 0.2$.

8-89. Un cilindro con masa de 250 kg debe ser soportado por una cuerda que se enrolla sobre el tubo. Determine la fuerza vertical F más grande que puede aplicarse a la cuerda sin que se mueva el cilindro. La cuerda pasa (a) una vez sobre el tubo, $\beta = 180^\circ$, y (b) dos veces sobre el tubo, $\beta = 540^\circ$. Considere $\mu_s = 0.2$.



Probs. 8-88/89

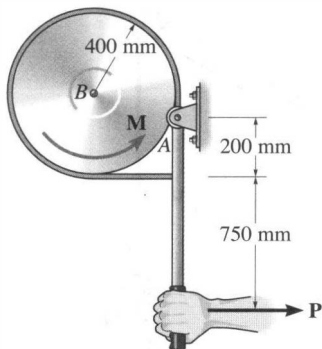
8-90. El bote tiene un peso de 500 lb y es mantenido en posición a un lado del barco mediante los pescantes situados en *A* y *B*. Un hombre con peso de 130 lb, y que está de pie en el bote, enrolla una cuerda alrededor de un aguilón situado en lo alto en el punto *C* y lo une al extremo del bote como se muestra. Si el bote es desconectado de los pescantes, determine el *número mínimo de medias vueltas* que la cuerda debe tener alrededor del aguilón para que el bote pueda ser bajado con seguridad al agua a velocidad constante. ¿Cuál es la fuerza normal entre el bote y el hombre? El coeficiente de fricción cinética entre la cuerda y el aguilón es $\mu_s = 0.15$. *Sugerencia:* El problema requiere que la fuerza normal entre los pies del hombre y el bote sea tan pequeña como sea posible.



Prob. 8-90

8-91. Determine la fuerza *P* más pequeña que es necesaria en la palanca para impedir que la rueda gire cuando está sometida a una torca $M = 250 \text{ N} \cdot \text{m}$. El coeficiente de fricción estática entre la banda y la rueda es $\mu_s = 0.3$. La rueda está conectada mediante un pasador en su centro, *B*.

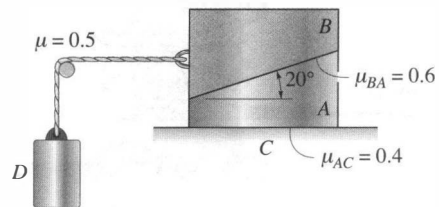
***8-92.** Determine el par *M* que puede ser resistido por el freno de mano si una fuerza $P = 30 \text{ N}$ es aplicada al mango de la palanca. El coeficiente de fricción estática entre la banda y la rueda es $\mu_s = 0.3$. La rueda está conectada mediante un pasador en su centro, *B*.



Probs. 8-91/92

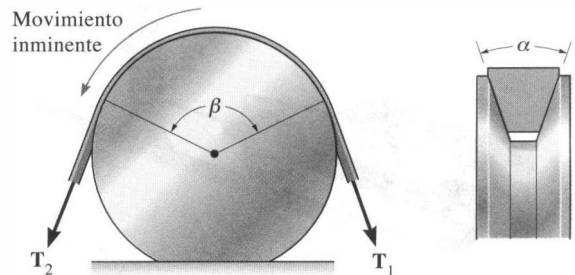
8-93. Los bloques *A* y *B* pesan 50 y 30 lb, respectivamente. Usando los coeficientes de fricción estática indicados, determine el peso más grande del bloque *D* que no genere movimiento.

8-94. Los bloques *A* y *B* pesan 75 lb cada uno, y *D* pesa 30 lb. Usando los coeficientes de fricción estática indicados, determine la fuerza de fricción entre los bloques *A* y *B* y entre el bloque *A* y el piso *C*.



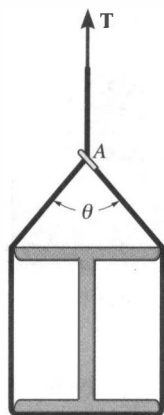
Probs. 8-93/94

8-95. Demuestre que la relación friccional entre las tensiones en la banda, el coeficiente μ y los contactos angulares α y β para la banda en V es $T_2 = T_1 e^{\mu\beta/\sin(\alpha/2)}$.



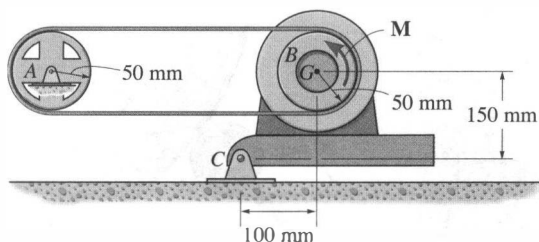
Prob. 8-95

***8-96.** La viga lisa está siendo levantada usando una cuerda enrollada a su alrededor y que pasa por un anillo localizado en A como se muestra. Si el extremo de la cuerda está sometido a una tensión T y el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y el anillo es $\mu_s = 0.3$, determine el ángulo θ por equilibrio.



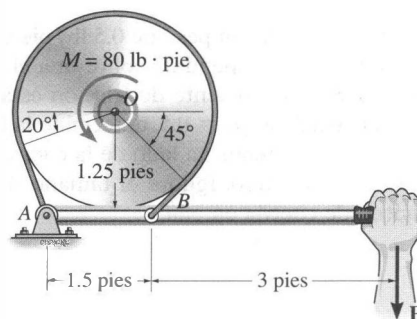
Prob. 8-96

8-97. El motor de 20 kg tiene su centro de gravedad en G y está conectado en C mediante un pasador para mantener cierta tensión en la banda impulsora. Determine el par M más pequeño, y con sentido contrario al de las manecillas del reloj, que debe ser suministrada por el motor para hacer girar el disco B si la rueda A se traba y causa que la banda se deslice sobre el disco. En A no ocurre deslizamiento. El coeficiente de fricción estática entre la banda y el disco es $\mu_s = 0.3$.



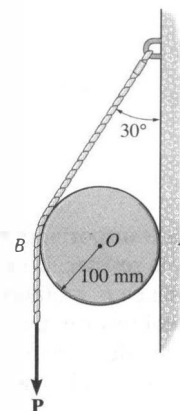
Prob. 8-97

8-98. El freno simple de banda está construido de manera que los extremos de la banda de fricción se conectan al pasador en A y al brazo de palanca en B . Si la rueda está sometida a una torca de $M = 80 \text{ lb} \cdot \text{pie}$, determine la fuerza P más pequeña que es aplicada a la palanca requerida para mantener la rueda estacionaria. El coeficiente de fricción estática entre la banda y la rueda es $\mu_s = 0.5$.



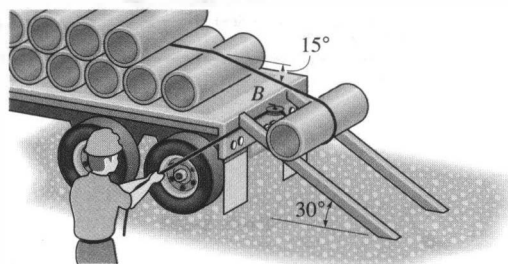
Prob. 8-98

8-99. El cilindro pesa 10 lb y es mantenido en equilibrio por la banda y la pared. Si no ocurre deslizamiento en la pared, determine la fuerza vertical P mínima que debe aplicarse a la banda por equilibrio. El coeficiente de fricción estática entre la banda y el cilindro es $\mu_s = 0.25$.



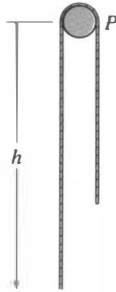
Prob. 8-99

***8-100.** El tubo uniforme de concreto tiene un peso de 800 lb y es descargado lentamente de la cama del camión usando la cuerda y las barras inclinadas mostradas. Si el coeficiente de fricción cinética entre la cuerda y el tubo es $\mu_k = 0.3$, determine la fuerza que el trabajador debe ejercer sobre la cuerda para bajar el tubo a velocidad constante. Hay una polea en B , y el tubo no se desliza sobre las barras. La porción inferior de la cuerda es paralela a las barras inclinadas.



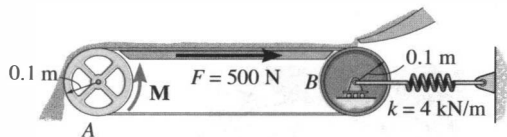
Prob. 8-100

8-101. Una cuerda con peso de 0.5 lb/pie y longitud total de 10 pies está suspendida sobre una clavija P como se muestra. Si el coeficiente de fricción estática entre la clavija y la cuerda es $\mu_s = 0.5$, determine la longitud más larga h que puede tener un lado de la cuerda suspendida sin causar movimiento. Ignore el tamaño de la clavija y la longitud de cuerda en ella.



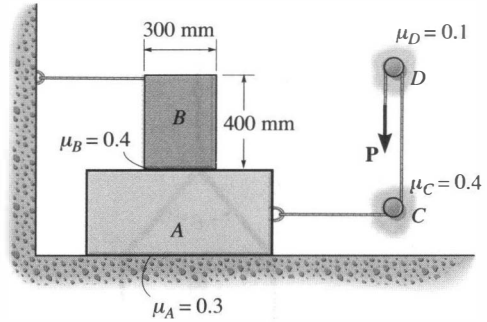
Prob. 8-101

8-102. Una banda transportadora se usa para transferir material granular y la resistencia de fricción sobre la parte superior de la banda es $F = 500$ N. Determine el alargamiento más corto del resorte que está unido al eje móvil de la polea de guía B , de manera que la banda no resbale en la polea impulsora A cuando se aplica la torca M . ¿Qué torca mínima M se requiere para mantener la banda en movimiento? El coeficiente de fricción estática entre la banda y la rueda ubicada en A es $\mu_s = 0.2$.



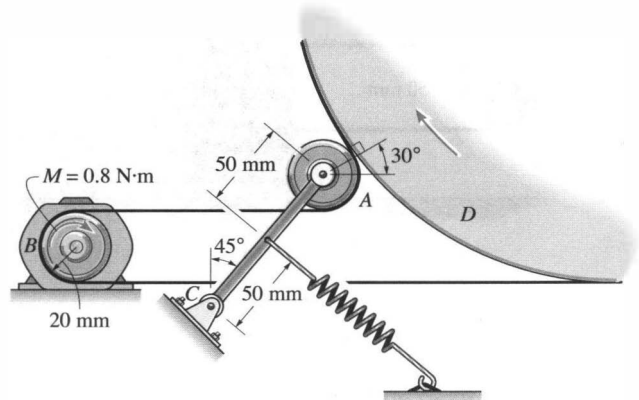
Prob. 8-102

8-103. Los bloques A y B tienen masas de 7 y 10 kg, respectivamente. Usando los coeficientes de fricción estática indicados, determine la fuerza P vertical más grande que se puede aplicar a la cuerda sin que se genere movimiento.



Prob. 8-103

***8-104.** La banda sobre el secador portátil se enrolla alrededor del tambor D , de la polea guía A y de la polea del motor B . Si el motor puede desarrollar un par máximo de $M = 0.80$ N · m, determine la tensión más pequeña requerida en el resorte para impedir que la banda se deslice. El coeficiente de fricción estática entre la banda y el tambor y la polea del motor es $\mu_s = 0.3$.



Prob. 8-104

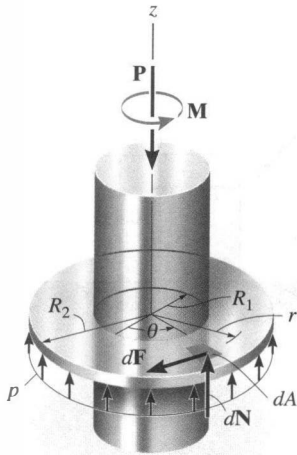


Fig. 8-22

Análisis por fricción. La chumacera de collar que se utiliza en la flecha mostrada en la figura 8-22 está sometida a una fuerza axial P y tiene un área de contacto o de apoyo $\pi(R_2^2 - R_1^2)$. En el siguiente análisis, la presión normal p es considerada *uniformemente distribuida* sobre esta área —lo cual es una suposición razonable si la chumacera es nueva y está soportada uniformemente—. Como $\Sigma F_z = 0$, entonces p , medida como una fuerza por unidad de área, es $p = P/\pi(R_2^2 - R_1^2)$.

El momento necesario para causar un rotación inminente de la flecha puede ser determinado a partir del equilibrio por momento con respecto al eje z . Un pequeño elemento de área $dA = (r d\theta)(dr)$, mostrado en la figura 8-22, está sometido a una fuerza normal $dN = p dA$ y a una fuerza de fricción asociada,

$$dF = \mu_s dN = \mu_s p dA = \frac{\mu_s P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} dA$$

La fuerza normal no genera un momento con respecto al eje z de la flecha; sin embargo, la fuerza de fricción sí lo hace y es $dM = r dF$. La integración es necesaria para calcular el momento total creado por todas las fuerzas de fricción que actúan sobre áreas diferenciales dA . Por tanto, para un movimiento rotacional inminente,

$$\Sigma M_z = 0; \quad M - \int_A r dF = 0$$

Al sustituir para dF y dA e integrar sobre toda el área de apoyo obtenemos

$$M = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} r \left[\frac{\mu_s P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \right] (r d\theta dr) = \frac{\mu_s P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

o bien,

$$M = \frac{2}{3} \mu_s P \left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} \right) \quad (8-7)$$

Esta ecuación da la magnitud del momento requerido para la rotación inminente de la flecha. El momento de fricción desarrollado en el extremo de la flecha, al girar ésta con rapidez constante, puede encontrarse sustituyendo μ_k por μ_s en la ecuación 8.7.

Cuando $R_2 = R$ y $R_1 = 0$, como en el caso de una chumacera de pivote, figura 8-21a, la ecuación 8-7 se reduce a

$$M = \frac{2}{3} \mu_s PR \quad (8-8)$$

A partir de la hipótesis inicial, recuerde que tanto la ecuación 8-7 como la 8-8 se aplican sólo a superficies de apoyo sometidas a *presión constante*. Si la presión no es uniforme, una variación de la presión como función del área de apoyo debe ser determinada antes de integrar para obtener el momento. El siguiente ejemplo ilustra este concepto.



Las fuerzas de fricción que actúan sobre el disco de esta pulidora deben ser vencidas mediante la torca desarrollada por el motor que la hace girar.

EJEMPLO 8.10

La barra uniforme mostrada en la figura 8-23a tiene una masa total m . Si se supone que la presión normal que actúa en la superficie de contacto varía linealmente a lo largo de la longitud de la barra como se muestra, determine el momento de par M requerido para girar la barra. Suponga que el ancho a de la barra es insignificante en comparación con su longitud l . El coeficiente de fricción estática es igual a μ_s .

Solución

En la figura 8-23b se muestra un diagrama de cuerpo libre de la barra. Como ésta tiene un peso total de $W = mg$, la intensidad w_0 de la carga distribuida en el centro ($x = 0$) es determinada a partir del equilibrio de fuerzas verticales, figura 8-23a.

$$+\uparrow \Sigma F_z = 0; \quad -mg + 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{l}{2} \right) w_0 \right] = 0 \quad w_0 = \frac{2mg}{l}$$

Como $w = 0$ en $x = l/2$, la carga distribuida expresada como función de x es

$$w = w_0 \left(1 - \frac{2x}{l} \right) = \frac{2mg}{l} \left(1 - \frac{2x}{l} \right)$$

La magnitud de la fuerza normal que actúa sobre un segmento de área con longitud dx es entonces

$$dN = w dx = \frac{2mg}{l} \left(1 - \frac{2x}{l} \right) dx$$

La magnitud de la fuerza de fricción que actúa sobre el mismo elemento de área es

$$dF = \mu_s dN = \frac{2\mu_s mg}{l} \left(1 - \frac{2x}{l} \right) dx$$

Por tanto, el momento generado por esta fuerza con respecto al eje z es

$$dM = x dF = \frac{2\mu_s mg}{l} x \left(1 - \frac{2x}{l} \right) dx$$

La suma de momentos con respecto al eje z de la barra es determinada por integración, lo que resulta en

$$\begin{aligned} \Sigma M_z = 0; \quad M - 2 \int_0^{l/2} \frac{2\mu_s mg}{l} x \left(1 - \frac{2x}{l} \right) dx &= 0 \\ M = \frac{4\mu_s mg}{l} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3l} \right) \Big|_0^{l/2} \\ M = \frac{\mu_s mgl}{6} \end{aligned}$$

Resp.

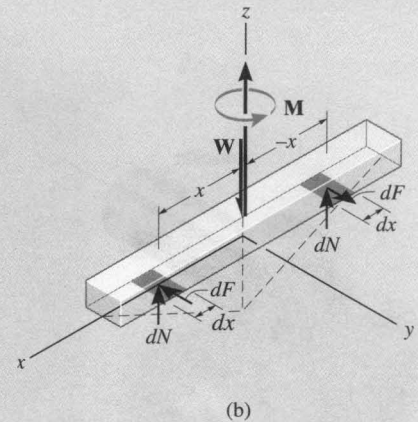
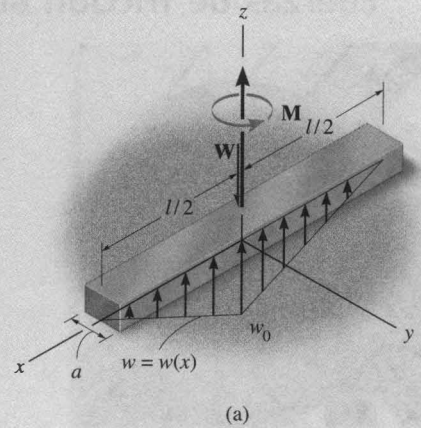
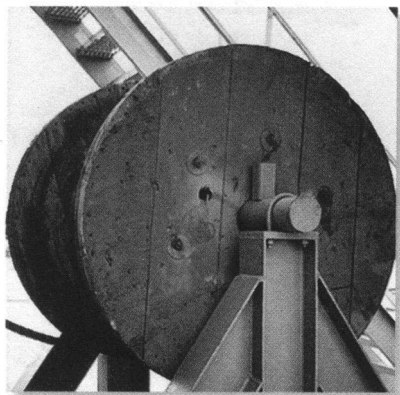


Fig. 8-23

8.7 Fuerzas de fricción en chumaceras lisas



Desenrollar el cable de este carrete requiere vencer la fricción de la flecha de soporte.

Cuando una flecha o un eje están sometidos a cargas laterales, una *chumacera lisa* se usa comúnmente como soporte. Las chumaceras lisas bien lubricadas están sometidas a las leyes de la mecánica de fluidos, en donde la viscosidad del lubricante, la rapidez de rotación y el claro libre entre la flecha y la chumacera son necesarios para determinar la resistencia por fricción de la chumacera. Sin embargo, cuando la chumacera no está lubricada o lo está sólo parcialmente, un análisis razonable de la resistencia a la fricción puede basarse en las leyes de la fricción seca.

Análisis por fricción. En la figura 8-24a se muestra un soporte típico de chumacera lisa. Cuando la flecha gira en la dirección mostrada en la figura, rueda contra la pared de la chumacera hasta algún punto *A* donde ocurre el deslizamiento. Si la carga lateral que actúa en el extremo de la flecha es *P*, es necesario que la fuerza reactiva *R* de apoyo actuando en *A* sea igual y opuesta a *P*, figura 8-24b. El momento necesario para mantener una rotación constante de la flecha se puede encontrar sumando momentos con respecto al eje *z* de la flecha, esto es,

$$\Sigma M_z = 0; \quad M - (R \text{ sen } \phi_k)r = 0$$

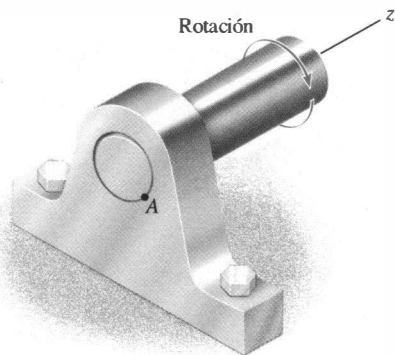
o bien,

$$M = Rr \text{ sen } \phi_k \tag{8-9}$$

donde ϕ_k es el ángulo de fricción cinética definido por $\tan \phi_k = F/N = \mu_k N/N = \mu_k$. En la figura 8-24c, se ve que $r \text{ sen } \phi_k = r_f$. El círculo trazado mediante rayas discontinuas y de radio r_f se llama *círculo de fricción*, y conforme la flecha rota, la reacción *R* será siempre tangente a él. Si la chumacera está parcialmente lubricada, μ_k es pequeña, y por tanto, $\mu_k = \tan \phi_k \approx \text{sen } \phi_k \approx \phi_k$. Bajo esas condiciones, una *aproximación* razonable al momento necesario para vencer la resistencia a la fricción es

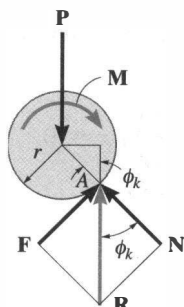
$$M \approx Rr\mu_k \tag{8-10}$$

El siguiente ejemplo ilustra una aplicación común de este análisis.

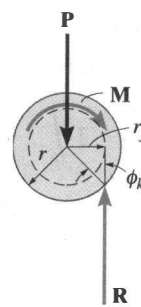


(a)

Fig. 8-24

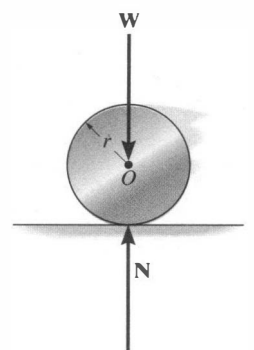


(b)



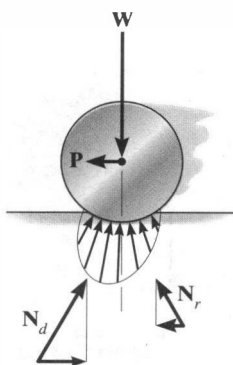
(c)

*8.8 Resistencia al rodamiento



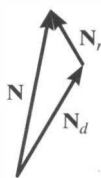
Superficie rígida de contacto

(a)

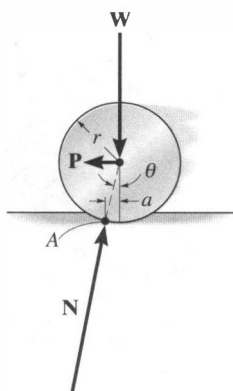


Superficie suave de contacto

(b)



(c)



(d)

Si un cilindro *rígido* de peso W rueda a velocidad constante a lo largo de una superficie *rígida*, la fuerza normal ejercida en el cilindro por la superficie actúa en el punto tangencial de contacto, como se muestra en la figura 8-26a. Bajo esas condiciones, si el cilindro no encuentra resistencia friccional del aire, el movimiento continuará indefinidamente. Sin embargo, en la realidad no existen los materiales perfectamente rígidos, y por tanto, la reacción de la superficie en el cilindro consiste en una distribución de presión normal. Por ejemplo, considere que el cilindro está hecho de un material muy duro y que la superficie sobre la cual rueda es relativamente suave. Debido a su peso, el cilindro comprime la superficie bajo él, figura 8-26b. Cuando el cilindro rueda, el material de la superficie en frente del cilindro *retarda* el movimiento ya que está siendo *deformado*, mientras que el material en la parte posterior es *restaurado* del estado deformado y tiende por ello a *empujar* el cilindro hacia delante. Las presiones normales que de esta manera actúan sobre el cilindro están representadas en la figura 8-26b por sus fuerzas resultantes N_d y N_r . Desafortunadamente, la magnitud de la fuerza de *deformación*, N_d , y su componente horizontal es *siempre mayor* que la de *restauración*, N_r , y en consecuencia una fuerza impulsora horizontal P debe ser aplicada al cilindro para mantener el movimiento, figura 8-26b.*

La resistencia al rodamiento es causada principalmente por este efecto, aunque es también, en menor grado, el resultado de la adhesión superficial y el microdeslizamiento relativo entre las superficies de contacto. Como la fuerza real P necesaria para vencer esos efectos es difícil de determinar, desarrollaremos aquí un método simplificado para explicar una manera en que los ingenieros han analizado este fenómeno. Para hacer esto, consideraremos la resultante de *toda* la presión normal, $N = N_d + N_r$, actuando sobre el cilindro, figura 8-26c. Como se muestra en la figura 8-26d, esta fuerza actúa a un ángulo θ con la vertical. Para mantener el cilindro en equilibrio, esto es, rodando con rapidez constante, es necesario que N sea *concurrente* con la fuerza impulsora P y el peso W . Sumando momentos con respecto al punto A resulta $Wa = P(r \cos \theta)$. Como las deformaciones son generalmente muy pequeñas en relación con el radio del cilindro, $\cos \theta \approx 1$; por consiguiente,

$$Wa \approx Pr$$

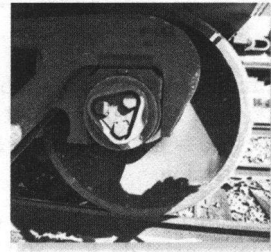
o bien,

$$P \approx \frac{Wa}{r} \tag{8-11}$$

Fig. 8-26

*En realidad, la fuerza de deformación N_d ocasiona que se almacene *energía* en el material cuando su magnitud aumenta, mientras que la fuerza restauradora N_r , cuando su magnitud disminuye, permite que parte de esta energía sea liberada. La energía restante se *pierde* ya que se usa para calentar la superficie, y si el peso del cilindro es muy grande, eso explica la deformación permanente de la superficie. Trabajo que debe ser realizado mediante la fuerza horizontal P para compensar esta pérdida.

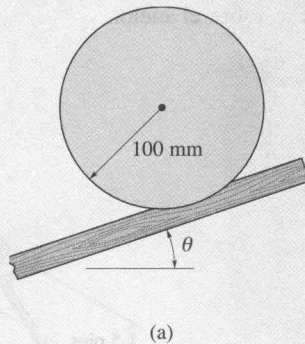
La distancia a es llamada *coeficiente de resistencia al rodamiento*, la cual tiene la dimensión de longitud. Por ejemplo, $a \approx 0.5$ mm para una rueda rodando sobre un riel, ambos hechos de acero dulce. Para cojinetes de bolas de acero endurecido, $a \approx 0.1$ mm. Experimentalmente, sin embargo, este factor es difícil de medir, ya que depende de parámetros como la velocidad de rotación del cilindro y las propiedades elásticas de las superficies de contacto, así como del acabado de la superficie. Por esta razón, a los datos para la determinación de a se les concede poca confianza. De cualquier manera, el análisis presentado aquí indica porqué, bajo las mismas condiciones, una carga pesada (W) ofrece mayor resistencia al movimiento (P) que una carga ligera. Además, como la razón Wa/r es generalmente muy pequeña comparada con $\mu_k W$, la fuerza necesaria para *hacer rodar* el cilindro sobre la superficie será mucho menor que la requerida para *deslizarlo* sobre la misma superficie. Por consiguiente, el análisis indica porqué los rodillos o los cojinetes de bolas son usados a menudo para minimizar la resistencia a la fricción entre partes móviles.



La resistencia de las ruedas de ferrocarril al rodamiento sobre los rieles es pequeña ya que el acero es muy rígido. En comparación, la resistencia de las ruedas de un tractor al rodamiento en un campo mojado es muy grande.

EJEMPLO 8.12

La rueda de acero de 10 kg mostrada en la figura 8-27a tiene radio de 100 mm y descansa sobre un plano inclinado hecho de madera. Si θ es incrementado de manera que la rueda comienza a rodar con velocidad constante cuando $\theta = 1.2^\circ$, determine el coeficiente de resistencia al rodamiento.



Solución

Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 8-27b, cuando la rueda está a punto de moverse, la reacción normal N actúa en el punto A definido por la dimensión a . Resolviendo el peso en las componentes paralela y perpendicular al plano inclinado, y sumando momentos con respecto al punto A , se obtiene (aproximadamente)

$$\uparrow + \sum M_A = 0; \quad 98.1 \cos 1.2^\circ N(a) - 98.1 \sin 1.2^\circ N(100 \text{ mm}) = 0$$

Al resolver, obtenemos

$$a = 2.09 \text{ mm}$$

Resp.

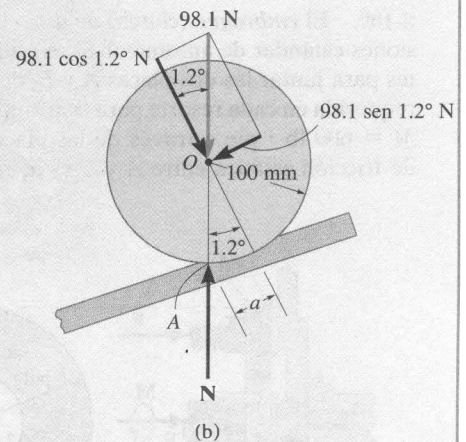
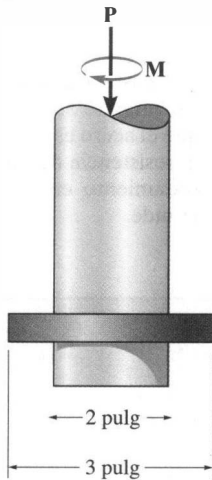


Fig. 8-27

PROBLEMAS

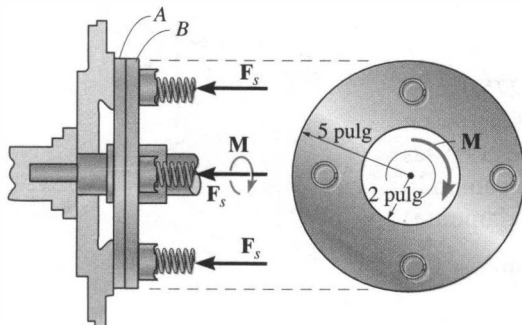
8-107. La chumacera de collar soporta uniformemente una fuerza axial de $P = 500$ lb. Si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$, determine el par M requerido para vencer la fricción.

***8-108.** La chumacera de collar soporta uniformemente una fuerza axial de $P = 500$ lb. Si una torca de $M = 3$ lb · pie es aplicada a la flecha y la hace girar a velocidad constante, determine el coeficiente de fricción cinética en la superficie de contacto.



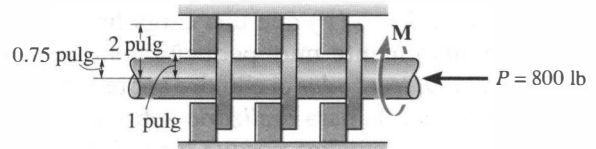
Probs. 8-107/108

8-109. El *embrague* (clutch) *de disco* se usa en transmisiones estándar de automóvil. Si se utilizan cuatro resortes para juntar las dos placas A y B , determine la fuerza requerida en cada resorte para transmitir un momento de $M = 600$ lb · pie a través de las placas. El coeficiente de fricción estática entre A y B es $\mu_s = 0.3$.



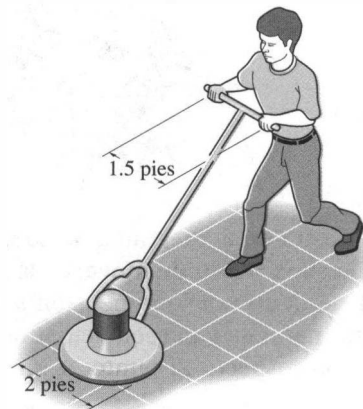
Prob. 8-109

8-110. La chumacera anular está sometida a un empuje de 800 lb. Si $\mu_s = 0.35$, determine el par M que debe aplicarse para vencer la fricción.



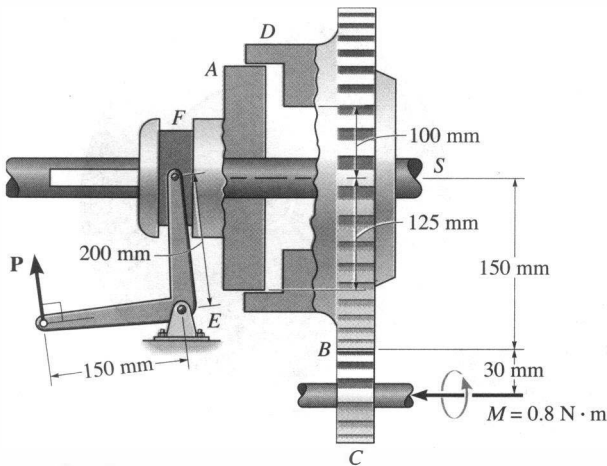
Prob. 8-110

8-111. La máquina pulidora de pisos gira con una velocidad angular constante. Si esta máquina pesa 80 lb, determine el par de fuerzas F que el operador debe aplicar a las manijas para mantenerla estacionaria. El coeficiente de fricción cinética entre el piso y el cepillo es $\mu_k = 0.3$. Suponga que el cepillo ejerce una presión uniforme sobre el suelo.



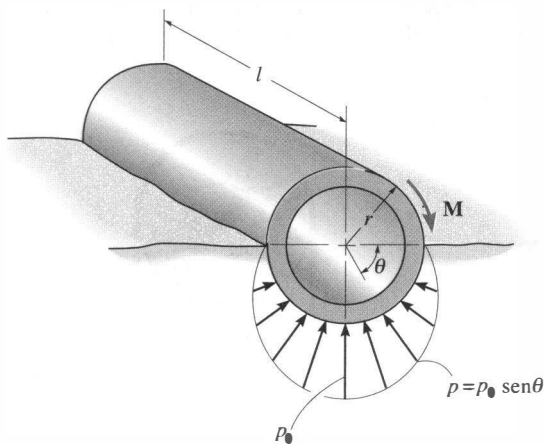
Prob. 8-111

***8-112.** El embrague de placa consiste en una placa plana *A* que se desliza sobre la flecha giratoria *S*. La flecha está fija a la placa impulsora de engranes *B*. Si el engrane *C*, que está acoplado con *B*, es sometido a una torca $M = 0.8 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine la fuerza *P* más pequeña que debe ser aplicada por medio del brazo de control para detener la rotación. El coeficiente de fricción estática entre las placas *A* y *D* es $\mu_s = 0.4$. Suponga que la presión de apoyo entre *A* y *D* es uniforme.



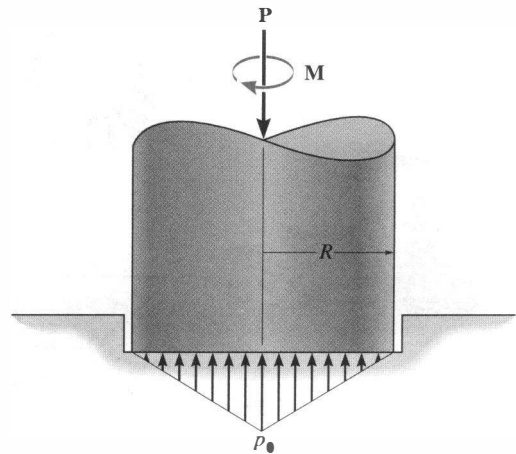
Prob. 8-112

8-113. El tubo de la figura tiene un peso total de 200 lb, longitud $l = 8$ pies y radio = 0.75 pies. Si descansa en arena cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.23$, determine el par *M* necesario para hacerlo girar. Suponga que la distribución de presión a lo largo de la longitud del tubo es definida por $p = p_0 \text{ sen } \theta$. Para la solución es necesario determinar p_0 , la presión pico, en términos del peso y de las dimensiones del tubo.



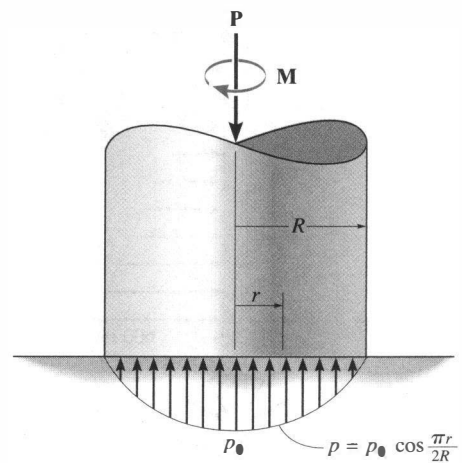
Prob. 8-113

8-114. Debido al desgaste en los bordes, la chumacera de pivote está sometida a una distribución de presión cónica en su superficie de contacto. Determine el par *M* requerida para vencer la fricción y girar la flecha, la cual soporta una fuerza axial *P*. El coeficiente de fricción estática es μ_s . Para la solución, es necesario determinar la presión pico p_0 en términos de *P* y del radio *R* de la chumacera.



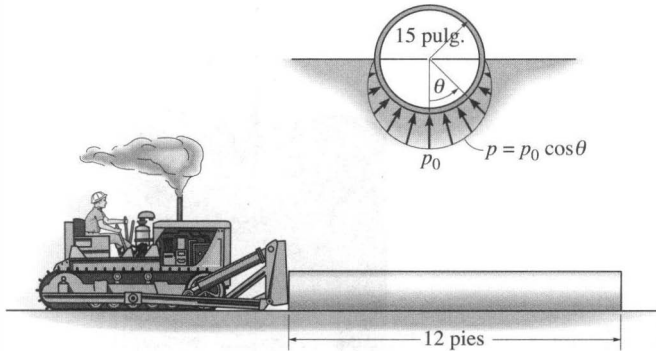
Prob. 8-114

8-115. La chumacera de pivote está sometida a una distribución de presión en su superficie de contacto que varía como se muestra. Si el coeficiente de fricción estática es μ , determine el par *M* requerida para vencer la fricción si la flecha soporta una fuerza axial *P*.



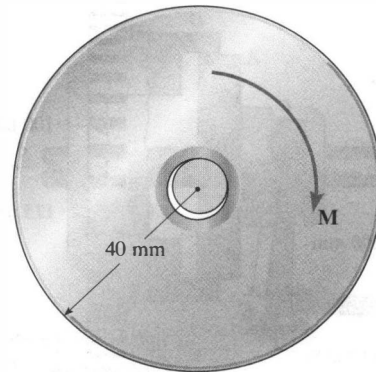
Prob. 8-115

8-116. El tractor se usa para empujar el tubo de 1500 lb. Para lograrlo, debe vencer las fuerzas de fricción en el suelo causadas por la arena. Suponiendo que la arena ejerce una presión sobre el fondo del tubo como se muestra, y que el coeficiente de fricción estática entre el tubo y la arena es $\mu_s = 0.3$, determine la fuerza requerida para empujar el tubo hacia delante. Encuentre también la presión pico p_0 .



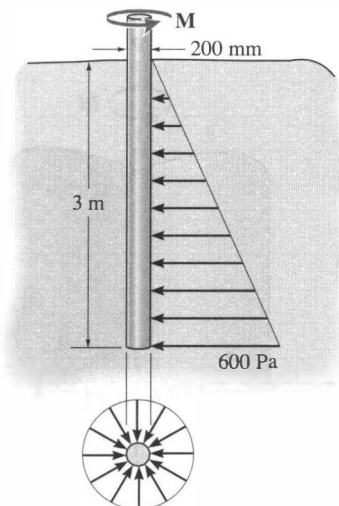
Prob. 8-116

8-118. Una polea con diámetro de 80 mm y masa de 1.25 kg está soportada con huelgo sobre una flecha con diámetro de 20 mm. Determine la torca M que debe aplicarse a la polea para que gire con movimiento constante. El coeficiente de fricción cinética entre la flecha y la polea es $\mu_k = 0.4$. Calcule también el ángulo θ que la fuerza normal forma en el punto de contacto con la horizontal. La flecha misma no puede rotar.



Prob. 8-118

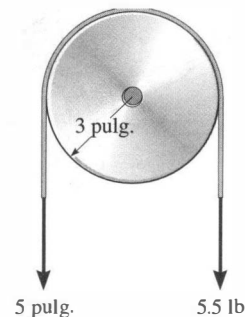
8-117. Un poste con diámetro de 200 mm es hincado 3 m en arena, para la cual $\mu_s = 0.3$. Si la presión normal que actúa *completamente alrededor del poste* varía linealmente con la profundidad como se muestra, determine el par de fricción M que debe vencerse para hacer girar el poste.



Prob. 8-117

8-119. La polea tiene radio de 3 pulg, y se ajusta con huelgo sobre la flecha de 0.5 pulg de diámetro. Si las cargas que actúan sobre la banda ocasionan que la polea gire con velocidad angular constante, determine la fuerza de fricción entre la flecha y la polea y calcule el coeficiente de fricción cinética. La polea pesa 18 lb.

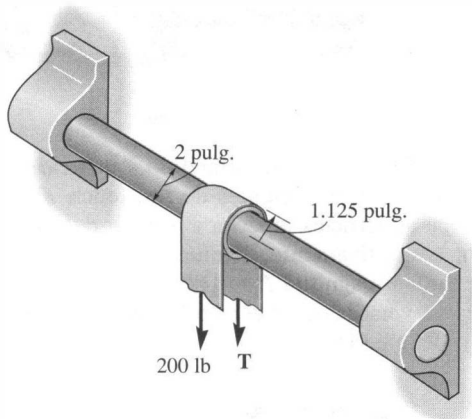
***8-120.** La polea tiene radio de 3 pulg, y se ajusta con huelgo sobre la flecha de 0.5 pulg de diámetro. Si las cargas que actúan sobre la banda ocasionan que la polea gire con velocidad angular constante, determine la fuerza de fricción entre la flecha y la polea y calcule el coeficiente de fricción cinética. Ignore el peso de la polea.



Probs. 8-119/120

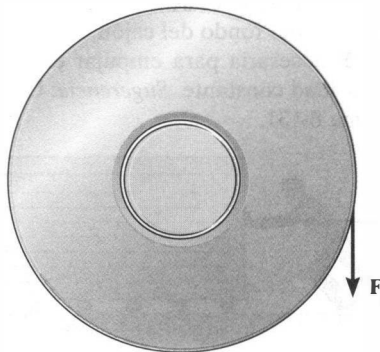
8-121. Determine la tensión T que es necesaria en la banda para vencer la tensión de 200 lb creada en el otro lado. ¿Cuáles son las componentes normal y de fricción de la fuerza desarrollada sobre el casquillo del collar? El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.21$.

8-122. Si una fuerza de tensión $T = 215$ lb es requerida para empujar la fuerza de 200 lb alrededor del mango de collar, determine el coeficiente de fricción estática en la superficie de contacto. La banda no se desliza sobre el collar.



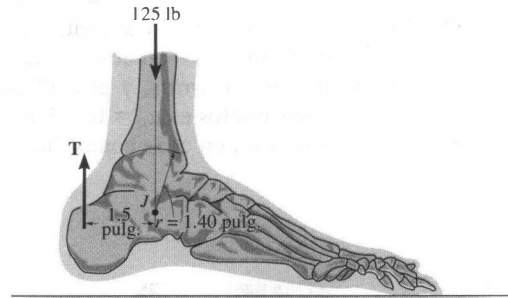
Probs. 8-121/122

8-123. Un disco con diámetro exterior de 120 mm se ajusta con huelgo en una flecha fija que tiene un diámetro de 30 mm. Si el coeficiente de fricción estática entre el disco y la flecha es $\mu_s = 0.15$ y el disco tiene masa de 50 kg, determine la fuerza vertical F más pequeña que, actuando sobre el borde, debe ser aplicada al disco para hacerlo deslizar sobre la flecha.



Prob. 8-123

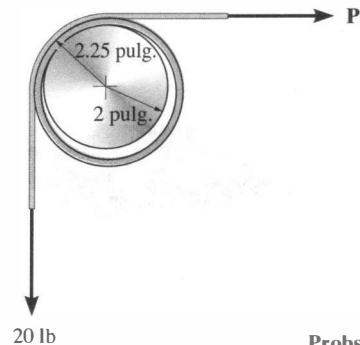
***8-124.** El peso del cuerpo sobre la junta J tibiotarso es de 125 lb. Si el radio de curvatura de la superficie del talus del tobillo es de 1.40 pulg., y el coeficiente de fricción estática entre los huesos es $\mu_s = 0.1$, determine la fuerza T desarrollada en el tendón de Aquiles y que es necesaria para hacer girar la junta.



Prob. 8-124

8-125. El collar se ajusta *con huelgo* alrededor de una flecha fija que tiene radio de 2 pulg. Si el coeficiente de fricción cinética entre la flecha y el collar es $\mu_k = 0.3$, determine la fuerza P sobre el segmento horizontal de la banda de manera que el collar gire en sentido contrario al de las manecillas del reloj con velocidad angular constante. Suponga que la banda no resbala sobre el collar, sino que el collar resbala sobre la flecha. Ignore el peso y el espesor de la banda y del collar. El radio, medido desde el centro del collar hasta el espesor medio de la banda, es de 2.25 pulg.

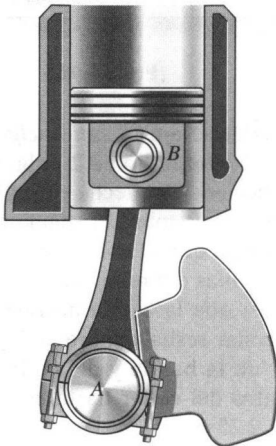
8-126. El collar se ajusta *con huelgo* alrededor de una flecha fija que tiene radio de 2 pulg. Si el coeficiente de fricción cinética entre la flecha y el collar es $\mu_k = 0.3$, determine la fuerza P sobre el segmento horizontal de la banda de manera que el collar gire en el sentido de las manecillas del reloj con velocidad angular constante. Suponga que la banda no resbala sobre el collar, sino que el collar resbala sobre la flecha. Ignore el peso y el espesor de la banda y del collar. El radio, medido desde el centro del collar hasta el espesor medio de la banda, es de 2.25 pulg.



Probs. 8-125/126

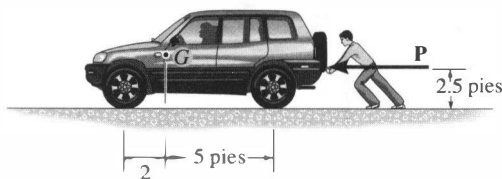
8-127. La biela está unida al pistón por medio de un pasador de 0.75 pulg de diámetro en B y al cigüeñal mediante una chumacera de 2 pulg de diámetro en A . Si el pistón se está moviendo hacia abajo, y el coeficiente de fricción estática en esos puntos es $\mu_s = 0.2$, determine el radio del círculo de fricción en cada conexión.

8-128. La biela está unida al pistón por medio de un pasador de 20 mm de diámetro en B y al cigüeñal mediante una chumacera de 50 mm de diámetro en A . Si el pistón se está moviendo hacia arriba, y el coeficiente de fricción estática en esos puntos es $\mu_s = 0.3$, determine el radio del círculo de fricción en cada conexión.



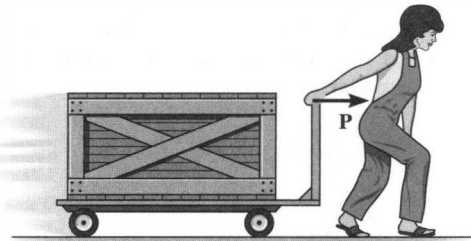
Probs. 8-127/128

8-129. El vehículo tiene un peso de 2600 lb y centro de gravedad en G . Determine la fuerza horizontal P que debe aplicarse para vencer la resistencia de las ruedas al rodamiento. El coeficiente de resistencia al rodamiento es de 0.5 pulg. Los neumáticos tienen un diámetro de 2.75 pies.



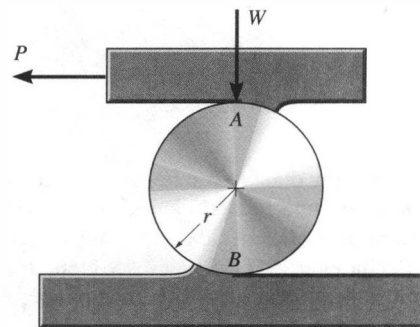
Prob. 8-129

8-130. El carro de mano tiene ruedas con diámetro de 80 mm. Si una caja con masa de 500 kg es colocada sobre el carro de manera que cada rueda lleva la misma carga, determine la fuerza horizontal P que debe ser aplicada a la manija para vencer la resistencia al rodamiento. El coeficiente de resistencia al rodamiento es de 2 mm. Ignore la masa del carro.



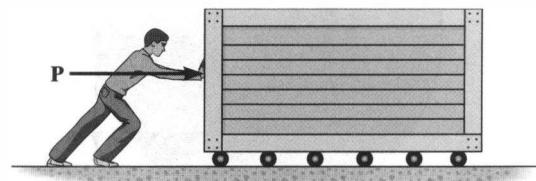
Prob. 8-130

8-131. El cilindro está sometido a una carga que tiene peso W . Si los coeficientes de resistencia al rodamiento para las superficies superior e inferior del cilindro son a_A y a_B , respectivamente, demuestre que es requerida una fuerza con magnitud $P = [W(a_A + a_B)]/2r$ para mover la carga y hacer rodar el cilindro hacia delante. Ignore el peso del cilindro.



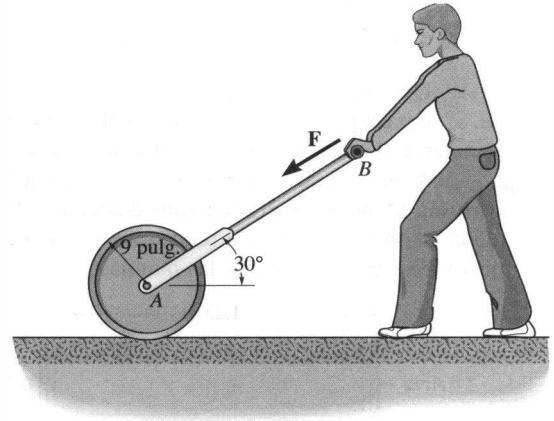
Prob. 8-131

***8-132.** Un cajón grande con masa de 200 kg es desplazado a lo largo del piso usando una serie de rodillos de 150 mm de diámetro para los cuales el coeficiente de resistencia al rodamiento es de 3 mm en el suelo y de 7 mm en la superficie del fondo del cajón. Determine la fuerza horizontal P necesaria para empujar el cajón hacia delante a velocidad constante. *Sugerencia:* Use el resultado del problema 8-131.



Prob. 8-132

8-133. El rodillo podador pesa 300 lb. Si la barra BA es mantenida a un ángulo de 30° con la horizontal y el coeficiente de resistencia al rodamiento del rodillo es de 2 pulg, determine la fuerza \mathbf{F} necesaria para empujar el rodillo con rapidez constante. Ignore la fricción desarrollada en el eje y suponga que la fuerza resultante que actúa sobre la manija es aplicada a lo largo de BA .



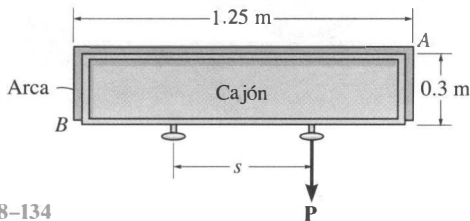
Prob. 8-133

REPASO DEL CAPÍTULO

- Fricción seca.** En superficies de contacto rugosas existen fuerzas de fricción. Estas superficies actúan sobre un cuerpo oponiéndose al movimiento o a la tendencia al movimiento del cuerpo. Una fuerza de fricción estática se acerca a un valor máximo de $F_s = \mu_s N$, donde μ_s es el *coeficiente de fricción estática*. En este caso, el movimiento entre las superficies de contacto está a punto de ocurrir. Si ocurre el deslizamiento, entonces la fuerza de fricción permanece esencialmente constante e igual a un valor $F_k = \mu_k N$. Aquí, μ_k es el *coeficiente de fricción cinética*. La solución de un problema que implica fricción requiere trazar primero el diagrama de cuerpo libre del cuerpo. Si las incógnitas no pueden ser determinadas estrictamente a partir de las ecuaciones de equilibrio, y existe la posibilidad de que ocurra el deslizamiento, entonces la ecuación de fricción debe ser aplicada en los puntos de contacto apropiados para completar la solución. También es posible que objetos esbeltos se vuelquen, y esta situación debe ser investigada.
- Cuñas, tornillos, bandas y chumaceras.** Un análisis por fricción de esos objetos puede ser efectuado aplicando la ecuación de fricción en los puntos de contacto y usando luego las ecuaciones de equilibrio para relacionar la fuerza de fricción con las otras fuerzas externas que actúan sobre el objeto. Combinando las ecuaciones resultantes, la fuerza de fricción puede entonces ser eliminada del análisis, de manera que la fuerza necesaria para vencer los efectos de la fricción pueda ser determinada.
- Resistencia al rodamiento.** La resistencia de una rueda a rodar sobre una superficie es causada por la *deformación* entre los dos materiales de contacto. Este efecto ocasiona que la fuerza normal resultante que actúa sobre el cuerpo rodante se incline y proporcione una componente que actúa en la dirección opuesta a la fuerza que genera el movimiento. El efecto es caracterizado usando el *coeficiente de resistencia al rodamiento*, el cual se determina experimentalmente.

PROBLEMAS DE REPASO

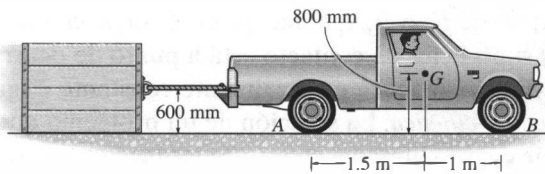
8-134. Una sola fuerza P es aplicada a la manija del cajón. Si se pasa por alto la fricción en el fondo lateral y el coeficiente de fricción estática a lo largo de los lados es $\mu_s = 0.4$, determine la separación s más grande posible entre las manijas simétricamente colocadas de manera que el cajón no se trabe en las esquinas A y B cuando la fuerza P se aplica a una de las manijas.



Prob. 8-134

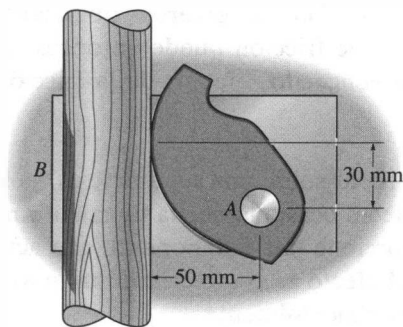
8-135. El camión tiene masa de 1.25 Mg y centro de masa en G . Determine la carga más grande que este camión puede jalar si (a) tiene tracción en las ruedas traseras mientras que la ruedas frontales tienen libertad para rodar, y (b) tiene tracción en las cuatro ruedas. El coeficiente de fricción estática entre las ruedas y el terreno es $\mu_s = 0.5$, y entre la caja y el terreno es $\mu'_s = 0.4$.

***8-136.** Resuelva el problema 8-135 si el camión y la caja están subiendo por un plano inclinado de 10° .



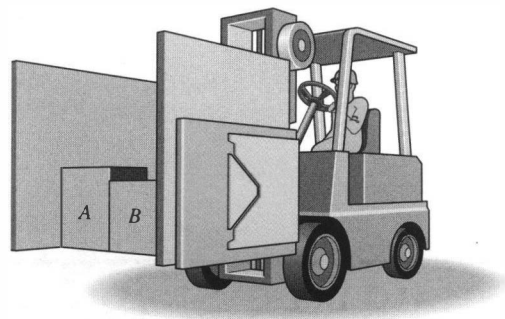
Probs. 8-135/136

8-137. La leva o eslabón corto está articulado en A y se usa para sostener escobas contra una pared. Si el coeficiente de fricción estática entre el palo de la escoba y la leva es $\mu_s = 0.2$, determine si es posible soportar la escoba que tiene un peso W . La superficie en B es lisa. Ignore el peso de la leva.



Prob. 8-137

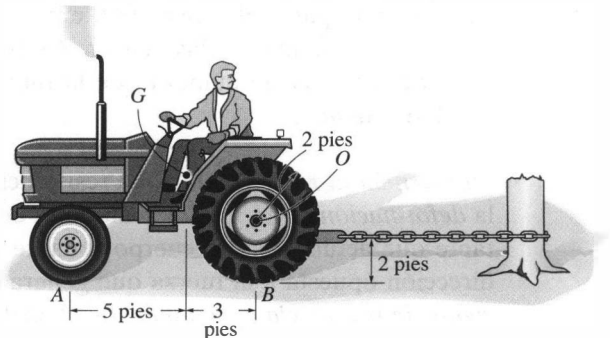
8-138. La abrazadera de cajas de cartón del montacargas de horquilla tiene un coeficiente de fricción estática $\mu_s = 0.5$ con cualquier caja de cartón, mientras que una caja de cartón tiene un coeficiente de fricción estática $\mu'_s = 0.4$ con cualquier otra caja de cartón. Calcule la fuerza P horizontal más pequeña que la abrazadera debe ejercer sobre los lados de una caja de manera que dos cajas A y B , cada una con peso de 30 lb, puedan ser levantadas. ¿Cuál es la fuerza P' más pequeña que debe ejercer la abrazadera para levantar tres cajas de 30 lb? La tercera caja C es colocada entre A y B .



Prob. 8-138

8-139. El tractor jala el tronco fijo de un árbol. Determine la torca que debe aplicar el motor a las ruedas traseras para causar su deslizamiento. Las ruedas frontales pueden rodar libremente. El tractor pesa 3500 lb y tiene su centro de gravedad en G . El coeficiente de fricción estática entre las ruedas posteriores y el terreno es $\mu_s = 0.5$.

***8-140.** El tractor jala el tronco fijo de un árbol. Si el coeficiente de fricción estática entre las ruedas traseras y el terreno es $\mu_s = 0.6$, determine si las ruedas traseras se deslizan o las ruedas frontales se levantan del terreno cuando el motor proporciona una torca a las ruedas traseras. ¿Cuál es la torca necesaria para ocasionar el movimiento? Las ruedas frontales tienen libertad para rodar. El tractor pesa 2500 lb y tiene su centro de gravedad en G .



Probs. 8-139/140

PROYECTOS DE DISEÑO

8-1D DISEÑO DE UN SISTEMA DE CUERDAS Y POLEAS PARA JALAR UNA CAJA HACIA ARRIBA POR UN PLANO INCLINADO.

Una caja de 300 kg tiene que ser elevada por el plano inclinado a 25° . El coeficiente de fricción estática entre el plano y la caja es $\mu_s = 0.5$, y el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.4$. Mediante un sistema de cuerdas y poleas, diseñe un procedimiento que permita a un solo trabajador jalar la caja hacia arriba por la rampa. Las poleas pueden estar unidas en cualquier punto sobre la pared AB . Suponga que el trabajador puede ejercer (cómodamente) una fuerza máxima de 200 N en una cuerda. Presente un croquis de su procedimiento y un análisis de fuerzas para mostrar cómo opera. Estime el costo del material requerido para su construcción suponiendo que la cuerda cuesta \$0.75/m y una polea \$1.80.

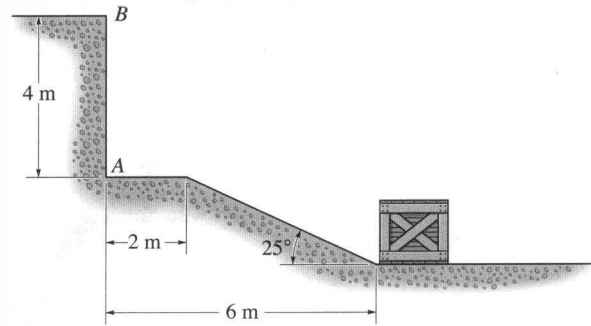


Fig. 8-1D

8-2D DISEÑO DE UN DISPOSITIVO PARA LEVANTAR TUBOS DE ACERO INOXIDABLE.

Tubos de acero inoxidable están estibados verticalmente en una fábrica y deben ser movidos de un punto a otro por medio de una grúa. Los tubos tienen diámetros interiores de $100 \text{ mm} \leq d \leq 250 \text{ mm}$ y la masa máxima de cualquier tubo es de 500 kg. Diseñe un dispositivo que pueda ser conectado al gancho y usarse para levantar cada tubo. El dispositivo debe ser de acero estructural y ha de poder enganchar cada tubo sólo por su superficie interior, ya que la superficie exterior no debe presentar raspones ni daños de ninguna especie. Suponga que el coeficiente mínimo de fricción estática entre los dos aceros es $\mu_s = 0.25$. Presente un dibujo a escala de su dispositivo, junto con una breve explicación de cómo trabaja con base en un análisis de fuerzas.

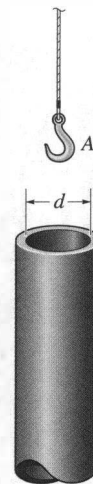


Fig. 8-2D

8-3D DISEÑO DE UNA HERRAMIENTA PARA HACER GIRAR UN TUBO DE PLÁSTICO.

El plástico PVC a menudo se usa para fabricar tubos de drenaje. Si el diámetro exterior de cualquier tubo varía entre $4 \text{ pulg} \leq d \leq 8 \text{ pulg}$, diseñe una herramienta que pueda ser usada por un trabajador para girar el tubo cuando esté sometido a una resistencia máxima anticipada del terreno de $80 \text{ lb} \cdot \text{pie}$. El dispositivo debe ser de acero y estar diseñado de manera que no corte el tubo ni deje marcas sobre su superficie. Suponga que un trabajador puede aplicar (cómodamente) una fuerza máxima de 40 lb, y considere el mínimo coeficiente de fricción estática entre el PVC y el acero igual a $\mu_s = 0.35$. Presente un dibujo a escala del dispositivo y un párrafo breve, basado en un análisis de fuerzas, donde explique cómo funciona.

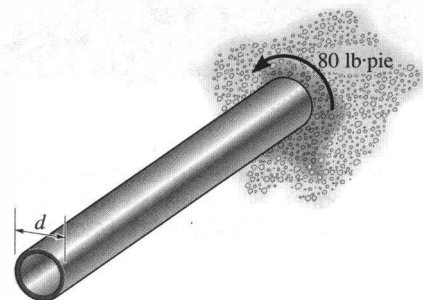


Fig. 8-3D

CAPÍTULO 9

Centro de gravedad y centroide

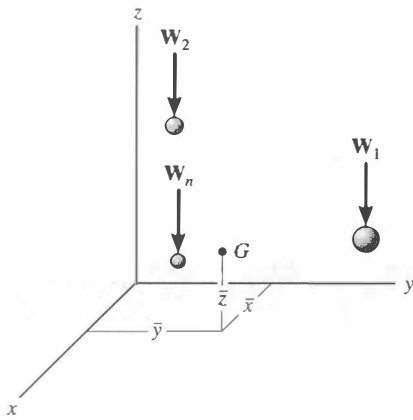
OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Analizar el concepto de centro de gravedad, centro de masa, y centroide.
- Mostrar cómo determinar la ubicación del centro de gravedad y centroide para un sistema de partículas discretas y un cuerpo de forma arbitraria.
- Usar los teoremas de Pappus y Guldinus para encontrar el área y el volumen de una superficie de revolución.
- Presentar un método para encontrar la resultante de una carga general distribuida, y mostrar cómo se aplica cuando es necesario determinar la resultante de un fluido.

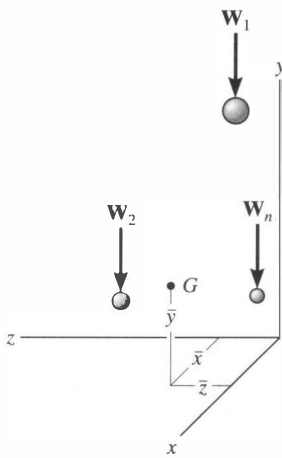
9.1 Centro de gravedad y centro de masa para un sistema de partículas

Centro de gravedad. El *centro de gravedad* G es un punto que ubica el peso resultante de un sistema de partículas. Para mostrar cómo determinar este punto, considere el sistema de n partículas fijas dentro de una región del espacio como se muestra en la figura 9-1a. Los pesos de las partículas comprenden un sistema de fuerzas paralelas* que puede ser reemplazado por un solo peso resultante (equivalente) que tenga el punto G de aplicación definido. Para encontrar las coordenadas \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} de G , debemos usar los principios delineados en la sección 4.9.

*Esto no es estrictamente cierto, ya que los pesos no son paralelos entre sí; más bien son *concurrentes* al centro de la Tierra. Además, la aceleración g de la gravedad es realmente diferente para cada partícula ya que depende de la distancia del centro de la Tierra a la partícula. Sin embargo, para todo fin práctico, generalmente estos dos efectos pueden ser ignorados.



(a)



(b)

Fig. 9-1

Esto requiere que el peso resultante sea igual al peso total de todas las n partículas; es decir,

$$W_R = \Sigma W$$

La suma de los momentos de los pesos de todas las partículas con respecto a los ejes x , y , y z es entonces igual al momento del peso de la resultante con respecto a esos ejes. Así, para determinar la coordenada \bar{x} de G , podemos sumar momentos con respecto al eje y . Esto resulta en

$$\bar{x}W_R = \tilde{x}_1W_1 + \tilde{x}_2W_2 + \cdots + \tilde{x}_nW_n$$

De la misma manera, sumando momentos con respecto al eje x , podemos obtener la coordenada \bar{y} ; es decir

$$\bar{y}W_R = \tilde{y}_1W_1 + \tilde{y}_2W_2 + \cdots + \tilde{y}_nW_n$$

Aunque los pesos no producen un momento con respecto al eje z , podemos obtener la coordenada \bar{z} de G imaginando al sistema coordenado, con las partículas fijadas en él, como si estuviera girado 90° con respecto al eje x (o al y), figura 9-1b. Sumando momentos con respecto al eje x , tenemos

$$\bar{z}W_R = \tilde{z}_1W_1 + \tilde{z}_2W_2 + \cdots + \tilde{z}_nW_n$$

Podemos generalizar estas fórmulas, y escribirlas simbólicamente en la forma

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}W}{\Sigma W} \quad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}W}{\Sigma W} \quad \bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}W}{\Sigma W} \quad (9-1)$$

Aquí,

\bar{x} , \bar{y} , \bar{z} representan las coordenadas del centro de gravedad G del sistema de partículas.

\tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z} representan las coordenadas de cada partícula presente en el sistema.

ΣW es la suma resultante de los pesos de todas las partículas presentes en el sistema.

Estas ecuaciones son recordadas fácilmente si se tiene en mente que sólo representan un balance entre la suma de los momentos de los pesos de cada partícula del sistema y el momento del peso *resultante* para el sistema.

Centro de masa. Para estudiar problemas que implican el movimiento de *materia* bajo la influencia de una fuerza, esto es, la *dinámica*, es necesario localizar un punto llamado *centro de masa*. Si la aceleración debida a la gravedad g para cada partícula es constante, entonces $W = mg$. Sustituyendo en las ecuaciones 9-1 y cancelando g en el numerador y el denominador resulta

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}m}{\Sigma m} \quad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}m}{\Sigma m} \quad \bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}m}{\Sigma m} \quad (9-2)$$

Por comparación, entonces, la ubicación del centro de gravedad coincide con la del centro de masa.* Sin embargo, recuerde que las partículas tienen “peso” únicamente bajo la influencia de una atracción gravitatoria, mientras que el centro de masa es independiente de la gravedad. Por ejemplo, no tendría sentido definir el centro de gravedad de un sistema de partículas que representasen los planetas de nuestro sistema solar, mientras que el centro de masa de este sistema sí es importante.

9.2 Centro de gravedad, centro de masa, y centroide para un cuerpo

Centro de gravedad. Un cuerpo rígido está compuesto de un número infinito de partículas, y si los principios usados para determinar las ecuaciones 9-1 son aplicados al sistema de partículas que componen un cuerpo rígido, resulta necesario usar integración en vez de una suma discreta de términos. Considerando la partícula arbitraria ubicada en $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ y con peso dW , figura 9-2, las ecuaciones resultantes son

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dW}{\int dW} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dW}{\int dW} \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dW}{\int dW} \quad (9-3)$$

Para aplicar estas ecuaciones apropiadamente, el peso diferencial dW debe ser expresado en términos de su volumen asociado dV . Si γ representa el *peso específico* del cuerpo, medido como un peso por volumen unitario, entonces $dW = \gamma dV$, y por tanto

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x} \gamma dV}{\int_V \gamma dV} \quad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y} \gamma dV}{\int_V \gamma dV} \quad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z} \gamma dV}{\int_V \gamma dV} \quad (9-4)$$

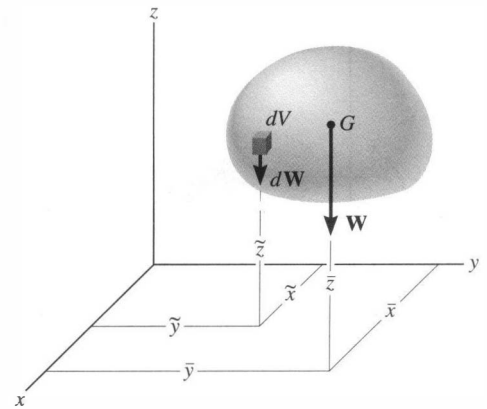
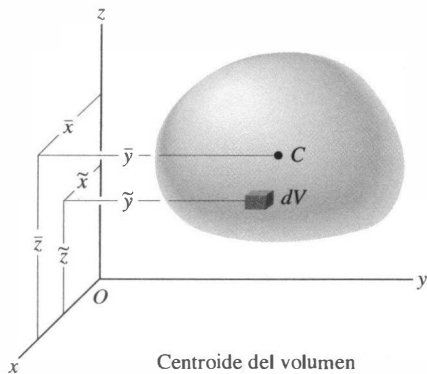


Fig. 9-2

Aquí la integración debe ser efectuada a todo el volumen del cuerpo.

Centro de masa. La *densidad* ρ , o masa por volumen unitario, está relacionada mediante la ecuación $\gamma = \rho g$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Sustituyendo esta relación en las ecuaciones 9-4 y cancelando g en los numeradores y denominadores, se obtienen ecuaciones similares (con ρ reemplazando a γ) que se pueden usar para determinar el *centro de masa* del cuerpo.

*Esto es cierto si se supone que el campo gravitatorio tiene las mismas magnitud y dirección en todas partes. Esa suposición es apropiada para la mayor parte de las aplicaciones de ingeniería, ya que la gravedad no varía apreciablemente entre, por ejemplo, la base y la parte superior de un edificio.



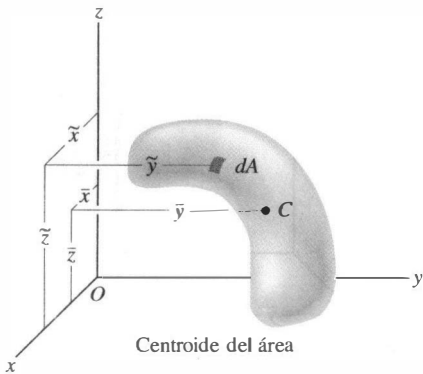
Centroide del volumen

Fig. 9-3

Centroide. El *centroide* es un punto que define el *centro geométrico* de un objeto. Su ubicación puede ser determinada a partir de fórmulas similares a las usadas para encontrar el centro de gravedad del cuerpo o centro de masa. En particular, si el material que compone un cuerpo es uniforme u *homogéneo*, la *densidad o peso específico* será *constante* en todo el cuerpo, y por tanto, este término saldrá de las integrales y *se cancelará* a partir de los numeradores y denominadores de las ecuaciones 9-4. Las fórmulas resultantes definen el centroide del cuerpo ya que son independientes del peso del cuerpo y dependen sólo de la geometría de éste. Consideraremos tres casos específicos.

Volumen. Si un objeto es subdividido en elementos de volumen dV , figura 9-3, la ubicación del centroide $C(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ para el volumen del objeto puede ser determinada calculando los “momentos” de los elementos con respecto a cada uno de los ejes coordenados. Las fórmulas resultantes son

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x} dV}{\int_V dV} \quad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y} dV}{\int_V dV} \quad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z} dV}{\int_V dV} \quad (9-5)$$



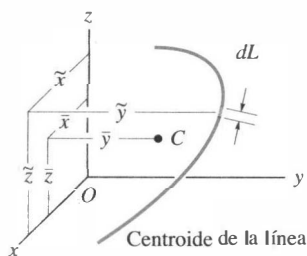
Centroide del área

Fig. 9-4

Área. De manera similar, el centroide del área superficial de un objeto, como una placa o un cascarón, figura 9-4, se puede encontrar subdividiendo el área en elementos dA y calculando los “momentos” de esos elementos de área con respecto a cada uno de los ejes coordenados, esto es,

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA} \quad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA} \quad \bar{z} = \frac{\int_A \tilde{z} dA}{\int_A dA} \quad (9-6)$$

Línea. Si la simetría del objeto, tal como la de una barra delgada o la de un alambre, toma la forma de una línea, figura 9-5, el equilibrio de los momentos de los elementos diferenciales dL con respecto a cada uno de los ejes coordenados resulta en



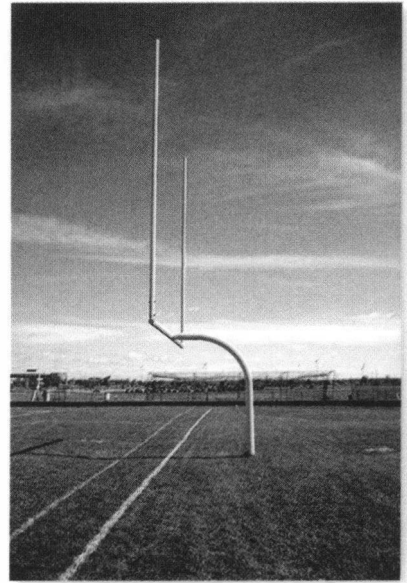
Centroide de la línea

Fig. 9-5

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x} dL}{\int_L dL} \quad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y} dL}{\int_L dL} \quad \bar{z} = \frac{\int_L \tilde{z} dL}{\int_L dL} \quad (9-7)$$

Recuerde que al aplicar las ecuaciones de la 9-4 a la 9-7 es mejor elegir un sistema coordenado que simplifique tanto como sea posible la ecuación usada para describir la frontera del objeto. Por ejemplo, las coordenadas polares generalmente son más apropiadas para áreas que tengan fronteras circulares. Los términos \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z} en las ecuaciones se refieren a los “brazos de momento” o coordenadas del *centro de gravedad o centroide del elemento diferencial* usado. De ser posible, este elemento diferencial debe elegirse de manera que tenga un tamaño diferencial o espesor en sólo *una dirección*. Cuando se hace así, sólo es requerida una integración simple para cubrir toda la región.

Simetría. Los *centroides* de algunas formas o perfiles pueden ser parcial o completamente especificados usando condiciones de *simetría*. En los casos donde la forma tenga un eje de simetría, el centroide de la forma se encontrará a lo largo de ese eje. Por ejemplo, el centroide C para la línea mostrada en la figura 9-6 debe encontrarse a lo largo del eje y , puesto que para toda longitud elemental dL a una distancia $+\tilde{x}$ a la derecha del eje y hay un elemento idéntico a una distancia $-\tilde{x}$ a la izquierda. Por tanto, el momento total para todos los elementos con respecto al eje de simetría se cancelará; esto es, $\int \tilde{x} dL = 0$ (Ecuación 9-7), por lo que $\bar{x} = 0$. En los casos donde una forma tenga dos o tres ejes de simetría, se infiere que el centroide se encuentra en la intersección de esos ejes, figuras 9-7 y 9-8.



Para determinar la ubicación del centro de gravedad de esta meta, debe ser usada la operación de integración.

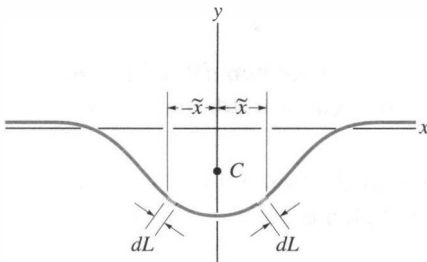


Fig. 9-6

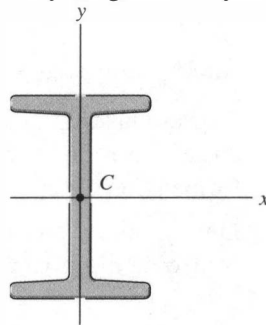


Fig. 9-7

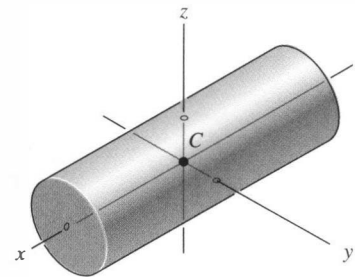


Fig. 9-8

PUNTOS IMPORTANTES

- El centroide representa el centro geométrico de un cuerpo. Este punto coincide con el centro de masa o con el centro de gravedad sólo si el material que compone al cuerpo es uniforme u homogéneo.
- Las fórmulas usadas para localizar el centro de gravedad o el centroide simplemente representan un balance entre la suma de momentos de todas las partes del sistema y el momento de la “resultante” para el sistema.
- En algunos casos, el centroide se ubica en un punto fuera del objeto, como en el caso de un anillo, donde el centroide está en el centro del anillo. Además, este punto se encontrará sobre cualquier eje de simetría del cuerpo.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El centro de gravedad o centroide de un objeto o forma puede ser determinado mediante simples integraciones usando el siguiente procedimiento.

Elemento diferencial.

- Seleccione un sistema coordenado apropiado, especifique los ejes coordenados, y luego elija un elemento diferencial para la integración.
- Para líneas, el elemento dL es representado como un segmento diferencial de línea.
- Para áreas, el elemento dA es generalmente un rectángulo de longitud finita y ancho diferencial.
- Para volúmenes, el elemento dV es o un disco circular con radio finito y espesor diferencial, o bien, un cascarón con longitud y radio finitos y espesor diferencial.
- Localice el elemento en un punto arbitrario (x, y, z) sobre la curva que define la forma.

Tamaño y brazos de momento.

- Exprese la longitud dL , el área dA , o el volumen dV del elemento en términos de las coordenadas de la curva usada para definir la forma geométrica.
- Determine las coordenadas o brazos de momento \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z} para el centroide o centro de gravedad del elemento.

Integraciones.

- Sustituya las formulaciones para \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z} y dL , dA , o dV en las ecuaciones apropiadas (Ecuaciones de la 9-4 a la 9-7) y efectúe las integraciones.*
- Para efectuar la integración, exprese la función en el integrando en términos de la *misma variable aplicada al espesor diferencial del elemento*.
- Los límites de la integral son definidos a partir de las dos ubicaciones extremas del espesor diferencial del elemento, de manera que cuando los elementos son “sumados” o la integración es efectuada, la región completa queda cubierta.

*Las fórmulas de integración están dadas en el apéndice A.

EJEMPLO 9.1

Localice el centroide de la barra doblada en forma de arco parabólico y que se muestra en la figura 9-9.

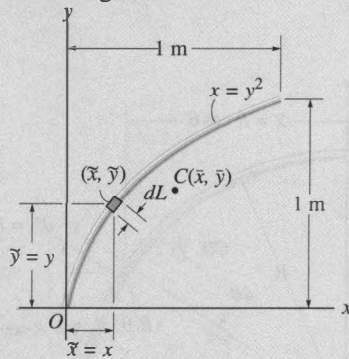


Fig. 9-9

Solución

Elemento diferencial. El elemento diferencial se muestra en la figura 9-9. Está localizado sobre la curva en el punto arbitrario (x, y) .

Área y brazos de momento. La longitud diferencial del elemento dL puede ser expresada en términos de las diferenciales dx y dy usando el teorema de Pitágoras.

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy$$

Como $x = y^2$, entonces $dx/dy = 2y$. Por tanto, expresando dL en términos de y y dy , tenemos

$$dL = \sqrt{(2y)^2 + 1} dy$$

El centroide está localizado en $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y$.

Integraciones. Aplicando las ecuaciones 9-7 e integrando con respecto a y mediante las fórmulas del apéndice A, tenemos

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int_L \tilde{x} dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^1 x \sqrt{4y^2 + 1} dy}{\int_0^1 \sqrt{4y^2 + 1} dy} = \frac{\int_0^1 y^2 \sqrt{4y^2 + 1} dy}{\int_0^1 \sqrt{4y^2 + 1} dy} \\ &= \frac{0.6063}{1.479} = 0.410 \text{ m} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\int_L \tilde{y} dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^1 y \sqrt{4y^2 + 1} dy}{\int_0^1 \sqrt{4y^2 + 1} dy} = \frac{0.8484}{1.479} = 0.574 \text{ m} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 9.2

Localice el centroide del segmento circular de alambre mostrado en la figura 9-10.

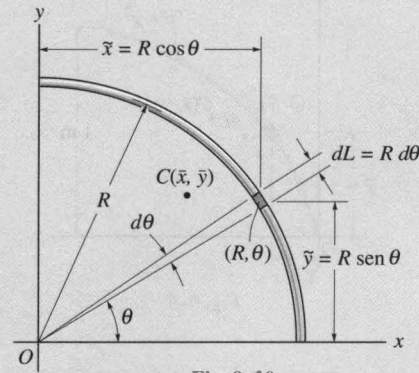


Fig. 9-10

Solución

Usaremos coordenadas polares para resolver este problema ya que el arco es circular.

Elemento diferencial. Un elemento diferencial circular de arco se selecciona como se muestra en la figura. Este elemento interseca la curva en (R, θ) .

Longitud y brazo de momento. La longitud diferencial del elemento es $dL = R d\theta$, y su centroide está localizado en $\tilde{x} = R \cos \theta$ y $\tilde{y} = R \sin \theta$.

Integraciones. Aplicando las ecuaciones 9-7 e integrando con respecto a θ , obtenemos

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x} dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^{\pi/2} (R \cos \theta) R d\theta}{\int_0^{\pi/2} R d\theta} = \frac{R^2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta}{R \int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{2R}{\pi} \text{ Resp.}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y} dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^{\pi/2} (R \sin \theta) R d\theta}{\int_0^{\pi/2} R d\theta} = \frac{R^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta}{R \int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{2R}{\pi} \text{ Resp.}$$

EJEMPLO 9.3

Determine la distancia \bar{y} del eje x al centroide del área del triángulo mostrado en la figura 9-11.

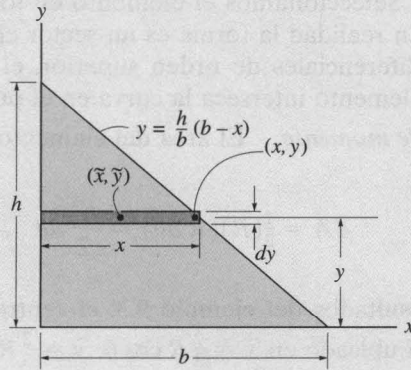


Fig. 9-11

Solución

Elemento diferencial. Considere un elemento rectangular con espesor dy que interseca la frontera en (x, y) , figura 9-11.

Área y brazos de momento. El área del elemento es $dA = x dy = \frac{b}{h}(h - y) dy$, y su centroide está localizado a una distancia $\tilde{y} = y$ del eje x .

Integraciones. Aplicando la segunda de las ecuaciones 9-6 e integrando con respecto a y , obtenemos

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^h y \frac{b}{h}(h - y) dy}{\int_0^h \frac{b}{h}(h - y) dy} = \frac{\frac{1}{6}bh^2}{\frac{1}{2}bh} \\ &= \frac{h}{3}\end{aligned}$$

Resp.

EJEMPLO 9.4

Localice el centroide para el área de un cuadrante de círculo mostrado en la figura 9-12a.

Solución I

Elemento diferencial. Usaremos coordenadas polares ya que la frontera es circular. Seleccionamos el elemento en forma de *triángulo*, figura 9-12a. (En realidad la forma es un sector circular; sin embargo, ignorando diferenciales de orden superior, el elemento resulta triangular). El elemento interseca la curva en el punto (R, θ) .

Área y brazos de momento. El área del elemento es

$$dA = \frac{1}{2}(R)(R d\theta) = \frac{R^2}{2} d\theta$$

y usando los resultados del ejemplo 9.3, el centroide del elemento (triangular) está ubicado en $\tilde{x} = \frac{2}{3}R \cos \theta$, $\tilde{y} = \frac{2}{3}R \sin \theta$.

Integraciones. Aplicando las ecuaciones 9-6 e integrando con respecto a θ , obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{3}R \cos \theta\right) \frac{R^2}{2} d\theta}{\int_0^{\pi/2} \frac{R^2}{2} d\theta} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3}R\right) \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{4R}{3\pi} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{3}R \sin \theta\right) \frac{R^2}{2} d\theta}{\int_0^{\pi/2} \frac{R^2}{2} d\theta} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3}R\right) \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{4R}{3\pi} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

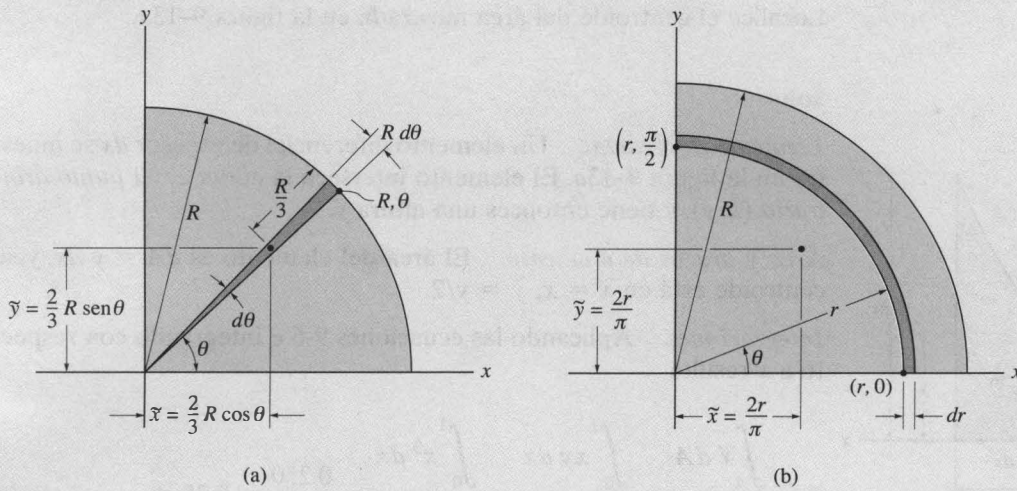


Fig. 9-12

Solución II

Elemento diferencial. El elemento diferencial se puede elegir en forma de un *arco circular* con espesor dr como se muestra en la figura 9-12b. El elemento interseca los ejes en los puntos $(r, 0)$ y $(r, \pi/2)$.

Área y brazos de momento. El área del elemento es $dA = (2\pi r/4) dr$. Como el centroide de un arco circular de 90° fue determinado en el ejemplo 9.2, entonces, para el elemento $\tilde{x} = 2r/\pi$, $\tilde{y} = 2r/\pi$.

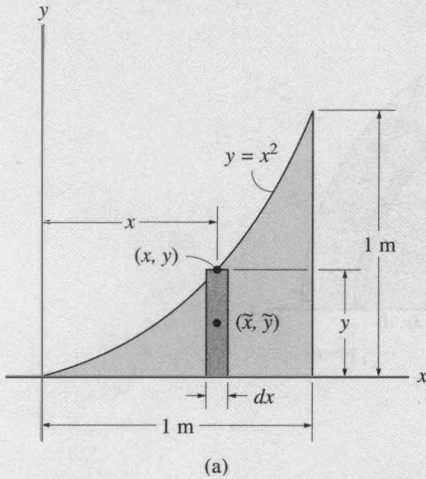
Integraciones. Usando las ecuaciones 9-6 e integrando con respecto a r , obtenemos

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^R \frac{2r}{\pi} \left(\frac{2\pi r}{4} \right) dr}{\int_0^R \frac{2\pi r}{4} dr} = \frac{\int_0^R r^2 dr}{\frac{\pi}{2} \int_0^R r dr} = \frac{4R}{3\pi} \quad \text{Resp.}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^R \frac{2r}{\pi} \left(\frac{2\pi r}{4} \right) dr}{\int_0^R \frac{2\pi r}{4} dr} = \frac{\int_0^R r^2 dr}{\frac{\pi}{2} \int_0^R r dr} = \frac{4R}{3\pi} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 9.5

Localice el centroide del área mostrada en la figura 9-13a.



Solución

Elemento diferencial. Un elemento diferencial de espesor dx se muestra en la figura 9-13a. El elemento interseca la curva en el *punto arbitrario* (x, y) , y tiene entonces una altura y .

Área y brazos de momento. El área del elemento es $dA = y dx$, y su centroide está en $\tilde{x} = x, \tilde{y} = y/2$.

Integraciones. Aplicando las ecuaciones 9-6 e integrando con respecto a x resulta

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 xy dx}{\int_0^1 y dx} = \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{0.250}{0.333} = 0.75 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 (y/2)y dx}{\int_0^1 y dx} = \frac{\int_0^1 (x^2/2)x^2 dx}{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{0.100}{0.333} = 0.3 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

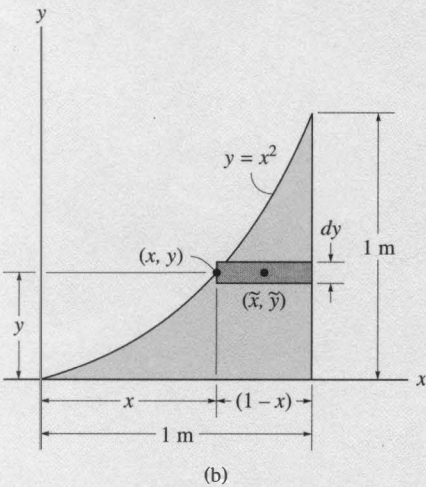


Fig. 9-13

Solución II

Elemento diferencial. El elemento diferencial de espesor dy se muestra en la figura 9-13b. El elemento interseca la curva en el *punto arbitrario* (x, y) y tiene entonces una longitud $(1 - x)$.

Área y brazos de momento. El área del elemento es $dA = (1 - x) dy$, y su centroide está ubicado en

$$\tilde{x} = x + \left(\frac{1 - x}{2}\right) = \frac{1 + x}{2}, \quad \tilde{y} = y$$

Integraciones. Aplicando las ecuaciones 9-6 e integrando con respecto a y , obtenemos

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 [(1 + x)/2](1 - x) dy}{\int_0^1 (1 - x) dy} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 (1 - y) dy}{\int_0^1 (1 - \sqrt{y}) dy} = \frac{0.250}{0.333} = 0.75 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 y(1 - x) dy}{\int_0^1 (1 - x) dy} = \frac{\int_0^1 (y - y^{3/2}) dy}{\int_0^1 (1 - \sqrt{y}) dy} = \frac{0.100}{0.333} = 0.3 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 9.6

Localice el centroide \bar{x} del área sombreada limitada por las dos curvas $y = x$ y $y = x^2$, figura 9-14.

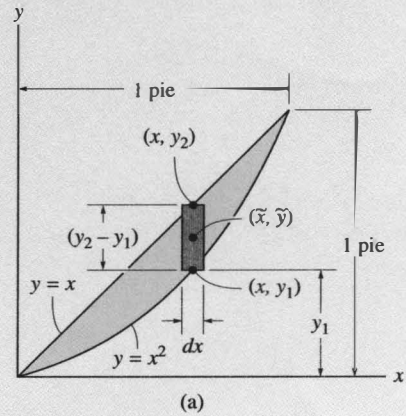
Solución I

Elemento diferencial. Un elemento diferencial de espesor dx se muestra en la figura 9-14a. El elemento interseca las curvas en *puntos arbitrarios* (x, y_1) y (x, y_2) , por lo que tiene una altura $(y_2 - y_1)$.

Área y brazo de momento. El área del elemento es $dA = (y_2 - y_1) dx$, y su centroide está ubicado en $\tilde{x} = x$.

Integración. Aplicando la ecuación 9-6, tenemos

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 x(y_2 - y_1) dx}{\int_0^1 (y_2 - y_1) dx} = \frac{\int_0^1 x(x - x^2) dx}{\int_0^1 (x - x^2) dx} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = 0.5 \text{ pies} \quad \text{Resp.}$$


Solución II

Elemento diferencial. Un elemento diferencial con espesor dy se muestra en la figura 9-14b. El elemento interseca las curvas en los *puntos arbitrarios* (x_2, y) y (x_1, y) , por lo que tiene una longitud $(x_1 - x_2)$.

Área y brazo de momento. El área del elemento es $dA = (x_1 - x_2) dy$, y su centroide está ubicado en

$$\tilde{x} = x_2 + \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Integración. Aplicando la ecuación 9-6, tenemos

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 [(x_1 + x_2)/2](x_1 - x_2) dy}{\int_0^1 (x_1 - x_2) dy} = \frac{\int_0^1 [(\sqrt{y} + y)/2](\sqrt{y} - y) dy}{\int_0^1 (\sqrt{y} - y) dy} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 (y - y^2) dy}{\int_0^1 (\sqrt{y} - y) dy} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = 0.5 \text{ pies} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

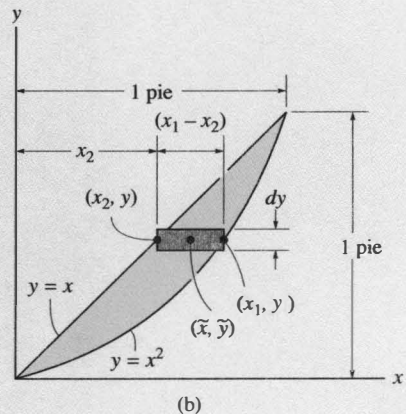
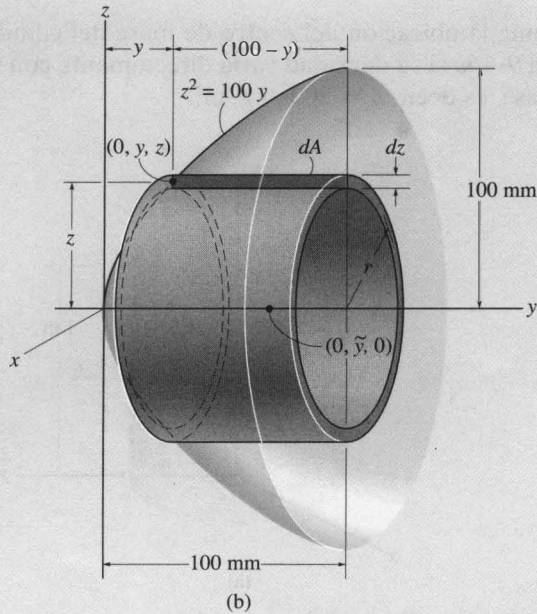


Fig. 9-14



Solución II

Elemento diferencial. Como se muestra en la figura 9-15b, el elemento de volumen se puede elegir en la forma de un *casarón cilíndrico delgado*, donde el espesor del casarón es dz . En este método de análisis del “casarón”, el elemento de área plana, dA , se toma siempre *paralelo* al eje de revolución. Aquí, el elemento interseca la curva generatriz en el punto $(0, y, z)$, y el radio del casarón es $r = z$.

Área y brazo de momento. El volumen del elemento es $dV = 2\pi r dA = 2\pi z(100 - y) dz$, y su centroide está ubicado en $\tilde{y} = y + (100 - y)/2 = (100 + y)/2$.

Integraciones. Aplicando la segunda ecuación del conjunto de ecuaciones 9-5, e integrando con respecto a z resulta

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\int_V \tilde{y} dV}{\int_V dV} = \frac{\int_0^{100} [(100 + y)/2] 2\pi z(100 - y) dz}{\int_0^{100} 2\pi z(100 - y) dz} \\ &= \frac{\pi \int_0^{100} z(10^4 - 10^{-4}z^4) dz}{2\pi \int_0^{100} z(100 - 10^{-2}z^2) dz} = 66.7 \text{ mm} \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

EJEMPLO 9.8

Determine la ubicación del centro de masa del cilindro mostrado en la figura 9-16a si su densidad varía directamente con la distancia desde su base, es decir, $\rho = 200z \text{ kg/m}^3$.

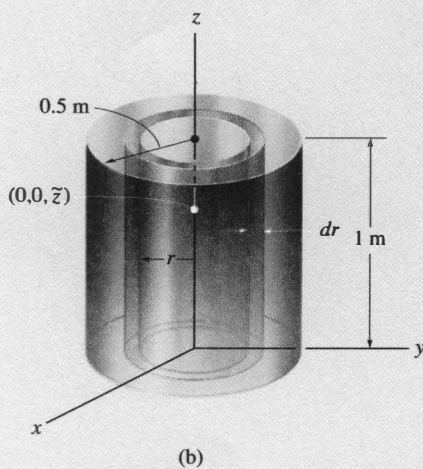
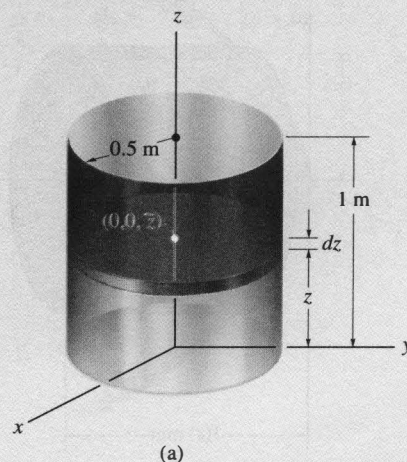


Fig. 9-16

Solución

Por razones de simetría del material,

$$\bar{x} = \bar{y} = 0$$

Resp.

Elemento diferencial. Para efectuar la integración se elige un elemento en forma de disco, con radio de 0.5 m y espesor dz , como se muestra en la figura 9-16a, ya que la densidad de todo el elemento es constante para un valor dado de z . El elemento se localiza a lo largo del eje z en el punto arbitrario $(0, 0, z)$.

Volumen y brazo de momento. El volumen del elemento es $dV = \pi(0.5)^2 dz$, y su centroide está ubicado en $\tilde{z} = z$.

Integraciones. Usando una ecuación similar a la tercera de las ecuaciones 9-4, e integrando con respecto a z , observamos que $\rho = 200z$, tenemos

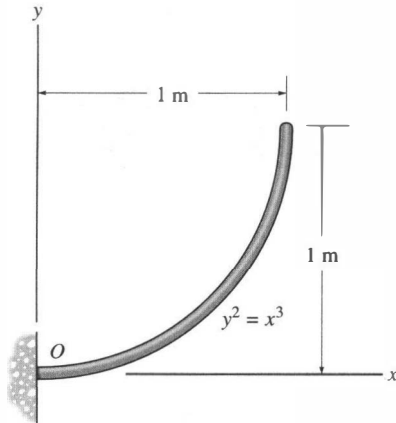
$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{\int_v \tilde{z} \rho dV}{\int_v \rho dV} = \frac{\int_0^1 z(200z)\pi(0.5)^2 dz}{\int_0^1 (200z)\pi(0.5)^2 dz} \\ &= \frac{\int_0^1 z^2 dz}{\int_0^1 z dz} = 0.667 \text{ m} \end{aligned}$$

Resp.

Nota: No es posible usar un elemento cascarón para efectuar la integración como se muestra en la figura 9-16b ya que la densidad del material que compone al cascarón *variaría* con la altura de éste, y por ello la ubicación de \tilde{z} para el elemento no podría ser especificada.

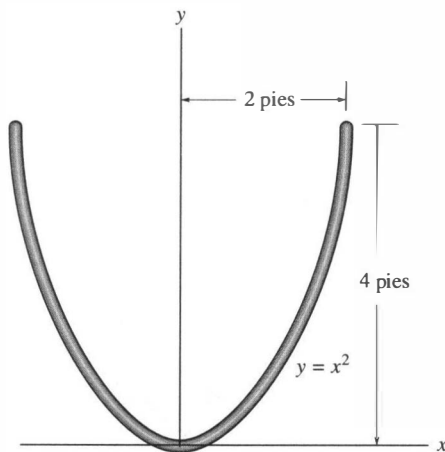
PROBLEMAS

9-1. Determine la distancia \bar{x} al centro de masa de la barra homogénea doblada en la forma que se muestra. Si la barra tiene una masa por longitud unitaria de 0.5 kg/m, determine las reacciones en el soporte empotrado O .



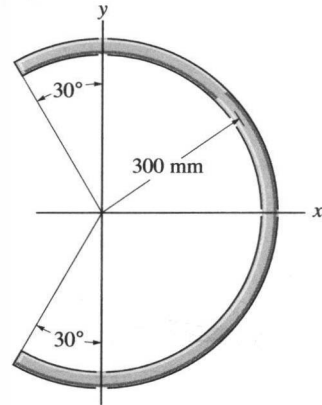
Prob. 9-1

9-2. Determine la ubicación (\bar{x}, \bar{y}) del centroide del alambre.



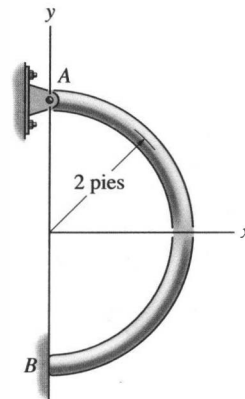
Prob. 9-2

9-3. Localice el centro de masa de la barra homogénea doblada en forma de un arco circular.



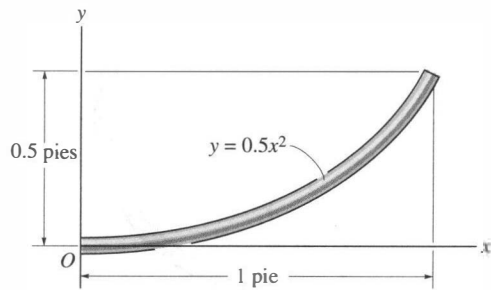
Prob. 9-3

*9-4. Localice el centro de gravedad \bar{x} de la barra homogénea doblada en forma de un arco semicircular. La barra tiene un peso por longitud unitaria de 0.5 lb/pie. Determine también la reacción horizontal en el soporte liso B y las componentes x y y de reacción en el pasador A .



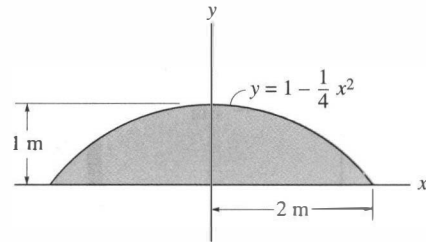
Prob. 9-4

9-5. Determine la distancia \bar{x} al centro de gravedad de la barra homogénea doblada en forma parabólica. Si la barra tiene un peso por longitud unitaria de 0.5 lb/pie, determine las reacciones en el soporte empotrado O .



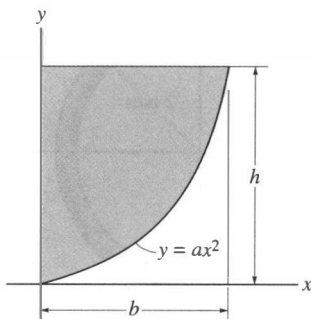
Probs. 9-5/6

*9-8. Localice el centroide (\bar{x}, \bar{y}) del área sombreada.



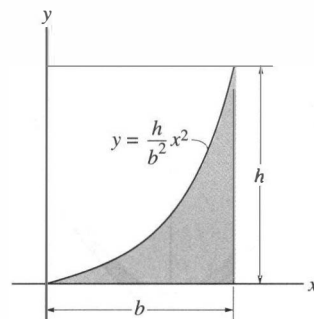
Prob. 9-8

9-7. Localice el centroide del área parabólica.



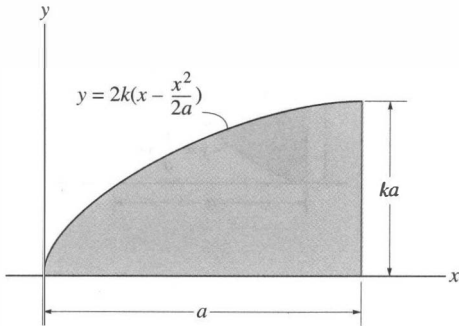
Prob. 9-7

9-9. Localice el centroide del área sombreada.



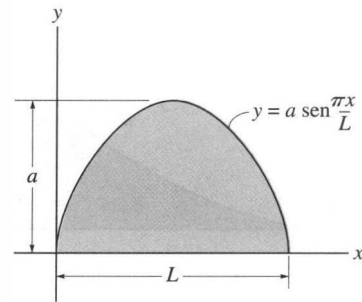
Prob. 9-9

9-10. Localice el centroide \bar{x} del área sombreada.



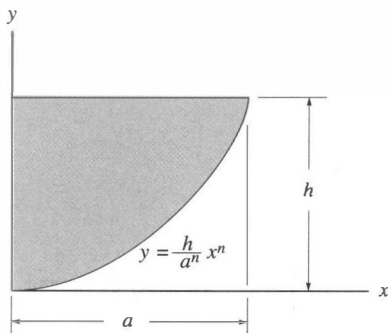
Prob. 9-10

*9-12. Localice el centroide del área sombreada.



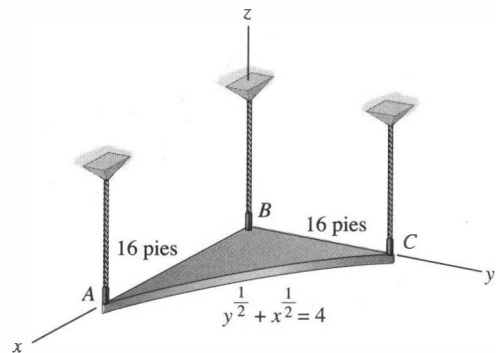
Prob. 9-12

9-11. Localice el centroide \bar{x} del área sombreada.



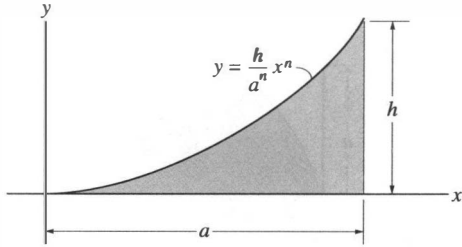
Prob. 9-11

9-13. La placa tiene un espesor de 0.25 pies y peso específico de $\gamma = 180 \text{ lb/pie}^3$. Determine la ubicación de su centro de gravedad. Encuentre también la tensión en cada una de las cuerdas usadas para soportarla.



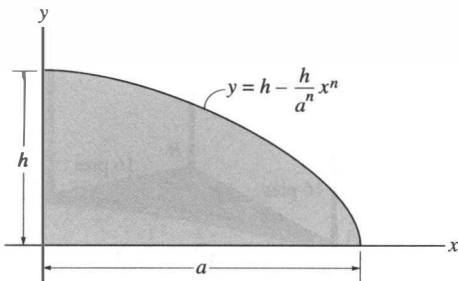
Prob. 9-13

9-14. Localice el centroide \bar{y} del área sombreada.



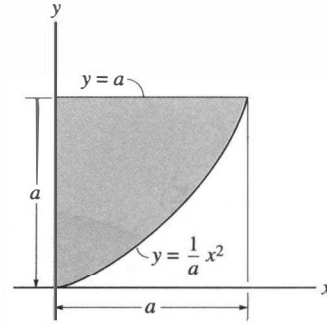
Prob. 9-14

9-15. Localice el centroide del área sombreada.



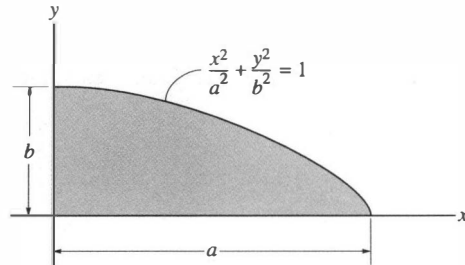
Prob. 9-15

*9-16. Localice el centroide del área sombreada limitada por la parábola y la línea $y = a$.



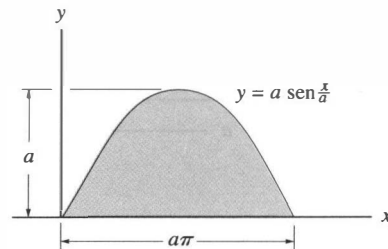
Prob. 9-16

9-17. Localice el centroide del área de un cuadrante elíptico.



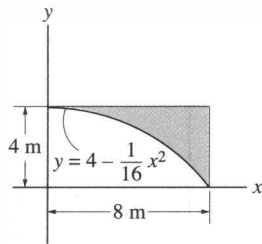
Prob. 9-17

9-18. Localice el centroide (\bar{x}, \bar{y}) del área sombreada.



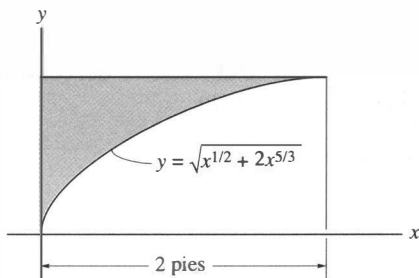
Prob. 9-18

9-19. Localice el centroide del área sombreada.



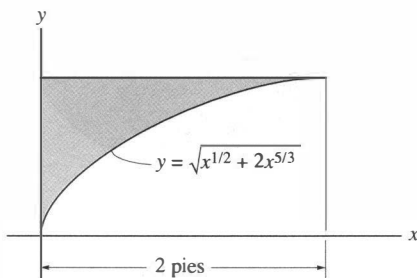
Prob. 9-19

*9-20. Localice el centroide \bar{x} del área sombreada. Resuelva el problema evaluando las integrales mediante la regla de Simpson.



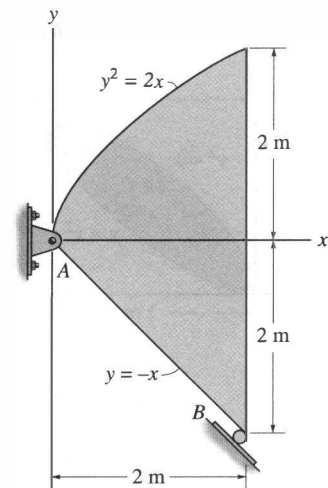
Prob. 9-20

*9-21. Localice el centroide \bar{y} del área sombreada. Resuelva el problema evaluando las integrales mediante la regla de Simpson.



Prob. 9-21

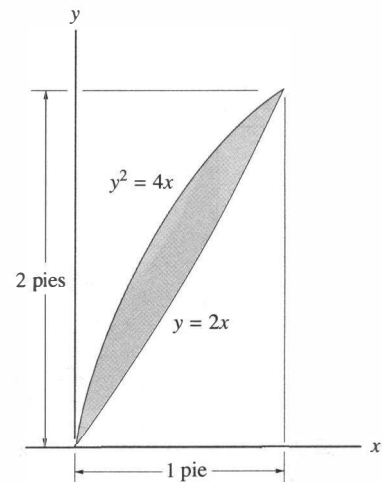
9-22. La placa de acero tiene un espesor de 0.3 m y densidad de 7850 kg/m^3 . Determine la ubicación de su centro de masa. Calcule también las reacciones en el pasador y en el soporte de rodillo.



Prob. 9-22

9-23. Localice el centroide \bar{x} del área sombreada.

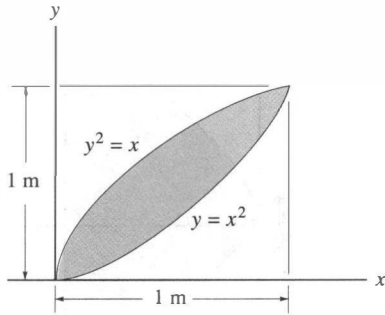
*9-24. Localice el centroide \bar{y} del área sombreada.



Probs. 9-23/24

9-25. Localice el centroide \bar{x} del área sombreada.

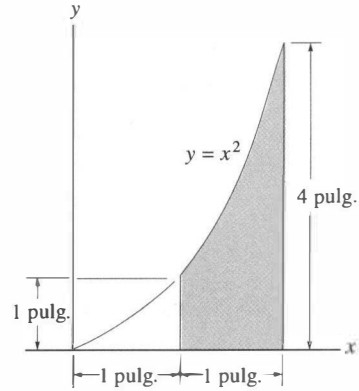
9-26. Localice el centroide \bar{y} del área sombreada.



Probs. 9-25/26

9-29. Localice el centroide \bar{x} del área sombreada.

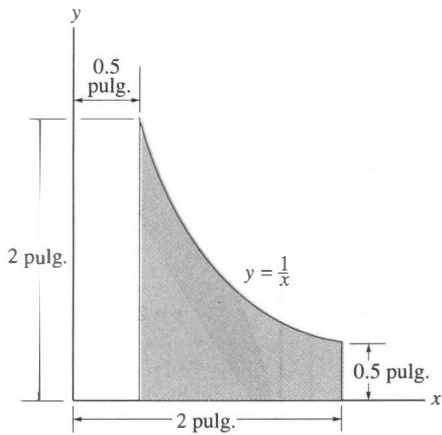
9-30. Localice el centroide \bar{y} del área sombreada.



Probs. 9-29/30

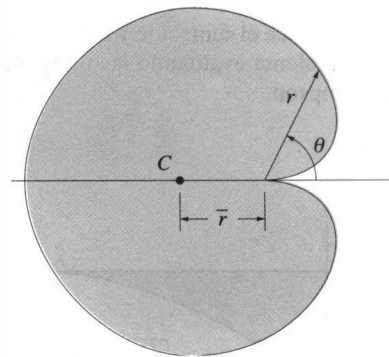
9-27. Localice el centroide \bar{y} del área sombreada.

*9-28. Localice el centroide \bar{y} del área sombreada.



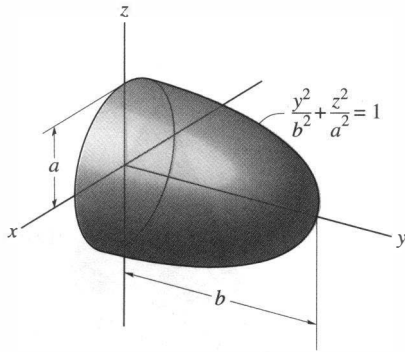
Probs. 9-27/28

9-31. Determine la ubicación \bar{r} del centroide C de la cardiode $r = a(1 - \cos \theta)$.



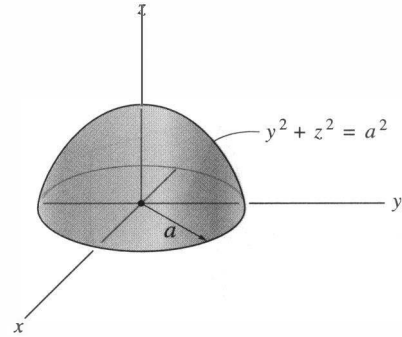
Prob. 9-31

*9-32. Localice el centroide del elipsoide de revolución.



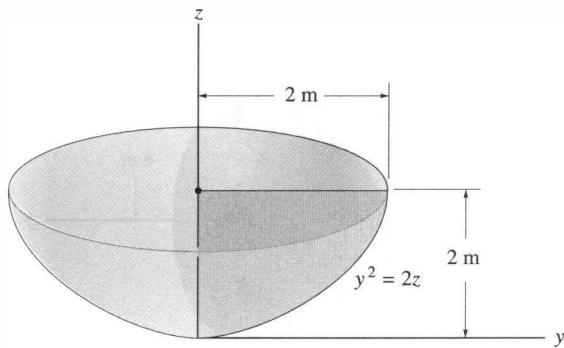
Prob. 9-32

9-34. Localice el centroide \bar{z} de la semiesfera.



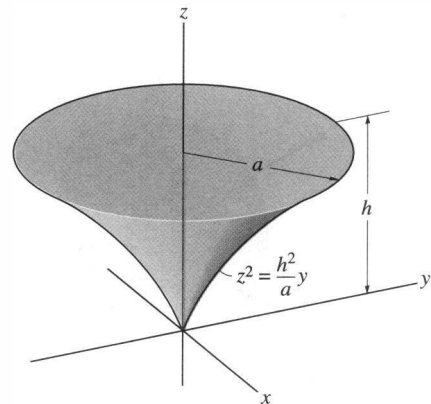
Prob. 9-34

9-33. Localice el centro de gravedad del volumen. El material es homogéneo.



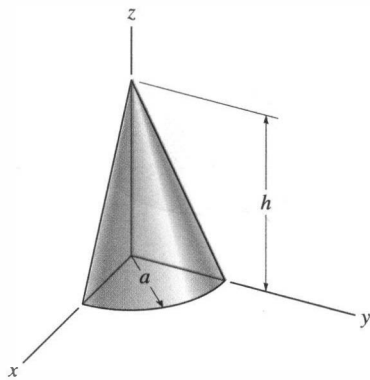
Prob. 9-33

9-35. Localice el centroide del sólido.



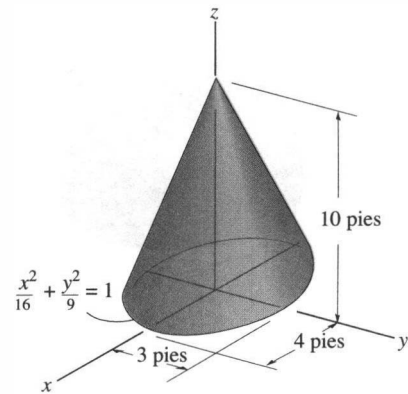
Prob. 9-35

*9-36. Localice el centroide del cuarto de cono.



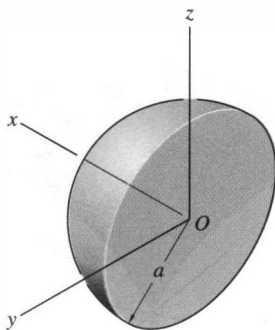
Prob. 9-36

9-38. Localice el centroide \bar{z} del cono elíptico recto.



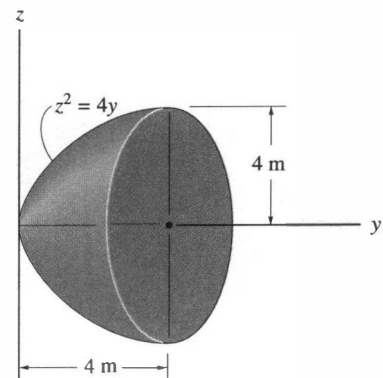
Prob. 9-38

9-37. Localice el centro de masa \bar{x} de la semiesfera. La densidad del material varía linealmente desde cero en el origen O hasta ρ_0 en la superficie. *Sugerencia:* Para efectuar la integración elija un elemento de cascarón semiesférico.



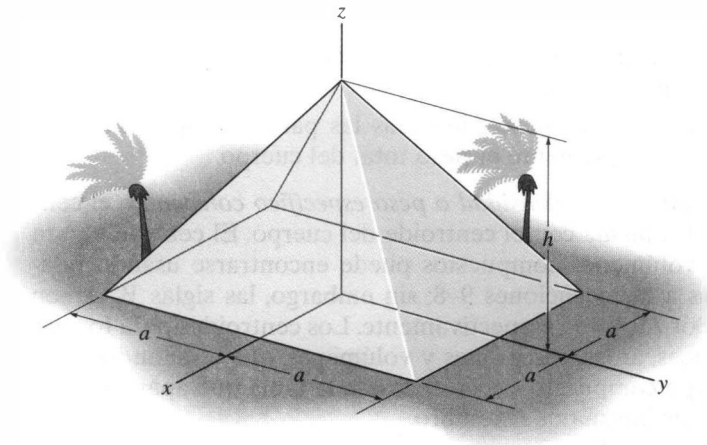
Prob. 9-37

9-39. Localice el centroide \bar{y} del paraboloide.



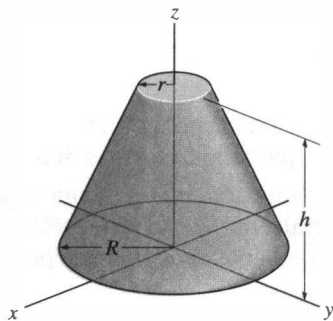
Prob. 9-39

*9-40. En la Gran Pirámide de Giza, la cámara del rey está localizada en su centroide. Suponiendo que la pirámide es un sólido, demuestre que este punto está en $\bar{z} = 1/4 h$. *Sugerencia:* Use un elemento de placa rectangular diferencial que tenga un espesor dz y área $(2x)(2y)$.



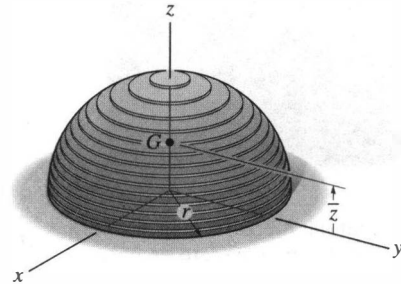
Prob. 9-40

9-41. Localice el centroide \bar{z} del cono circular recto truncado.



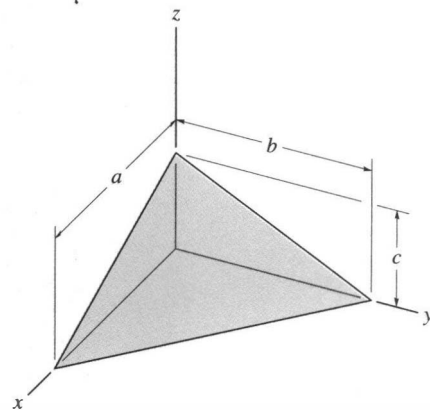
Prob. 9-41

9-42. La semiesfera de radio r está hecha a partir de una pila de placas muy delgadas de manera que la densidad varía con la altura $= kz$, donde k es una constante. Determine su masa y la distancia \bar{z} al centro de masa G .



Prob. 9-42

9-43. Determine la ubicación \bar{z} del centroide del tetraedro. *Sugerencia:* Use un elemento de “placa” triangular paralelo al plano $x-y$ y de espesor dz .



Prob. 9-43

9.3 Cuerpos compuestos

Un *cuerpo compuesto* consiste en una serie de cuerpos “más simples” conectados, los cuales pueden ser rectangulares, triangulares, semicirculares, etc. Un cuerpo de esta índole a menudo puede ser seccionado o dividido en sus partes componentes y, si se conocen el *peso* y la ubicación de cada una de esas partes, es posible eliminar la necesidad de la integración para determinar el centro de gravedad del cuerpo entero. El método para hacer esto requiere tratar cada parte componente como una partícula y seguir el procedimiento delineado en la sección 9.1. Así,



Para determinar la fuerza requerida para voltear esta barrera de concreto es necesario encontrar primero la ubicación de su centro de gravedad.

resultan fórmulas análogas a las ecuaciones 9-1 ya que debemos considerar un número finito de pesos. Reescribiendo esas fórmulas, tenemos

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}W}{\Sigma W} \quad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}W}{\Sigma W} \quad \bar{z} = \frac{\sum \tilde{z}W}{\Sigma W} \quad (9-8)$$

Aquí,

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ representan las coordenadas del centro de gravedad G del cuerpo compuesto.

$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ representan las coordenadas del centro de gravedad de cada parte componente del cuerpo.

ΣW es la suma de los pesos de todas las partes componentes del cuerpo, o simplemente el peso total del cuerpo.

Cuando el cuerpo tiene *densidad o peso específico constantes*, el centro de gravedad *coincide* con el centroide del cuerpo. El centroide para líneas, áreas y volúmenes compuestos puede encontrarse usando relaciones análogas a las ecuaciones 9-8; sin embargo, las siglas W deben reemplazarse por L, A y V , respectivamente. Los centroides para formas comunes de líneas, áreas, cascarones y volúmenes, que a menudo constituyen un cuerpo compuesto, están dados en la tabla que aparece en la cubierta posterior interna de este libro.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

La ubicación del centro de gravedad de un cuerpo o del centroide de un objeto geométrico compuesto representado por una línea, un área o un volumen, puede ser determinada usando el siguiente procedimiento.

Partes componentes.

- Mediante un croquis, divida el cuerpo u objeto en un número finito de partes componentes que tengan formas más simples.
- Si una parte componente tiene un *agujero*, o una región geométrica que no contenga material, entonces considérela sin el agujero y a éste como una parte componente *adicional* con peso o tamaño *negativos*.

Brazos de momento.

- Establezca los ejes coordenados sobre el croquis y determine las coordenadas $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ del centro de gravedad o centroide de cada parte.

Sumatorias.

- Determine $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ aplicando las ecuaciones del centro de gravedad, ecuaciones 9-8, o las ecuaciones análogas del centroide.
- Si un objeto es *simétrico* con respecto a un eje, su centroide se encuentra sobre este eje.

Si se desea, los cálculos pueden arreglarse en forma tabular, como se indica en los siguientes tres ejemplos.

EJEMPLO 9.9

Localice el centroide del alambre mostrado en la figura 9-17a.

Solución

Partes componentes. El alambre está dividido en tres segmentos como se muestra en la figura 9-17b.

Brazos de momento. La ubicación del centroide de cada pieza está determinada e indicada en la figura. En particular, el centroide del segmento ① es determinado por integración o usando la tabla que aparece en la cubierta posterior interior.

Sumatorias. Los cálculos se tabulan como sigue:

Segmento	L (mm)	\tilde{x} (mm)	\tilde{y} (mm)	\tilde{z} (mm)	$\tilde{x}L$ (mm ²)	$\tilde{y}L$ (mm ²)	$\tilde{z}L$ (mm ²)
1	$\pi(60) = 188.5$	60	-38.2	0	11 310	-7200	0
2	40	0	20	0	0	800	0
3	20	0	40	-10	0	800	-200
	$\Sigma L = 248.5$				$\Sigma \tilde{x}L = 11\,310$	$\Sigma \tilde{y}L = -5600$	$\Sigma \tilde{z}L = -200$

Por consiguiente,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}L}{\Sigma L} = \frac{11310}{248.5} = 45.5 \text{ mm} \quad \text{Resp.}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}L}{\Sigma L} = \frac{-5600}{248.5} = -22.5 \text{ mm} \quad \text{Resp.}$$

$$\bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}L}{\Sigma L} = \frac{-200}{248.5} = -0.805 \text{ mm} \quad \text{Resp.}$$

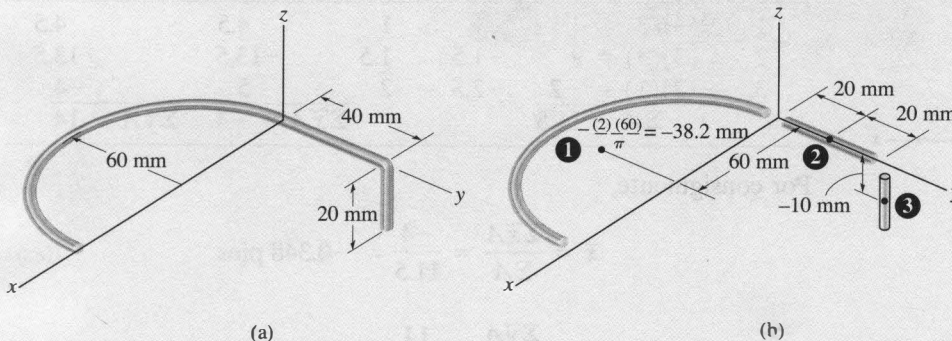


Fig. 9-17

EJEMPLO 9.10

Localice el centroide del área de la placa mostrada en la figura 9–18a.

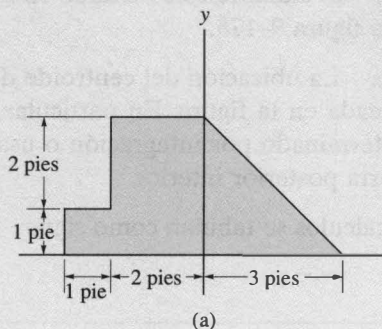
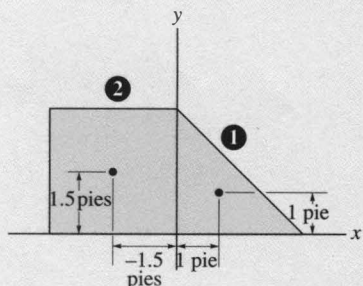


Fig. 9–18



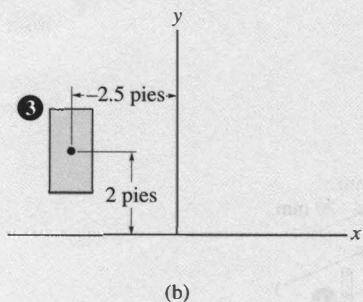
Solución

Partes componentes. La placa está dividida en tres segmentos como se muestra en la figura 9–18b. Aquí, el área del rectángulo pequeño ③ es considerada “negativa” ya que debe ser restada del rectángulo mayor ②.

Brazos de momento. El centroide de cada segmento está localizado como se indica en la figura. Observe que las coordenadas \tilde{x} de ② y ③ son *negativas*.

Sumatorias. Tomando los datos de la figura 9–18b, los cálculos se tabulan como sigue:

Segmento	A (pies ²)	\tilde{x} (pies)	\tilde{y} (pies)	$\tilde{x}A$ (pies ³)	$\tilde{y}A$ (pies ³)
1	$\frac{1}{2}(3)(3) = 4.5$	1	1	4.5	4.5
2	$(3)(3) = 9$	-1.5	1.5	-13.5	13.5
3	$-(2)(1) = -2$	-2.5	2	5	-4
	$\Sigma A = 11.5$			$\Sigma \tilde{x}A = -4$	$\Sigma \tilde{y}A = 14$



Por consiguiente,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}A}{\Sigma A} = \frac{-4}{11.5} = -0.348 \text{ pies} \quad \text{Resp.}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}A}{\Sigma A} = \frac{14}{11.5} = 1.22 \text{ pies} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 9.11

Localice el centro de masa del conjunto compuesto mostrado en la figura 9–19a. La densidad del cono truncado es $\rho_c = 8 \text{ Mg/m}^3$, y la de la semiesfera es $\rho_h = 4 \text{ Mg/m}^3$. En el centro se tiene un agujero cilíndrico de radio igual a 25 mm.

Solución

Partes componentes. Puede considerarse que la pieza mostrada consiste en cuatro segmentos como se ve en la figura 9–19b. En los cálculos, ③ y ④ deben tomarse como volúmenes “negativos” para que los cuatro segmentos, al sumarse, resulten en la forma total compuesta que se aprecia en la figura 9–19a.

Brazo de momento. Usando la tabla que aparece en la cubierta posterior interna de este libro, podemos efectuar los cálculos para el centroide \tilde{z} de cada pieza, los cuales se muestran en la figura.

Sumatorias. Debido a la *simetría*, observe que

$$\bar{x} = \bar{y} = 0$$

Resp.

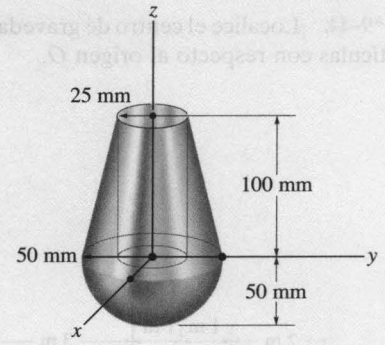
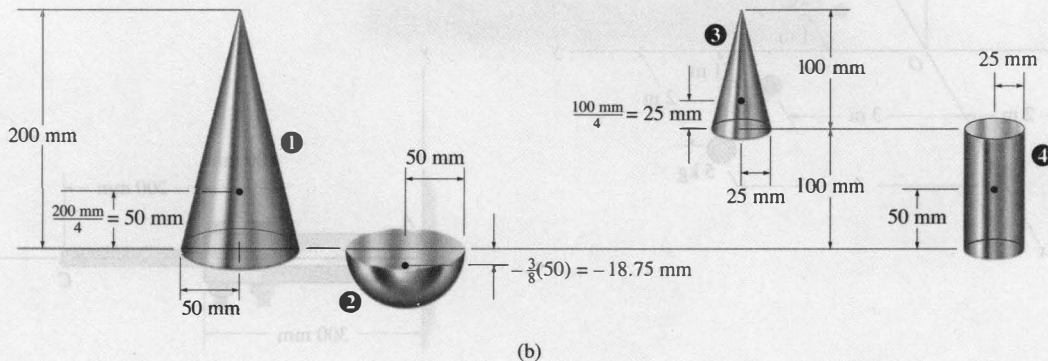
Como $W = mg$ y g es constante, la tercera de las ecuaciones 9–8 toma la forma $\bar{z} = \Sigma \tilde{z}m / \Sigma m$. La masa de cada pieza puede ser calculada a partir de $m = \rho V$ y usarse en los cálculos. También, $1 \text{ Mg/m}^3 = 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$, por lo que

Segmento	m (kg)	\tilde{z} (mm)	$\tilde{z}m$ (kg · mm)
1	$8(10^{-6})(\frac{1}{3})\pi(50)^2(200) = 4.189$	50	209.440
2	$4(10^{-6})(\frac{2}{3})\pi(50)^3 = 1.047$	-18.75	-19.635
3	$-8(10^{-6})(\frac{1}{3})\pi(25)^2(100) = -0.524$	$100 + 25 = 125$	-65.450
4	$-8(10^{-6})\pi(25)^2(100) = -1.571$	50	-78.540
	$\Sigma m = 3.141$		$\Sigma \tilde{z}m = 45.815$

Entonces,

$$\bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}m}{\Sigma m} = \frac{45.815}{3.141} = 14.6 \text{ mm}$$

Resp.

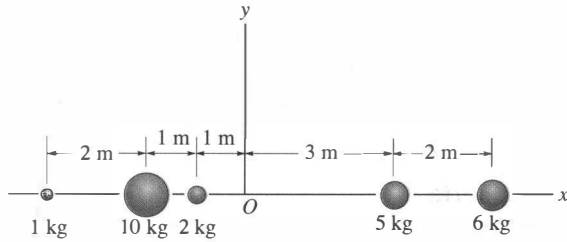


(a)

Fig. 9–19

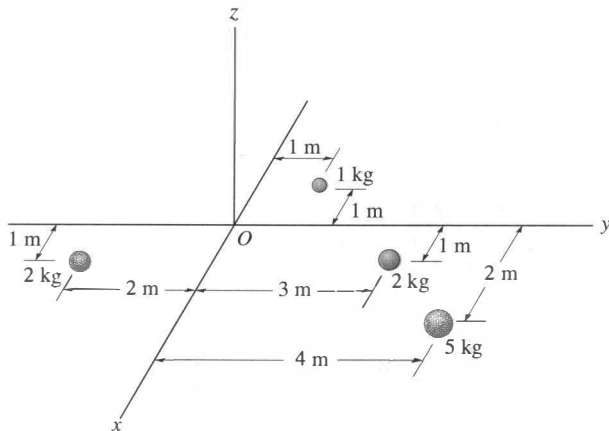
PROBLEMAS

*9-44. Localice el centro de gravedad G de las cinco partículas con respecto al origen O .



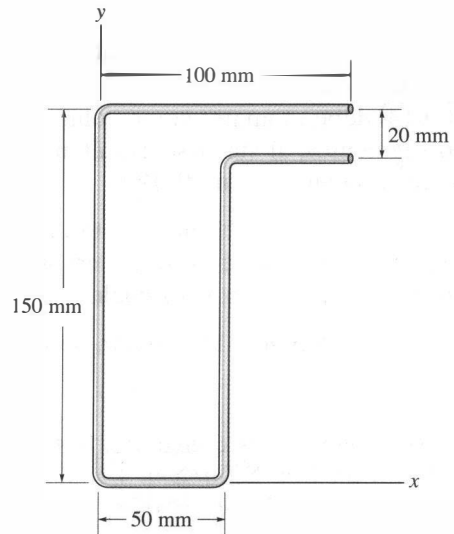
Prob. 9-44

9-45. Localice el centro de masa (\bar{x}, \bar{y}) de las cuatro partículas.



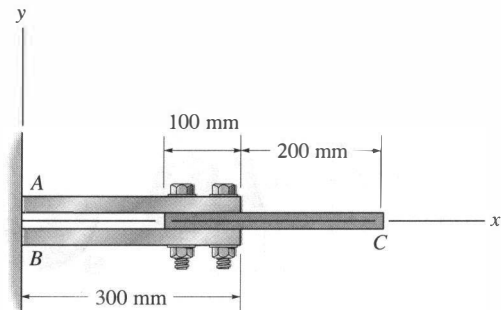
Prob. 9-45

9-46. Localice el centroide (\bar{x}, \bar{y}) del alambre uniforme doblado en la forma que se muestra.



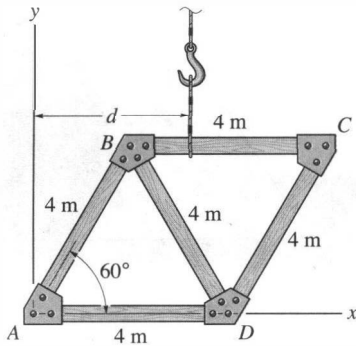
Prob. 9-46

9-47. El conjunto de placas de acero y aluminio está conectado mediante pernos y unido a la pared. Cada placa tiene un ancho constante de 200 mm en la dirección z y espesor de 20 mm. Si la densidad de A y B es $\rho_s = 7.85 \text{ Mg/m}^3$, y la de C es $\rho_{al} = 2.71 \text{ Mg/m}^3$, determine la ubicación \bar{x} del centro de masa. Ignore el tamaño de los pernos.



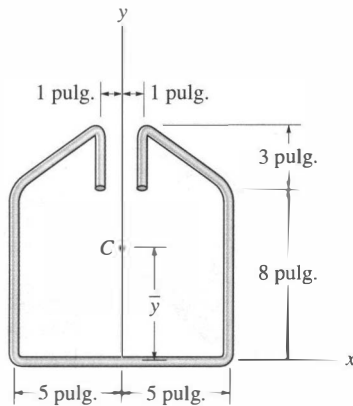
Prob. 9-47

***9-48.** La armadura está hecha con cinco miembros, cada miembro tiene longitud de 4 m y masa de 7 kg/m. Si la masa de las placas de nudo y el espesor de los miembros pueden ser ignorados, determine la distancia d a donde el cable de izado debe estar unido, de manera que la armadura no se voltee (no gire) cuando sea levantada.



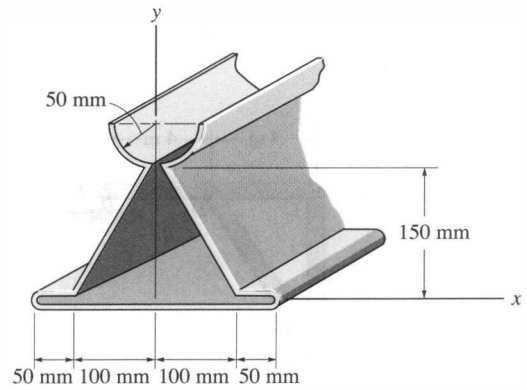
Prob. 9-48

9-49. Localice el centroide del alambre. Ignore el espesor del material y los pequeños dobleces en las esquinas.



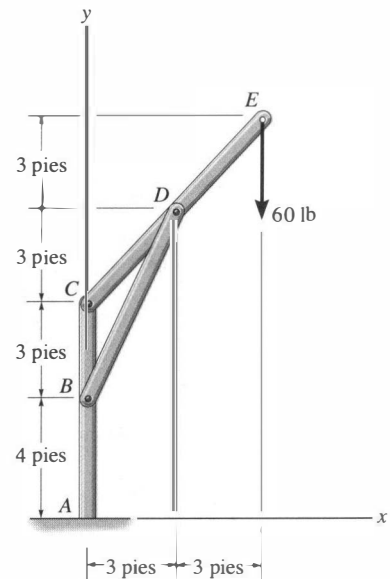
Prob. 9-49

9-50. Localice el centroide (\bar{x}, \bar{y}) de la sección transversal metálica. Ignore el espesor del material y ligeros dobleces en las esquinas.



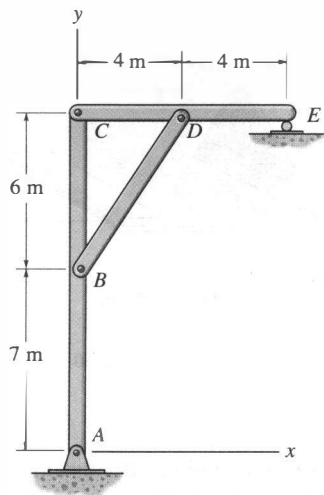
Prob. 9-50

9-51. Los tres miembros del bastidor tienen cada uno un peso por longitud unitaria de 4 lb/pie. Localice la posición (\bar{x}, \bar{y}) del centro de gravedad. Ignore el tamaño de los pasadores situados en los nudos y el espesor de los miembros. Calcule también las reacciones en el soporte fijo A.



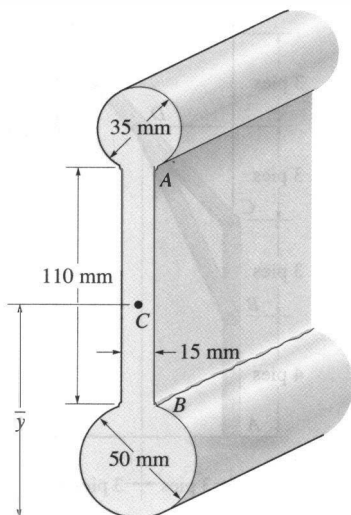
Prob. 9-51

*9-52. Cada uno de los tres miembros del bastidor tiene una masa por longitud unitaria de 6 kg/m. Localice la posición (\bar{x}, \bar{y}) del centro de gravedad. Ignore el tamaño de los pasadores situados en los nudos y el espesor de los miembros. Calcule también las reacciones en el pasador A y en el rodillo E .



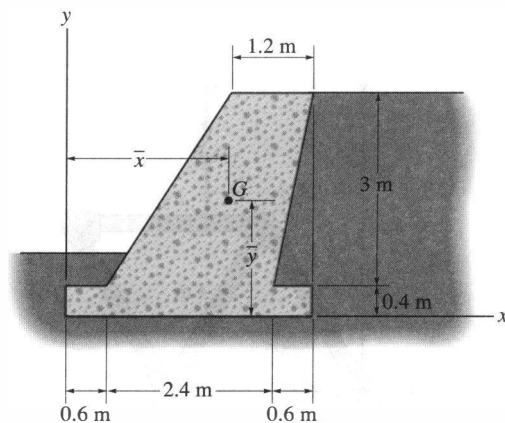
Prob. 9-52

9-53. Determine la ubicación \bar{y} del centroide del área de la sección transversal de la viga. Al efectuar el cálculo, ignore el tamaño de las soldaduras de esquina localizadas en A y B .



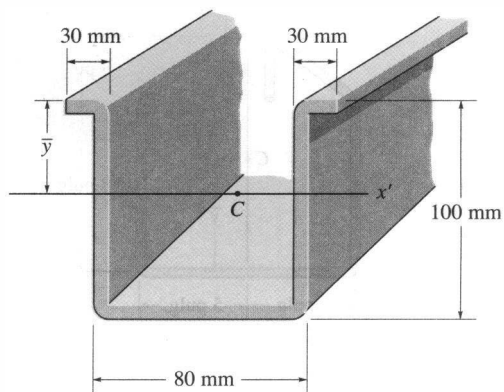
Prob. 9-53

9-54. El muro de gravedad está hecho de concreto. Determine la ubicación (\bar{x}, \bar{y}) del centro de gravedad G del muro.



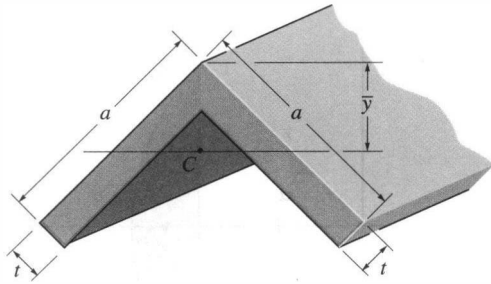
Prob. 9-54

9-55. Un puntal de aluminio tiene una sección transversal como la mostrada en la figura. Localice el centroide \bar{y} de su área. Cada segmento tiene un espesor de 10 mm.



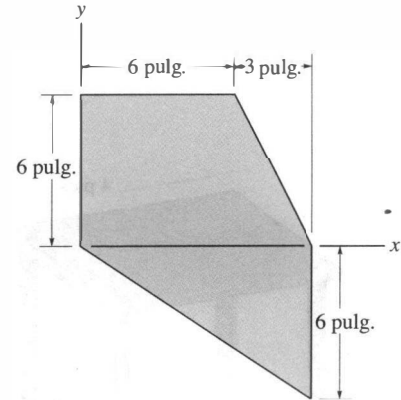
Prob. 9-55

*9-56. Localice el centroide \bar{y} del área de la sección transversal del perfil angular.



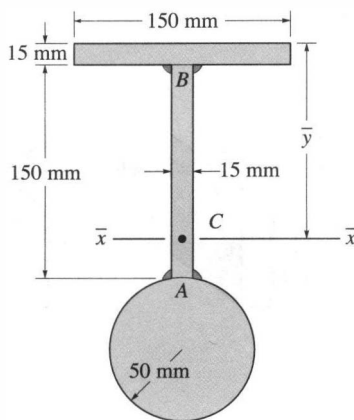
Prob. 9-56

9-58. Determine la ubicación (\bar{x}, \bar{y}) del centroide C del área.



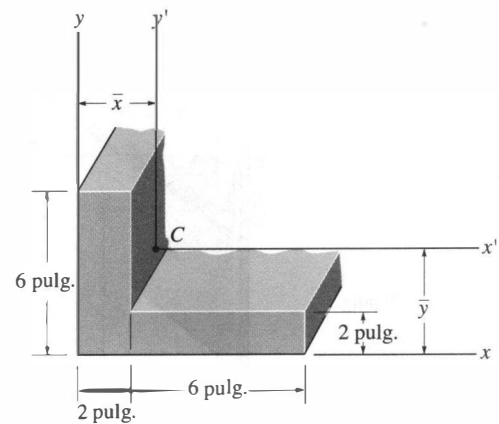
Prob. 9-58

9-57. Determine la ubicación \bar{y} del eje centroidal \bar{x} del área de la sección transversal de la viga. En los cálculos ignore el tamaño de las soldaduras de esquina situadas en A y B .



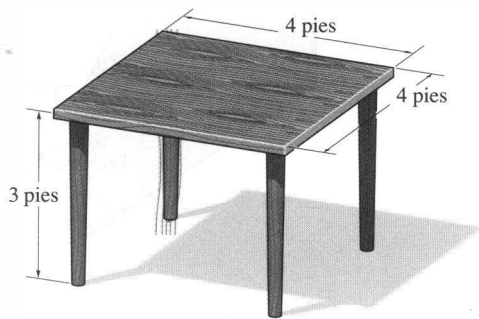
Prob. 9-57

9-59. Localice el centroide (\bar{x}, \bar{y}) para el área de la sección transversal del perfil angular.



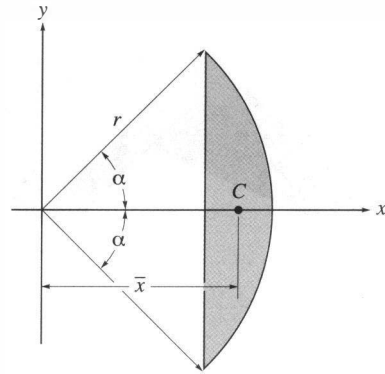
Prob. 9-59

***9-60.** La mesa de madera está hecha con una tabla cuadrada cuyo peso es de 15 lb. Cada una de las patas pesa 2 lb y tiene 3 pies de largo. Determine a qué altura está el centro de gravedad a partir del piso. También, ¿cuál es el ángulo, medido desde la horizontal, por el cual la superficie superior puede inclinarse sobre dos de las patas antes de comenzar a voltearse? Ignore el espesor de cada pata.



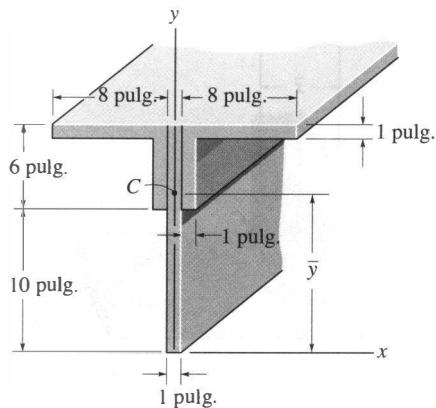
Prob. 9-60

9-62. Determine la ubicación \bar{x} del centroide C del área sombreada que es parte de un círculo de radio r .



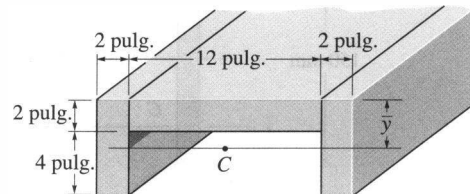
Prob. 9-62

9-61. Localice el centroide \bar{y} del área de la sección transversal de la viga en forma de T.



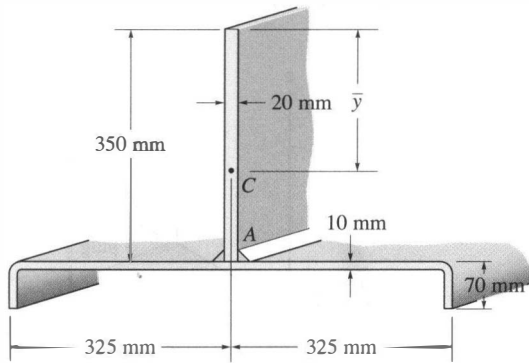
Prob. 9-61

9-63. Localice el centroide \bar{y} del área de la sección transversal de la canaleta.



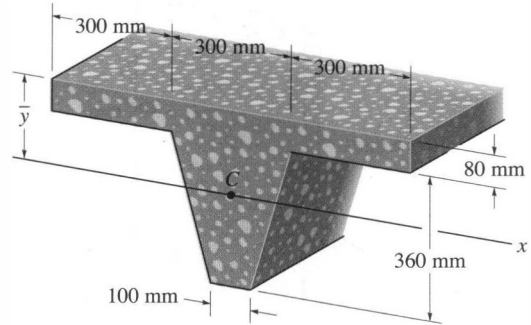
Prob. 9-63

***9-64.** Localice el centroide \bar{y} del área de la sección transversal de la viga construida con una canaleta y una placa. Suponga que todas las esquinas están a escuadra e ignore el tamaño de la soldadura ubicada en A.



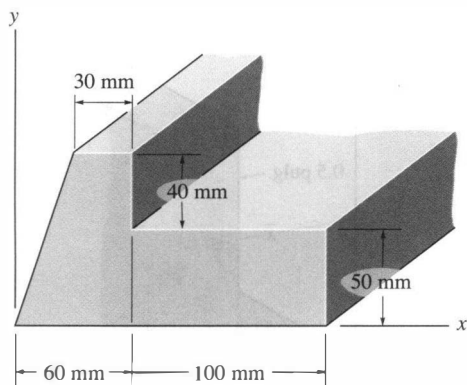
Prob. 9-64

9-66. Localice el centroide \bar{y} de la viga de concreto con la sección transversal ahusada que se muestra.



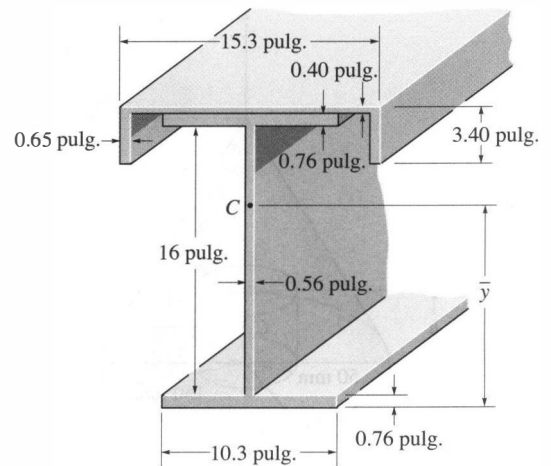
Prob. 9-66

9-65. Localice el centroide (\bar{x}, \bar{y}) del área de la sección transversal del miembro.



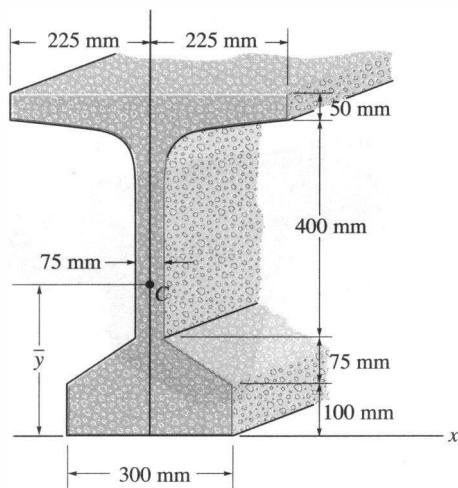
Prob. 9-65

9-67. Localice el centroide \bar{y} de la sección transversal de la viga construida a partir de una canaleta y una viga de patín ancho.



Prob. 9-67

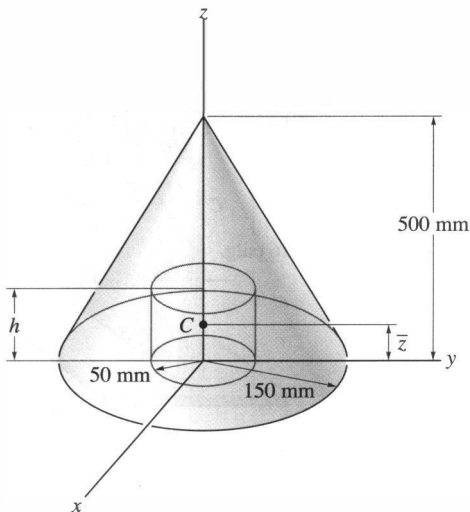
*9-68. Localice el centroide \bar{y} de la sección transversal mostrada.



Prob. 9-68

9-69. Determine la distancia h a la que un agujero de 100 mm de diámetro debe perforarse en la base del cono de manera que el centro de masa de la forma resultante esté localizado en $\bar{z} = 115$ mm. El material tiene una densidad de 8 Mg/m^3 .

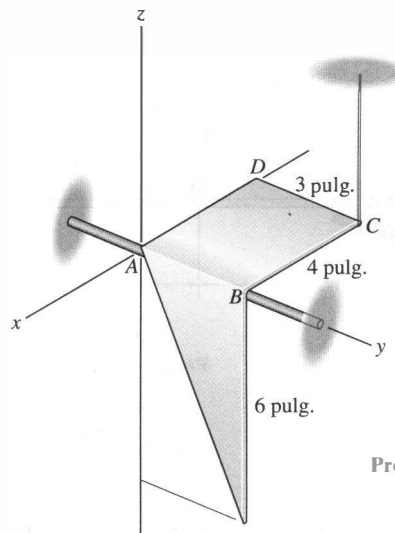
9-70. Determine la distancia \bar{z} al centroide de la forma que consiste en un cono con un agujero de altura $h = 50$ mm perforado en su base.



Probs. 9-69/70

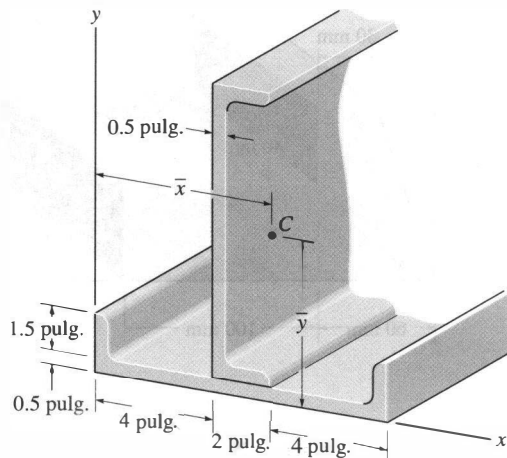
9-71. La hoja metálica tiene las dimensiones mostradas. Determine la ubicación $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de su centroide.

*9-72. La hoja metálica tiene un peso por área unitaria de 2 lb/pie^2 y está soportada mediante la barra lisa y en C. Si se corta lá cuerda, la hoja girará con respecto al eje y hasta que alcance el equilibrio. Determine el ángulo de inclinación de equilibrio, medido hacia abajo desde el eje x negativo, que AD forma con el eje $-x$.



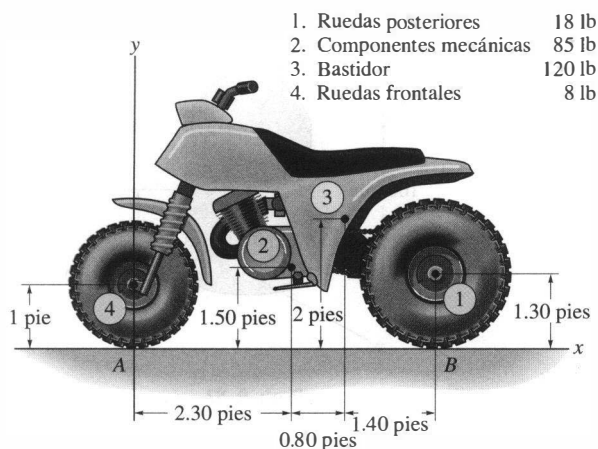
Probs. 9-71/72

9-73. Determine la posición (\bar{x}, \bar{y}) del centroide C de la sección transversal del miembro estructural construido con dos canales de igual tamaño soldados entre sí como se muestra. Suponga que todas las esquinas están a escuadra. Ignore el tamaño de las soldaduras.



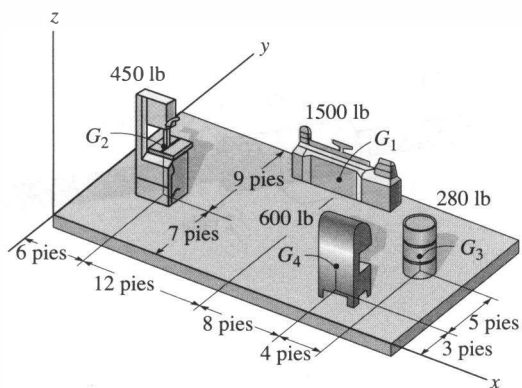
Prob. 9-73

9-74. Determine la ubicación (\bar{x}, \bar{y}) del centro de gravedad del triciclo. La ubicación del centro de gravedad de cada componente y su peso están tabulados en la figura. Si el triciclo es simétrico con respecto al plano $x-y$, determine las reacciones normales que cada rueda ejerce sobre el piso.



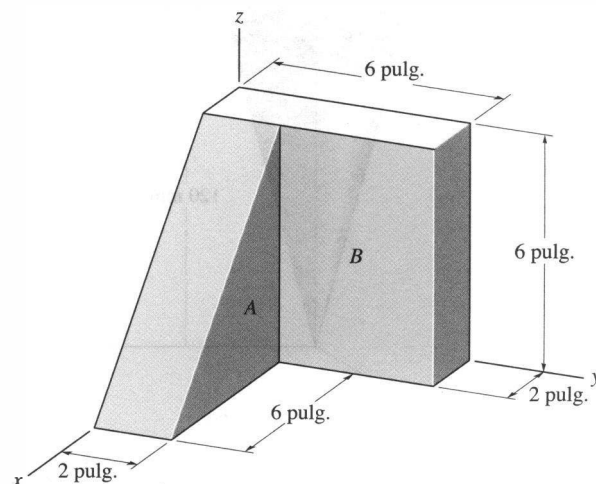
Prob. 9-74

9-75. Las principales cargas de piso en una tienda son causadas por los pesos de los objetos que se muestran. Cada fuerza actúa a través de su respectivo centro de gravedad G . Localice el centro de gravedad (\bar{x}, \bar{y}) de todas esas componentes.



Prob. 9-75

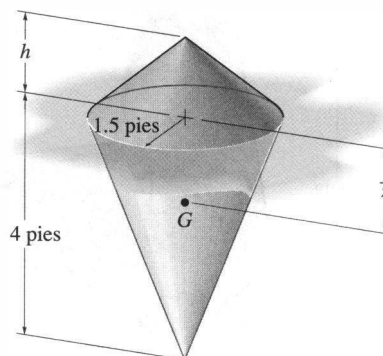
*9-76. Localice el centro de gravedad del conjunto formado por los dos bloques. Los pesos específicos de los materiales A y B son $\gamma_A = 150 \text{ lb/pie}^3$ y $\gamma_B = 400 \text{ lb/pie}^3$, respectivamente.



Prob. 9-76

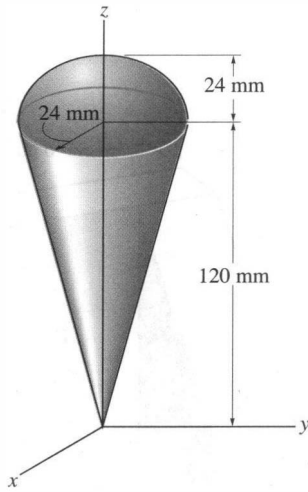
9-77. La boya está hecha con dos conos homogéneos, cada uno con radio de 1.5 pies. Si $h = 1.2$ pies, encuentre la distancia \bar{z} al centro de gravedad G de la boya.

9-78. La boya está hecha con dos conos homogéneos, cada uno con radio de 1.5 pies. Si se requiere que el centro de gravedad G de la boya esté ubicado en $\bar{z} = 0.5$ pies, determine la altura h del cono superior.



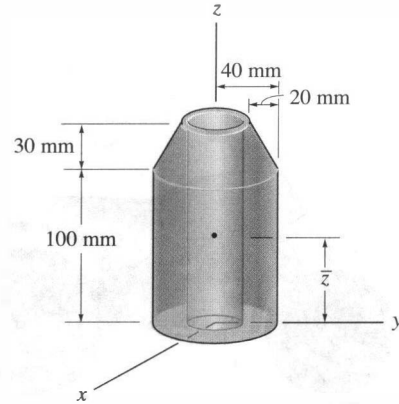
Probs. 9-77/78

9-79. Localice el centroide \bar{z} del trompo formado a partir de una semiesfera y un cono.



Prob. 9-79

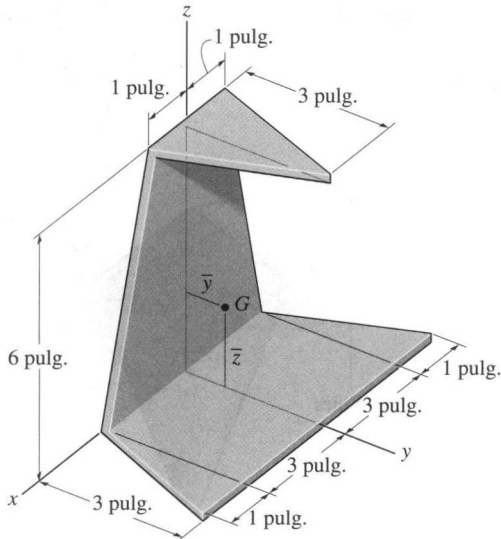
9-82. Localice el centro de masa \bar{z} del cuerpo mostrado. El material tiene una densidad de $\rho = 3 \text{ Mg/m}^3$. El cuerpo tiene un agujero de 30 mm de diámetro perforado a través del centro.



Prob. 9-82

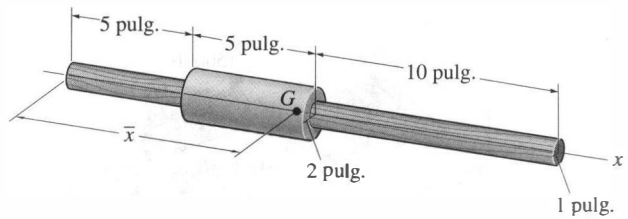
*9-80. Una placa triangular hecha de material homogéneo tiene un espesor constante que es muy pequeño. Si la placa se dobla como se muestra, determine la ubicación \bar{y} de su centro de gravedad G .

9-81. Una placa triangular hecha de material homogéneo tiene un espesor constante que es muy pequeño. Si la placa se dobla como se muestra, determine la ubicación \bar{z} de su centro de gravedad G .



Probs. 9-80/81

9-83. La pieza compuesta consiste en una barra de madera de 20 pulg y un collar de acero de ajuste apretado. Determine la distancia \bar{x} a su centro de gravedad si los pesos específicos de los materiales son $\gamma_w = 150 \text{ lb/pie}^3$ y $\gamma_{st} = 490 \text{ lb/pie}^3$. Los radios de la barra y el collar están indicados en la figura.



Prob. 9-83

*9.4 Teoremas de Pappus y Guldinus

Los dos *teoremas de Pappus y Guldinus*, que fueron desarrollados primero por Pappus de Alejandría durante el tercer siglo de la era cristiana y luego reformulados por el matemático suizo Paul Guldin o Guldinus (1577–1643), se usan para encontrar el área superficial y el volumen de cualquier objeto de revolución.

Un *área superficial de revolución* es generada al girar una *curva plana* alrededor de un eje fijo no intersectante en el plano de la curva; en cambio, un *volumen de revolución* es generado al girar un *área plana* alrededor de un eje fijo no intersectante en el plano del área. Por ejemplo, si la *línea AB* mostrada en la figura 9–20 es girada alrededor de un eje fijo, genera el *área superficial* de un cono (menos el área de la base); si el *área triangular ABC* mostrada en la figura 9–21 es girada alrededor del eje, genera el *volumen* de un cono.

A continuación se proporcionan los enunciados y las pruebas de los teoremas de Pappus y Guldinus. Las pruebas requieren que las curvas y áreas generatrices *no crucen* el eje alrededor del cual giran; de otra manera, dos secciones situadas a cualquier lado del eje generarían áreas o volúmenes con signos opuestos y, por tanto, de cancelarían entre sí.

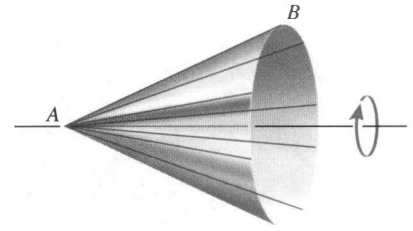


Fig. 9–20

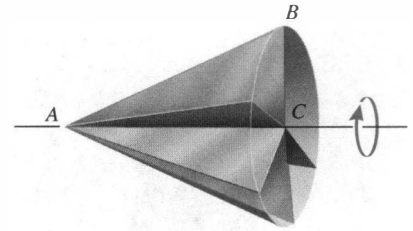


Fig. 9–21

Área de una superficie. *El área de una superficie de revolución es igual al producto de la longitud de la curva generatriz y la distancia recorrida por el centroide de la curva al generar el área superficial.*

Prueba. Cuando una longitud diferencial dL de la curva que muestra la figura 9–22 es girada alrededor de un eje a través de una distancia de $2\pi L$, la longitud genera un anillo que tiene área superficial $dA = 2\pi r dL$. El área superficial completa, generada al girar la curva entera con respecto al eje, es por tanto $A = 2\pi \int_L r dL$. Sin embargo, esta ecuación puede ser simplificada al advertir que la posición r del centroide para la línea de longitud total L puede ser determinada a partir de una ecuación que tiene la forma de las ecuaciones 9–7, es decir, $\int_L r dL = \bar{r}L$. Así, el área superficial total es $A = 2\pi\bar{r}L$. En general, si la línea no sufre una revolución completa, entonces,

$$A = \theta \bar{r}L$$

(9–9)

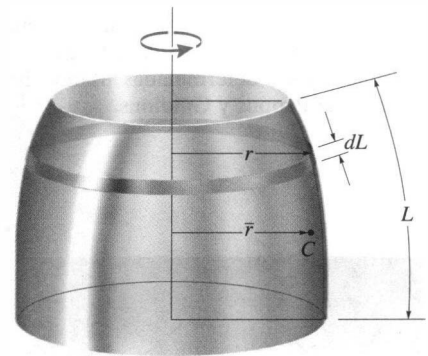


Fig. 9–22

donde A = área superficial de revolución

θ = ángulo de revolución medido en radianes, $\theta = 2\pi$

\bar{r} = distancia perpendicular del eje de revolución al centroide de la curva generatriz

L = longitud de la curva generatriz

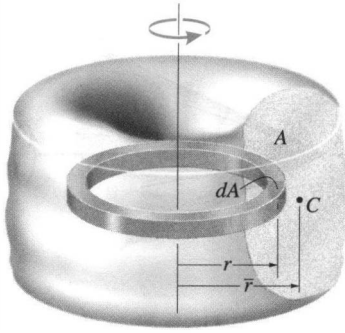
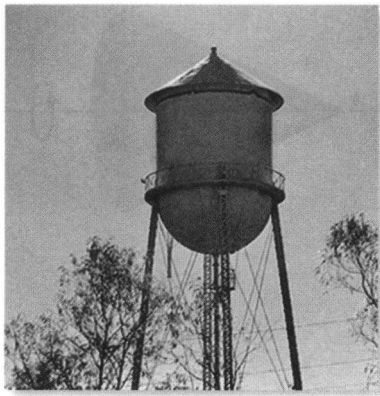


Fig. 9-23

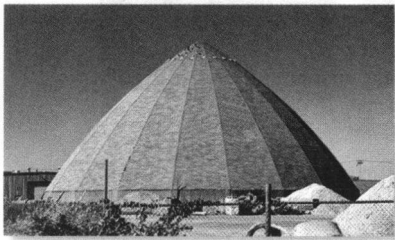
Volumen. El volumen de un cuerpo de revolución es igual al producto del área generatriz y la distancia recorrida por el centroide del área al generar el volumen.

Prueba. Cuando el área diferencial dA que muestra la figura 9-23 es girada alrededor de un eje a través de una distancia de $2\pi r$, genera un anillo con volumen $dV = 2\pi r dA$. El volumen total, generado al girar A alrededor del eje, es por tanto $V = 2\pi \int_V r dA$. Aquí, la integral puede ser eliminada usando una ecuación análoga a las ecuaciones 9-6, $\int_V r dA = \bar{r}A$, donde \bar{r} localiza el centroide C del área generatriz A . El volumen se convierte entonces en $V = 2\pi\bar{r}A$. En general,

$$V = \theta\bar{r}A \quad (9-10)$$



El área superficial y la cantidad de agua que puede ser almacenada en este tanque de agua pueden ser determinadas usando los teoremas de Pappus y Guldinus.



La cantidad de material usado para el techo en este edificio de almacenaje puede ser estimada mediante el teorema de Pappus y Guldinus para determinar su área superficial.

donde V = volumen de revolución

θ = ángulo de revolución medido en radianes, $\theta = 2\pi$

\bar{r} = perpendicular distancia perpendicular desde el eje de revolución al centroide del área generatriz

A = área generatriz

Formas compuestas. También podemos aplicar los dos teoremas anteriores a líneas o áreas que pueden estar compuestas por una serie de partes componentes. En este caso, el área superficial o volumen generado total es la suma de las áreas superficiales o volúmenes generados por cada una de las partes componentes. Como cada parte sufre el mismo ángulo de revolución, θ , y la distancia desde el eje de revolución al centroide de cada parte componente es \tilde{r} , entonces

$$A = \theta \Sigma(\tilde{r}L) \quad (9-11)$$

y

$$V = \theta \Sigma(\tilde{r}A) \quad (9-12)$$

La aplicación de los teoremas anteriores es ilustrada numéricamente en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9.12

Demuestre que el área superficial de una esfera es $A = 4\pi R^2$ y su volumen es $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

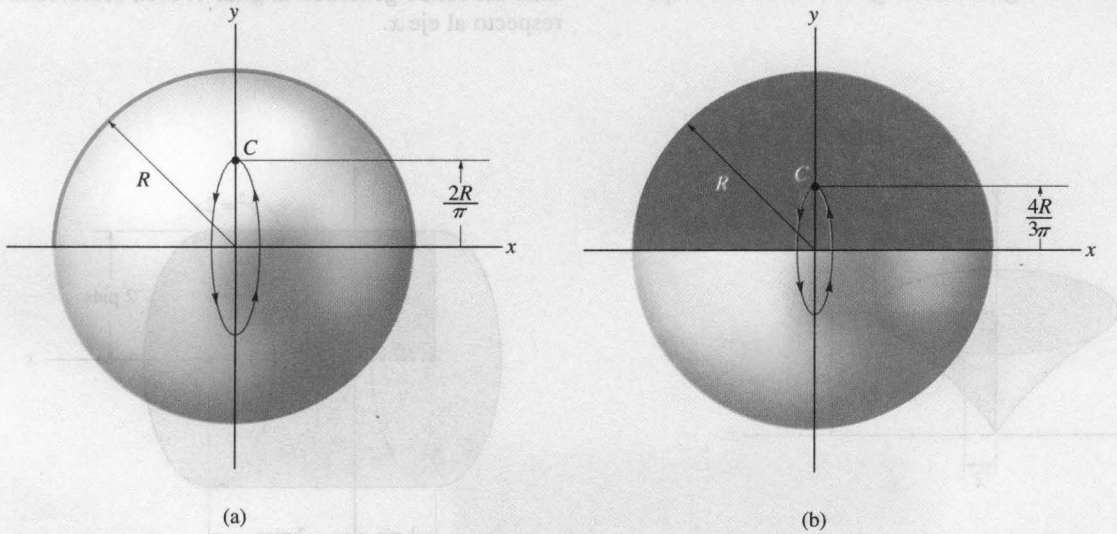


Fig. 9-24

Solución

Área superficial. El área superficial de la esfera mostrada en la figura 9-24a es generada al girar un *arco* semicircular alrededor del eje x . Usando la tabla que aparece en la cubierta posterior interna de este libro, se ve que el centroide de este arco está localizado a una distancia $\bar{r} = 2R/\pi$ a partir del eje x de rotación. Como el centroide se mueve a través de un ángulo $\theta = 2\pi$ rad al generar la esfera, entonces, al aplicar la ecuación 9-9 tenemos

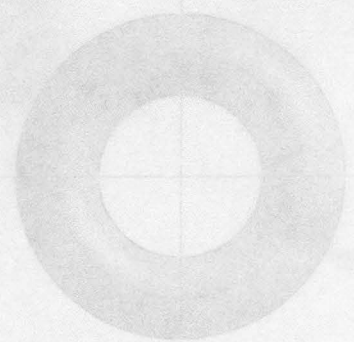
$$A = \theta \bar{r} L; \quad A = 2\pi \left(\frac{2R}{\pi} \right) \pi R = 4\pi R^2$$

Resp.

Volumen. El volumen de la esfera es generado al girar el *área* semicircular en la figura 9-24b alrededor del eje x . Usando la tabla que aparece en la cubierta posterior interna de este libro, para localizar el centroide del área, esto es, $\bar{r} = 4R/3\pi$, y aplicando la ecuación 9-10, tenemos

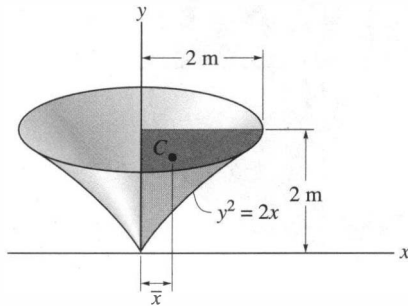
$$V = \theta \bar{r} A; \quad V = 2\pi \left(\frac{4R}{3\pi} \right) \left(\frac{1}{2} \pi R^2 \right) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Resp.



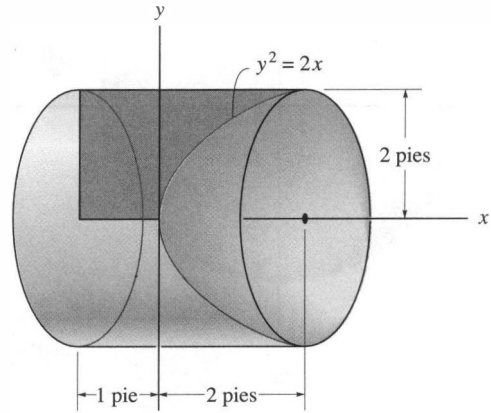
PROBLEMAS

***9-84.** Usando integración, determine el área y la distancia centroidal \bar{x} del área sombreada. Luego, mediante el segundo teorema de Pappus–Guldinus, determine el volumen del sólido generado al girar el área con respecto al eje y .



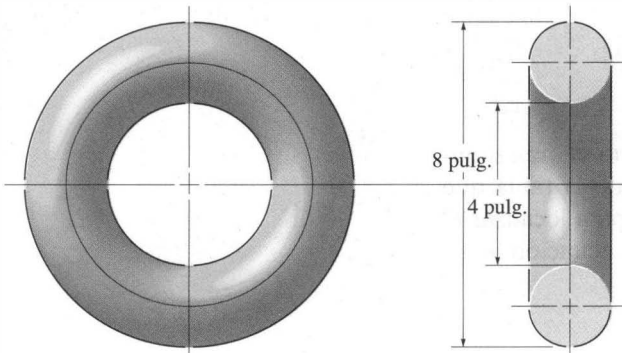
Prob. 9-84

9-86. Usando integración, determine el área y la distancia \bar{y} al centroide del área sombreada. Luego, usando el segundo teorema de Pappus–Guldinus, calcule el volumen del sólido generado al girar el área sombreada con respecto al eje x .



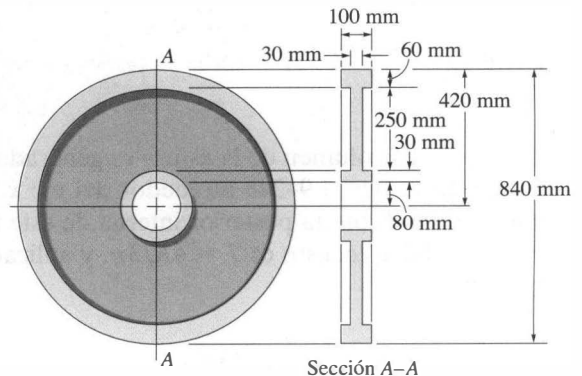
Prob. 9-86

9-85. El anillo está hecho de acero con peso específico de $\gamma_{st} = 490 \text{ lb/pie}^3$. Determine el área superficial del anillo. La sección transversal es circular como se muestra.



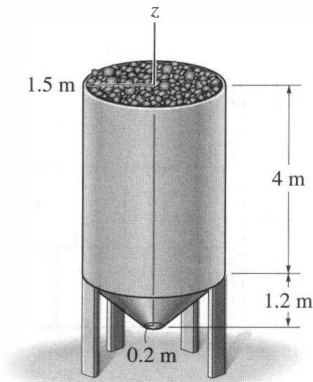
Prob. 9-85

9-87. Una rueda de acero tiene diámetro de 840 mm y sección transversal como la mostrada en la figura. Determine la masa total de la rueda si $\rho = 5 \text{ Mg/m}^3$.



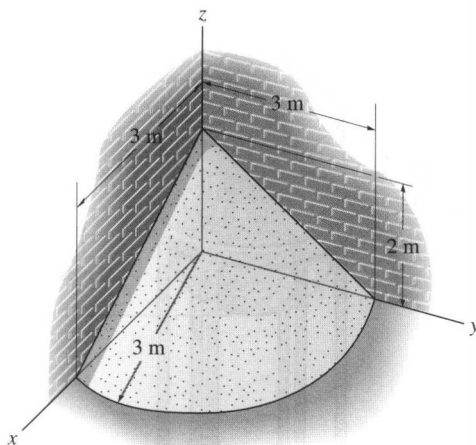
Prob. 9-87

*9-88. La tolva está llena hasta el tope con carbón. Determine el volumen de carbón si los vacíos (espacio de aire) constituyen el 35 por ciento del volumen de la tolva.



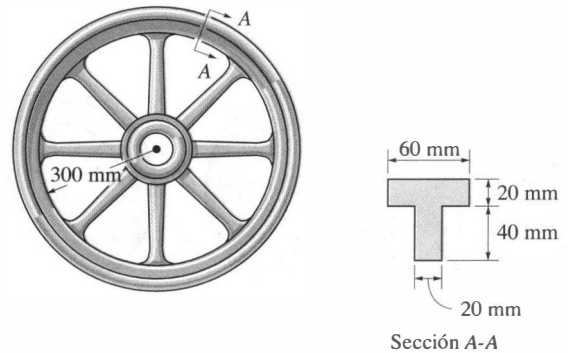
Prob. 9-88

9-89. Como se muestra, hay arena apilada entre dos paredes. Suponga que la pila es un cuarto de sección de un cono y que 26 por ciento de este volumen son vacíos (espacio de aire). Use el segundo teorema de Pappus-Guldinus para determinar el volumen de arena.



Prob. 9-89

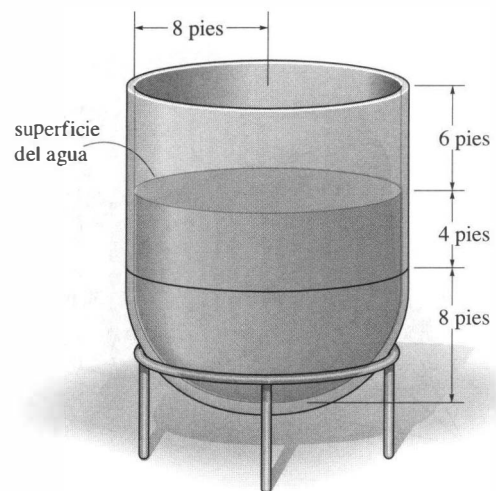
9-90. El borde de un volante tiene la sección transversal A-A mostrada. Determine el volumen del material necesario para su construcción.



Prob. 9-90

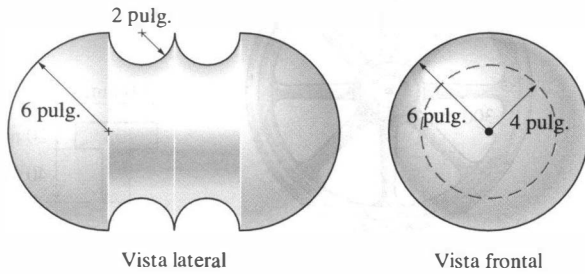
9-91. El tanque abierto está fabricado a partir de un hemisferio y un cascarón cilíndrico. Determine las reacciones verticales que cada una de las cuatro patas colocadas simétricamente ejerce sobre el piso si el tanque contiene agua con 12 pies de profundidad. La gravedad específica del agua es de 62.4 lb/pie³. Ignore el peso del tanque.

*9-92. Determine la cantidad aproximada de pintura necesaria para cubrir la superficie exterior del tanque abierto. Suponga que un galón de pintura cubre 400 pies².



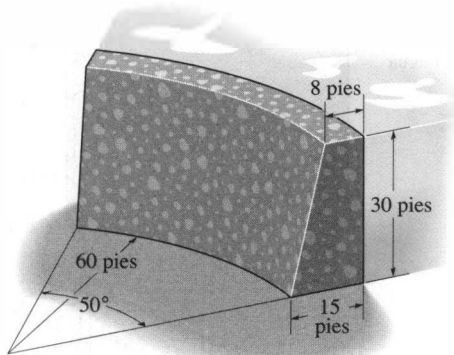
Probs. 9-91/92

9-93. Determine el volumen de material necesario para efectuar el colado.



Prob. 9-93

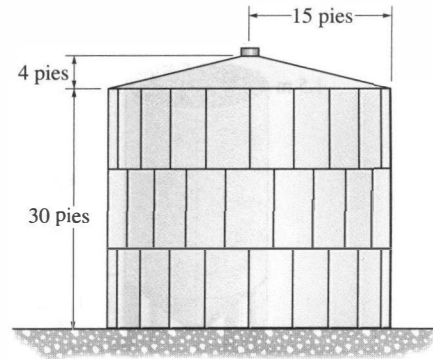
9-94. Un muro marino circular está hecho de concreto. Determine el peso total del muro si el concreto tiene un peso específico de $\gamma_c = 150 \text{ lb/pie}^3$.



Prob. 9-94

9-95. Determine el área de la superficie exterior del tanque de almacenamiento.

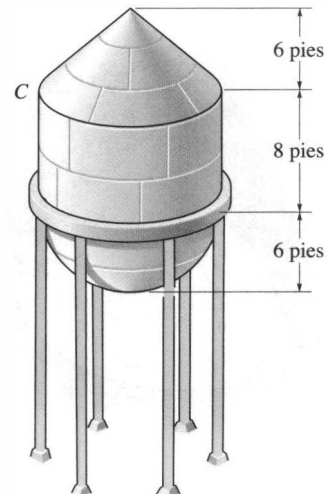
*9-96. Determine el volumen del tanque de almacenamiento.



Probs. 9-95/96

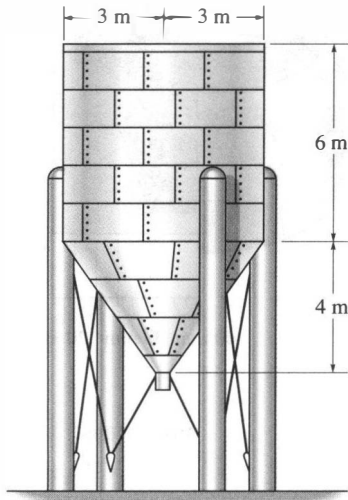
9-97. El tanque de suministro de agua tiene un fondo semiesférico y lados cilíndricos. Determine el peso del agua en el tanque cuando alcanza el nivel C. Considere $\gamma_w = 62.4 \text{ lb/pie}^3$.

9-98. Determine el número de galones de pintura necesarios para pintar la superficie exterior del tanque de suministro de agua, la cual consiste en el fondo semiesférico, los lados cilíndricos y la tapa cónica. Cada galón de pintura puede cubrir 250 pies^2 .



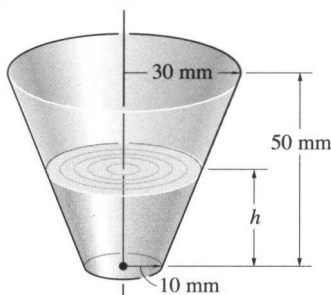
Probs. 9-97/98

9-99. El tanque mostrado en la figura se usa para almacenar líquidos. Estime el volumen del tanque y su área superficial. El tanque tiene una tapa plana y las placas con que está hecho son de espesor insignificante.



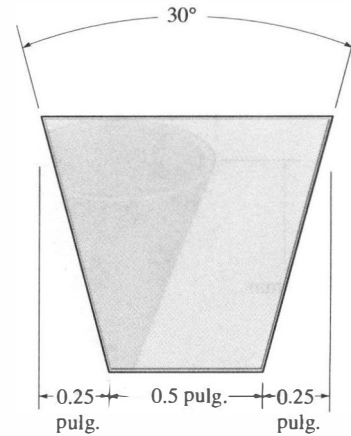
Prob. 9-99

*9-100. Determine la altura h hasta la que debe vertirse el líquido en la copa para que haga contacto con la mitad del área superficial del interior de la copa. En el cálculo ignore el espesor de la copa.



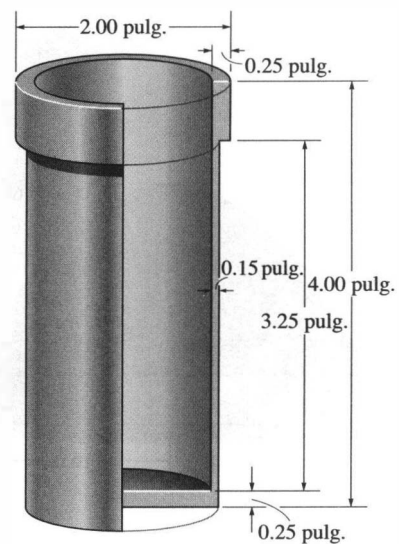
Prob. 9-100

9-101. Una banda V tiene radio interno de 6 pulg y sección transversal como la mostrada en la figura. Determine el volumen del material usado al fabricar esta banda V.



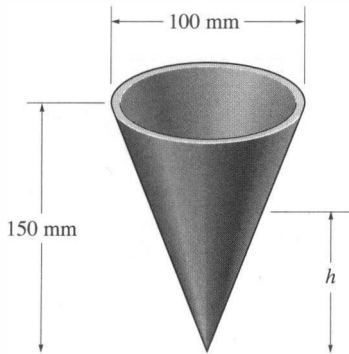
Prob. 9-101

9-102. Toda la cubierta circular de aluminio se usa en el sistema de frenado de un automóvil. La sección transversal se muestra en la figura. Determine su peso si el aluminio tiene un peso específico de 169 lb/pe^3 .



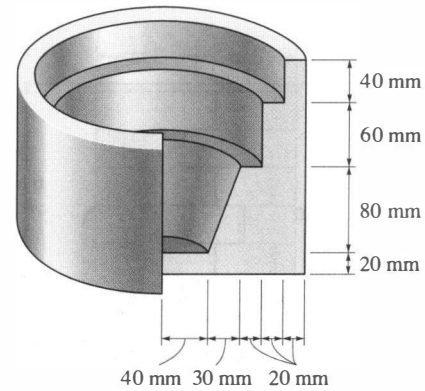
Prob. 9-102

9-103. Determine hasta qué altura h debe vertirse el líquido en la copa cónica para que haga contacto con la mitad del área superficial del interior de la copa.



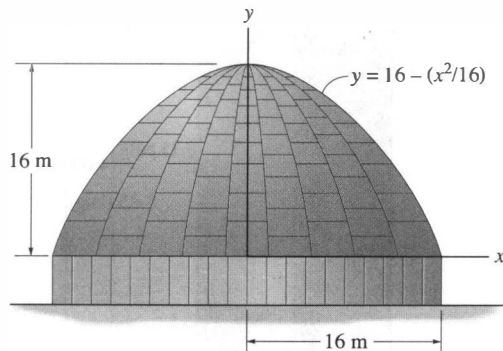
Prob. 9-103

9-105. Determine el área de la superficie interna del pistón de un freno. El pistón consiste en una parte circular completa. Su sección transversal se muestra en la figura.



Prob. 9-105

*9-104. Determine el área superficial del techo de la estructura formada al girar la parábola alrededor del eje y .



Prob. 9-104

*9.5 Resultante de una carga general distribuida

En la sección 4.10 analizamos el método usado para simplificar una carga distribuida que es uniforme a lo largo de un eje de una superficie rectangular. En esta sección generalizaremos ese método para incluir superficies que tienen una forma arbitraria y están sometidas a una distribución de carga variable. Como una aplicación específica, en la sección 9.6 encontraremos la carga resultante que actúa sobre la superficie de un cuerpo que está sumergido en un fluido.

Distribución de presión sobre una superficie. Considere la placa plana mostrada en la figura 9–25a, la cual está sometida a la función de carga $p = p(x, y)$ Pa, donde Pa (pascal) = 1 N/m^2 . Conocida esta función, podemos determinar la fuerza dF que actúa sobre el área diferencial $dA \text{ m}^2$ de la placa, localizada en el punto arbitrario (x, y) . Esta magnitud de fuerza es simplemente $dF = [p(x, y) \text{ N/m}^2](dA \text{ m}^2) = [p(x, y) dA] \text{ N}$. Por tanto, la carga total sobre la placa es representada como un sistema de *fuerzas paralelas* infinitas en número y actuando cada una sobre un área diferencial separada dA . Este sistema será ahora simplificado a una sola fuerza resultante \mathbf{F}_R actuando a través de un punto único (\bar{x}, \bar{y}) sobre la placa, figura 9–25b.

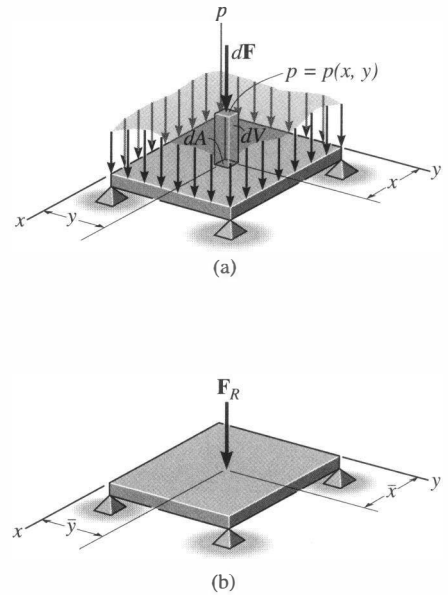


Fig. 9–25

Magnitud de una fuerza resultante. Para determinar la *magnitud* de \mathbf{F}_R es necesario sumar cada una de las fuerzas diferenciales dF actuando sobre el *área de la superficie total* de la placa. Esta suma puede ser expresada matemáticamente como una integral:

$$F_R = \Sigma F; \quad \boxed{F_R = \int_A p(x, y) dA = \int_V dV} \quad (9-13)$$

Aquí, $p(x, y) dA = dV$, o el *elemento de volumen* diferencial más oscuro la figura 9–25a. Por tanto, el resultado indica que la *magnitud de la fuerza resultante es igual al volumen total bajo el diagrama de carga distribuida*.

Ubicación de una fuerza resultante. La ubicación (\bar{x}, \bar{y}) de \mathbf{F}_R es determinada estableciendo los momentos de \mathbf{F}_R iguales a los momentos de todas las fuerzas dF con respecto a los ejes y y x respectivos: a partir de las figuras 9–25a y 9–25b, usando la ecuación 9–13, esto resulta en

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int_A x p(x, y) dA}{\int_A p(x, y) dA} = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV} \quad \bar{y} = \frac{\int_A y p(x, y) dA}{\int_A p(x, y) dA} = \frac{\int_V y dV}{\int_V dV}} \quad (9-14)$$

Por tanto, se puede ver que la *línea de acción de la fuerza resultante pasa a través del centro geométrico o centroide del volumen bajo el diagrama de carga distribuida*.

*9.6 Presión de un fluido

De acuerdo con la ley de Pascal, en un punto, un fluido en reposo genera cierta presión p que es la *misma en todas* direcciones. La magnitud de p , medida como una fuerza por área unitaria, depende del peso específico γ o de la densidad de masa ρ del fluido y de la profundidad z del punto desde la superficie del fluido.* La relación puede ser expresada matemáticamente como

$$p = \gamma z = \rho g z \quad (9-15)$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. La ecuación 9-15 es válida sólo para fluidos que se suponen *incompresibles*, lo cual es el caso de la mayoría de los líquidos. Los gases son fluidos compresibles, y puesto que sus densidades cambian considerablemente con la presión y la temperatura, la ecuación 9-15 no puede ser usada.

Para ilustrar cómo se aplica la ecuación 9-15, consideremos la placa sumergida mostrada en la figura 9-26. Sobre la placa han sido especificados tres puntos. Como el punto B está a profundidad z_1 de la superficie del líquido, la *presión* en este punto tiene magnitud $p_1 = \gamma z_1$. Igualmente, los puntos C y D están ambos a profundidad z_2 ; por ello, $p_2 = \gamma z_2$. En todos los casos, la presión actúa *normalmente* al área superficial dA que se localiza en el punto especificado. Usando la ecuación 9-15 y los resultados de la sección 9.5, es posible determinar la fuerza resultante causada por una distribución de presión de un líquido y especificar su ubicación sobre la superficie de una placa sumergida. Consideraremos ahora tres formas diferentes de placas.

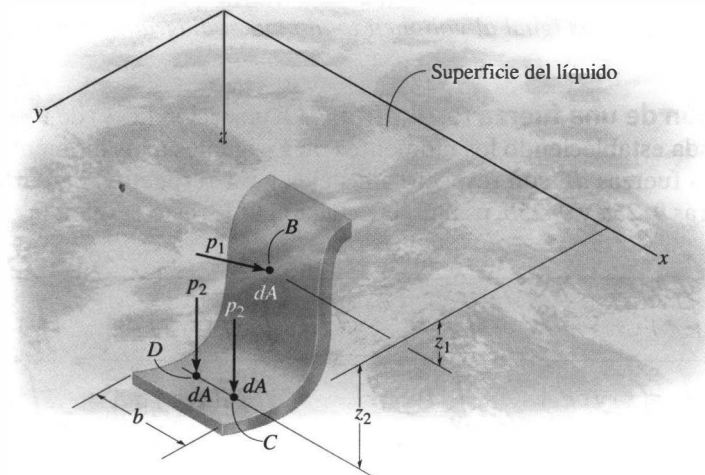


Fig. 9-26

*En particular, para el agua $\gamma = 62.4 \text{ lb/pe}^3$, o $\gamma = \rho g = 9810 \text{ N/m}^3$ ya que $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ y $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

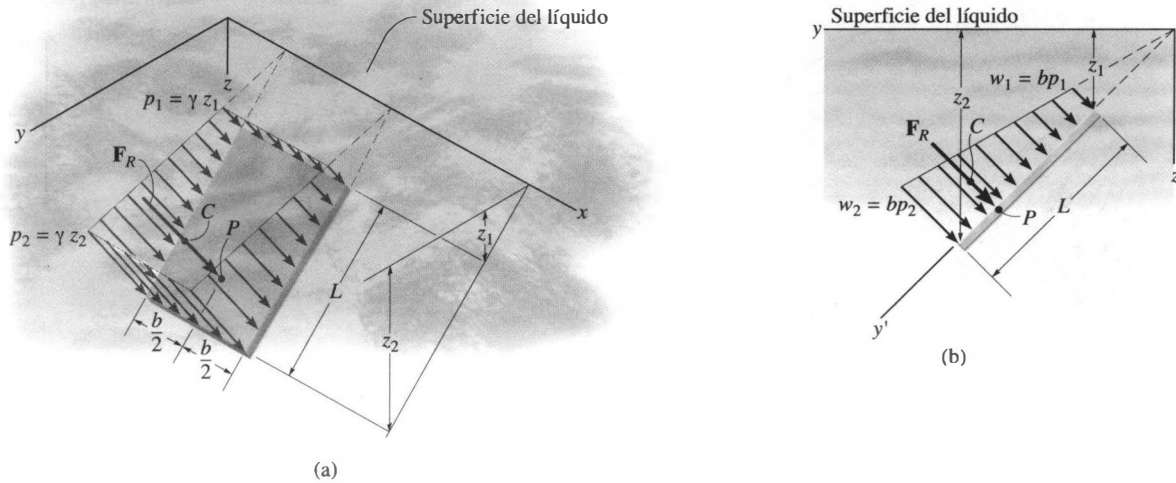


Fig. 9-27

Placa plana de ancho constante. Una placa plana rectangular de ancho constante, que está sumergida en un líquido con un peso específico γ , se muestra en la figura 9-27a. El plano de la placa forma un ángulo con la horizontal, de manera que su borde superior está localizado a una profundidad z_1 desde la superficie del líquido y su borde inferior a una profundidad z_2 . Como la presión varía linealmente con la profundidad, ecuación 9-15, la distribución de presión sobre la superficie de la placa es representada por un volumen trapezoidal con intensidades $p_1 = \gamma z_1$ a la profundidad z_1 y $p_2 = \gamma z_2$ a la profundidad z_2 . Como vimos en la sección 9.5, la magnitud de la *fuerza resultante* \mathbf{F}_R es igual al *volumen* de este diagrama de carga y \mathbf{F}_R tiene una *línea de acción* que pasa por el centroide C del volumen. Por consiguiente, \mathbf{F}_R no actúa en el centroide de la placa, sino en un punto P llamado el *centro de presión*.

Como la placa tiene un *ancho constante*, la distribución de carga también puede ser vista en dos dimensiones, figura 9-27b. Aquí, la intensidad de la carga es medida como fuerza/longitud y varía linealmente desde $w_1 = bp_1 = b\gamma z_1$ hasta $w_2 = bp_2 = b\gamma z_2$. La magnitud de \mathbf{F}_R en este caso es igual al *área* trapezoidal, y \mathbf{F}_R tiene una *línea de acción* que pasa por el *centroide* C del área. Para aplicaciones numéricas, el área y la ubicación del centroide para un trapecio están tabuladas en la cubierta posterior interna de este libro.

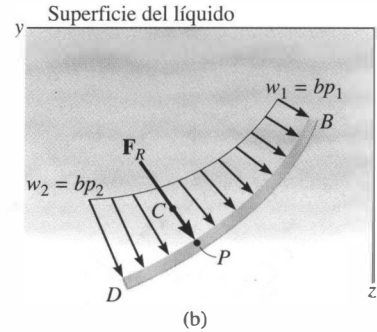
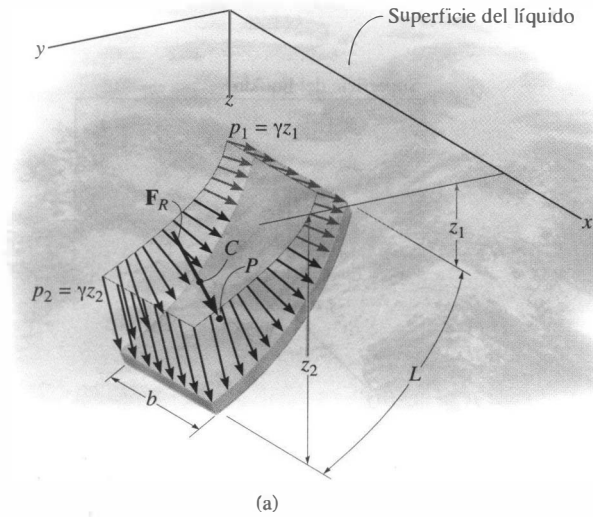


Fig. 9-28

Placa curva de ancho constante. Cuando la placa sumergida es curva, la presión que actúa normalmente a la placa cambia su dirección de manera continua, y por tanto, el cálculo de la magnitud de \mathbf{F}_R y su ubicación P es más difícil que para una placa plana. En las figuras 9-28a y 9-28b se muestran vistas tri y bidimensionales de la distribución de carga, respectivamente. Aquí puede usarse la integración para determinar F_R y la ubicación del centroide C o centro de presión P .

Sin embargo, existe un método más simple para calcular la magnitud de \mathbf{F}_R y su ubicación a lo largo de una placa curva (o plana) con *ancho constante*. Este método requiere cálculos separados para las *componentes* horizontal y vertical de \mathbf{F}_R . Por ejemplo, la carga distribuida que actúa sobre la placa curva DB en la figura 9-28b puede ser representada por la *carga equivalente* mostrada en la figura 9-29. Aquí la placa soporta el peso del líquido W^f contenido dentro del bloque BDA . Esta fuerza tiene magnitud $W_f = (\gamma b)(\text{área}_{BDA})$ y actúa a través del centroide de BDA . Además, se tienen las distribuciones de presión causadas por el líquido actuando a lo largo de los lados vertical y horizontal del bloque. A lo largo del lado vertical AD , la fuerza \mathbf{F}_{AD} tiene una magnitud igual al área bajo el trapecio y actúa a través del centroide C_{AD} de esta área. La carga distribuida a lo largo del lado horizontal AB es constante ya que todos los puntos que se encuentran en este plano están a la misma profundidad desde la superficie del líquido. La magnitud de \mathbf{F}^{AB} es simplemente el área del rectángulo. Esta fuerza actúa a través del centroide C_{AB} del área o punto medio de AB . Sumando las tres fuerzas presentes en la figura 9-29 resulta $\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{F}_{AD} + \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{W}_f$, lo cual se muestra en la figura 9-28. Finalmente, la ubicación del centro de presión P sobre la placa es determinada aplicando la ecuación $M_{R_O} = \Sigma M_{O_i}$, la cual establece que el momento de la fuerza resultante con respecto a un punto O conveniente de referencia, tal como D o B , en la figura 9-28, es igual a la suma de los momentos de las tres fuerzas mostradas en la figura 9-29 con respecto al mismo punto.

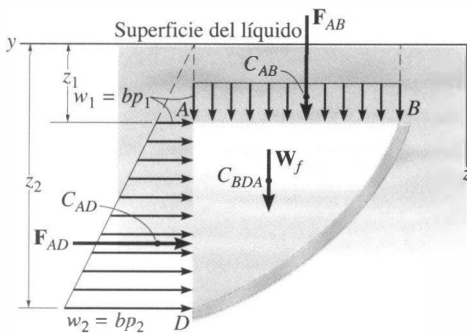


Fig. 9-29

Placa plana de ancho variable. La distribución de presión que actúa sobre la superficie de una placa sumergida con ancho variable se muestra en la figura 9-30. La fuerza resultante de esta carga es igual al volumen descrito por el área de la placa como su base y a la distribución de presión linealmente variable como su altura. El elemento sombreado que muestra la figura 9-30 puede usarse si se elige la integración para determinar este volumen. El elemento consiste en una franja rectangular de área $dA = x \, dy'$ localizada a una profundidad z por debajo de la superficie del líquido. Como una presión uniforme $p = \gamma z$ (fuerza/área) actúa sobre dA , la magnitud de la fuerza diferencial dF es igual a $dF = dV = p \, dA = \gamma z(x \, dy')$. Integrando sobre todo el volumen se obtiene la ecuación 9-13, es decir,

$$F_R = \int_A p \, dA = \int_V dV = V$$

En la ecuación 9-14, el centroide de V define el punto a través del cual actúa F_R . El centro de presión, que se encuentra sobre la superficie de la placa justo debajo de C , tiene coordenadas $P(\bar{x}, \bar{y}')$ definidas por las ecuaciones

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x} \, dV}{\int_V dV} \quad \bar{y}' = \frac{\int_V \tilde{y}' \, dV}{\int_V dV}$$

Este punto *no* debe confundirse con el centroide del área de la placa.



La fuerza resultante del agua y su ubicación sobre la placa posterior elíptica de este tanque deben ser determinadas por integración.

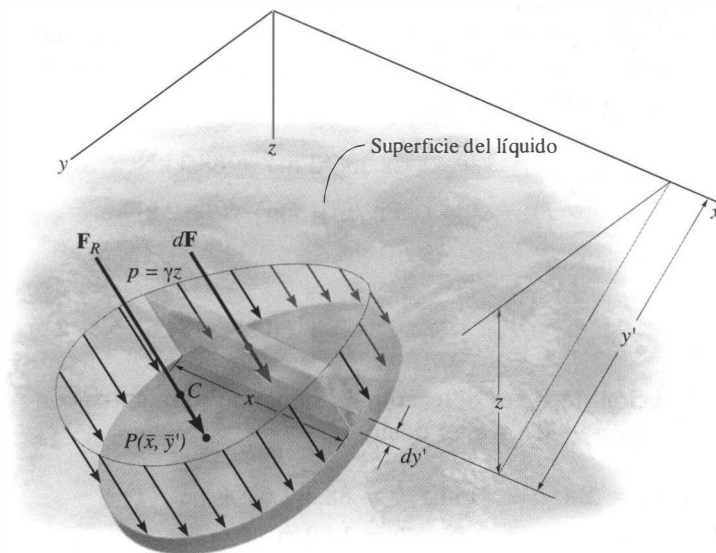
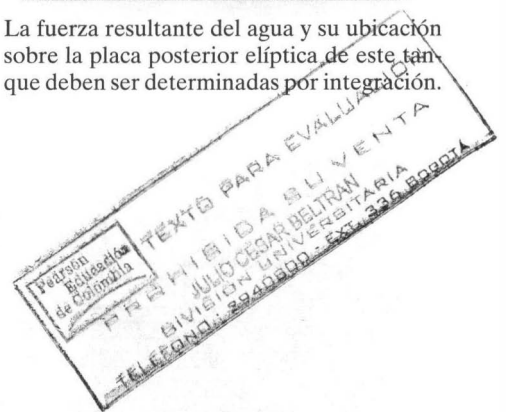
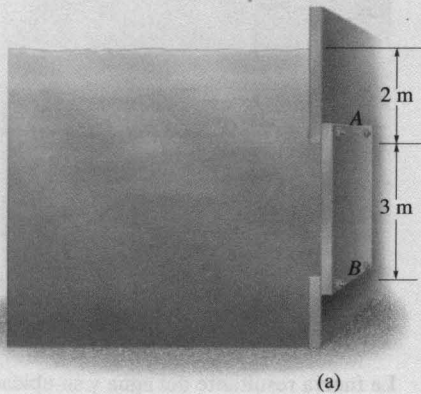


Fig. 9-30

EJEMPLO 9.13


(a)

Determine la magnitud y la ubicación de la fuerza hidrostática resultante que actúa sobre la placa rectangular AB sumergida como se muestra en la figura 9-31a. La placa tiene un ancho de 1.5 m; $\rho_{\text{agua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Solución

Las presiones del agua a las profundidades A y B son

$$p_A = \rho_w g z_A = (1000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(2 \text{ m}) = 19.62 \text{ kPa}$$

$$p_B = \rho_w g z_B = (1000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(5 \text{ m}) = 49.05 \text{ kPa}$$

Como la placa tiene un ancho constante, la carga distribuida puede verse en dos dimensiones como se muestra en la figura 9-31b. Las intensidades de la carga en A y B son

$$w_A = b p_A = (1.5 \text{ m})(19.62 \text{ kPa}) = 29.43 \text{ kN/m}$$

$$w_B = b p_B = (1.5 \text{ m})(49.05 \text{ kPa}) = 73.58 \text{ kN/m}$$

A partir de la tabla presentada en la cubierta posterior interna, tenemos que la magnitud de la fuerza resultante F_R generada por la carga distribuida es

$$F_R = \text{área del trapecio} \\ = \frac{1}{2}(3)(29.4 + 73.6) = 154.5 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Esta fuerza actúa a través del centroide del área,

$$h = \frac{1}{3} \left(\frac{2(29.43) + 73.58}{29.43 + 73.58} \right) (3) = 1.29 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

medida hacia arriba desde B , figura 9-31b.

Los mismos resultados se pueden obtener considerando dos componentes de F_R definidas por el triángulo y el rectángulo mostrados en la figura 9-31c. Cada fuerza actúa a través de su centroide asociado y tiene una magnitud de

$$F_{Re} = (29.43 \text{ kN/m})(3 \text{ m}) = 88.3 \text{ kN}$$

$$F_t = \frac{1}{2}(44.15 \text{ kN/m})(3 \text{ m}) = 66.2 \text{ kN}$$

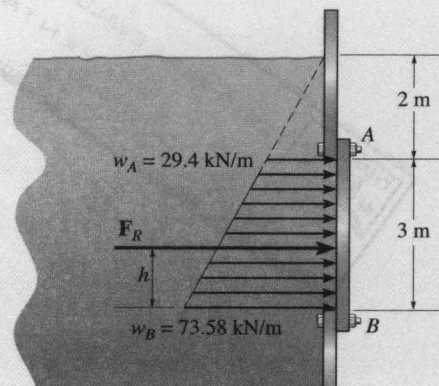
Por consiguiente,

$$F_R = F_{Re} + F_t = 88.3 + 66.2 = 154.5 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

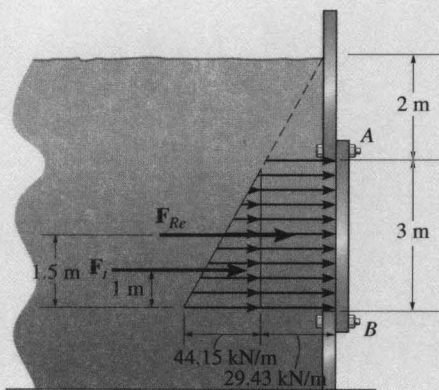
La ubicación de F_R es determinada sumando momentos con respecto a B , figura 9-31b y c, es decir,

$$\uparrow + (M_R)_B = \Sigma M_B; \quad (154.5)h = 88.3(1.5) + 66.2(1)$$

$$h = 1.29 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$



(b)



(c)

Fig. 9-31

EJEMPLO 9.14

Determine la magnitud de la fuerza hidrostática resultante que actúa sobre la superficie del muro marino con forma de parábola como se muestra en la figura 9–32a. El muro tiene 5 m de largo; $\rho_{\text{agua}} = 1020 \text{ kg/m}^3$.

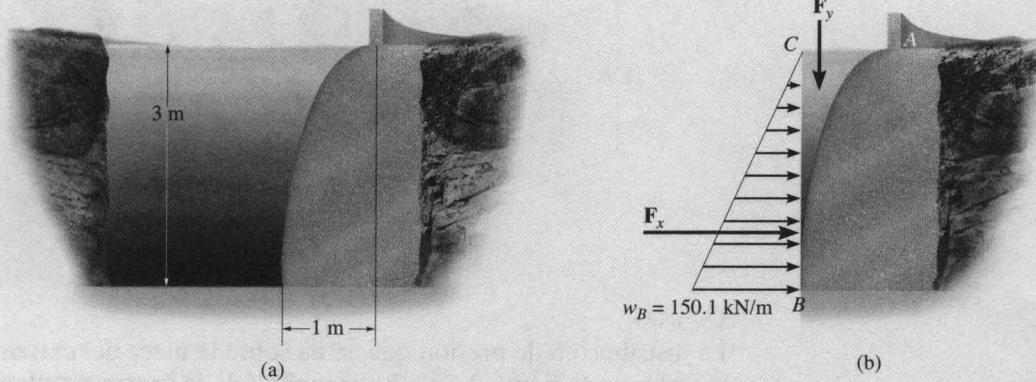


Fig. 9–32

Solución

Calculamos las componentes horizontal y vertical de la fuerza resultante, figura 9–32b. Como

$$p_B = \rho_w g z_B = (1020 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(3 \text{ m}) = 30.02 \text{ kPa}$$

entonces

$$w_B = b p_B = 5 \text{ m}(30.02 \text{ kPa}) = 150.1 \text{ kN/m}$$

En consecuencia,

$$F_x = \frac{1}{2}(3 \text{ m})(150.1 \text{ kN/m}) = 225.1 \text{ kN}$$

El área del sector parabólico ABC puede ser determinada usando la tabla que aparece en la cubierta posterior interna de este libro. Por tanto, el peso del agua dentro de esta región es

$$\begin{aligned} F_y &= (\rho_w g b)(\text{área}_{ABC}) \\ &= (1020 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(5 \text{ m})\left[\frac{1}{3}(1 \text{ m})(3 \text{ m})\right] = 50.0 \text{ kN} \end{aligned}$$

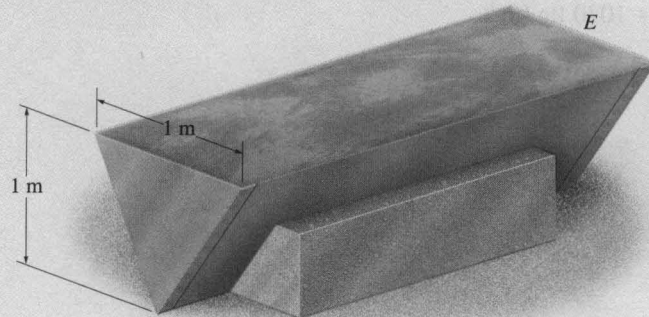
La fuerza resultante es, por tanto,

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(225.1)^2 + (50.0)^2} \\ &= 231 \text{ kN} \end{aligned}$$

Resp.

EJEMPLO 9.15

Determine la magnitud y la ubicación de la fuerza resultante que actúa sobre las placas triangulares del extremo del canal para agua mostrado en la figura 9-33a; $\rho_{\text{agua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$.



(a)

Solución

La distribución de presión que actúa sobre la placa del extremo E se muestra en la figura 9-33b. La magnitud de la fuerza resultante \mathbf{F} es igual al volumen de esta distribución de carga. Resolveremos el problema por integración. Si seleccionamos el elemento diferencial de volumen mostrado en la figura, tenemos

$$dF = dV = p \, dA = \rho_w g z (2x \, dz) = 19\,620 z x \, dz$$

La ecuación de la línea AB es

$$x = 0.5(1 - z)$$

Por tanto, sustituyendo e integrando con respecto a z desde $z = 0$ hasta $z = 1 \text{ m}$ resulta

$$\begin{aligned} F = V &= \int_V dV = \int_0^1 (19\,620) z [0.5(1 - z)] \, dz \\ &= 9810 \int_0^1 (z - z^2) \, dz = 1635 \text{ N} = 1.64 \text{ kN} \end{aligned}$$

Resp.

Esta resultante pasa a través del centroide del volumen. Por simetría,

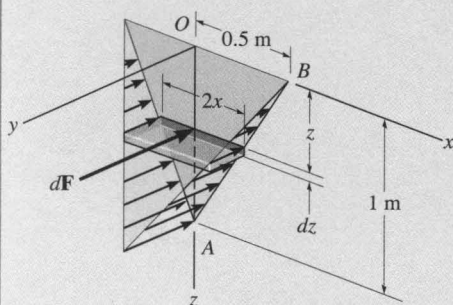
$$\bar{x} = 0$$

Resp.

Como $\tilde{z} = z$ para el elemento de volumen en la figura 9-33b, entonces

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{\int_V \tilde{z} \, dV}{\int_V dV} = \frac{\int_0^1 z (19\,620) z [0.5(1 - z)] \, dz}{1635} = \frac{9810 \int_0^1 (z^2 - z^3) \, dz}{1635} \\ &= 0.5 \text{ m} \end{aligned}$$

Resp.

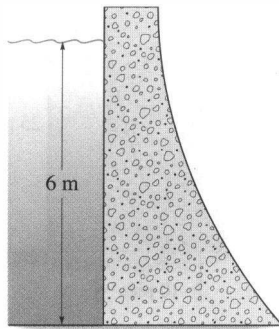


(b)

Fig. 9-33

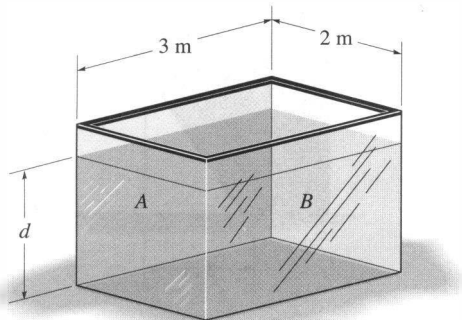
PROBLEMAS

9-106. Determine la magnitud de la fuerza hidrostática resultante que actúa sobre la presa y su ubicación, medida desde la superficie superior del agua. El ancho de la presa es de 8 m; $\rho_{\text{agua}} = 1.0 \text{ Mg/m}^3$.



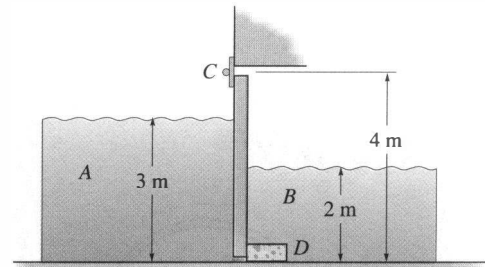
Prob. 9-106

9-107. El tanque está lleno de agua con una profundidad $d = 4 \text{ m}$. Determine la fuerza resultante que el agua ejerce sobre los lados A y B del tanque. Si en éste se coloca aceite en vez de agua, ¿a qué profundidad d debe llegar el aceite para que se tengan las mismas fuerzas resultantes? $\rho_{\text{aceite}} = 900 \text{ kg/m}^3$ y $\rho_{\text{agua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$.



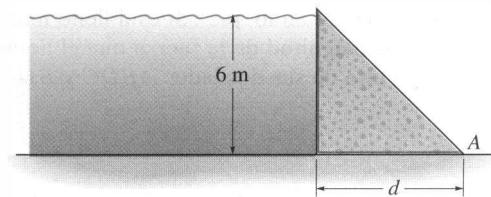
Prob. 9-107

*9-108. Cuando el agua de la marea A desciende, la compuerta de marea gira automáticamente abriéndose para drenar el agua de la ciénaga B . Para la condición de marea alta mostrada, determine las reacciones horizontales desarrolladas en la articulación C y en el tope D . La longitud de la compuerta es de 6 m y su altura de 4 m. $\rho_{\text{agua}} = 1.0 \text{ Mg/m}^3$.



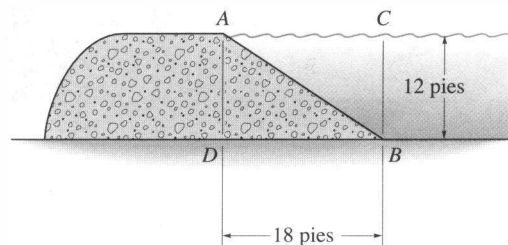
Prob. 9-108

9-109. La presa de “gravidad” de concreto es mantenida en su lugar por su propio peso. Si la densidad del concreto es $\rho_c = 2.5 \text{ Mg/m}^3$, y el agua tiene una densidad de $\rho_{\text{agua}} = 1.0 \text{ Mg/m}^3$, determine la dimensión d más pequeña que impedirá que la presa se voltee alrededor de su extremo A .



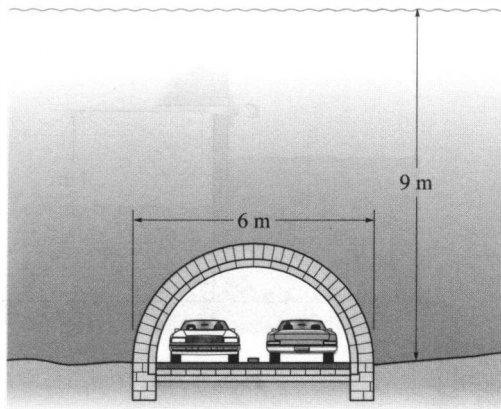
Prob. 9-109

9-110. La presa de concreto está diseñada de manera que su cara AB tiene una pendiente gradual en el agua como se muestra. Debido a esto, la fuerza de fricción en la base BD es incrementada por la fuerza hidrostática del agua actuando sobre la presa. Calcule la fuerza hidrostática que actúa sobre la cara AB de la presa, la cual tiene 60 pies de ancho. $\gamma_w = 62.4 \text{ lb/pie}^3$.



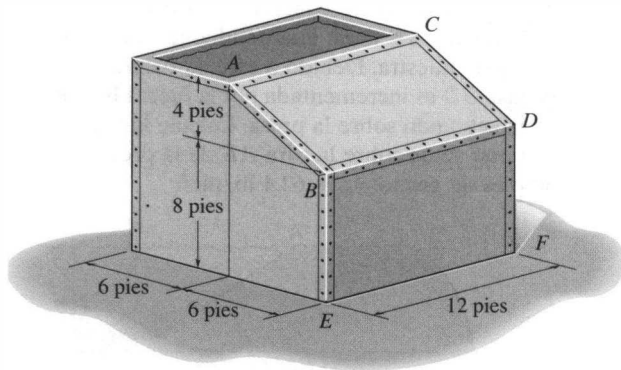
Prob. 9-110

9-111. El túnel semicircular pasa bajo un río que tiene 9 m de profundidad. Determine la fuerza hidrostática vertical resultante que actúa por metro de longitud a lo largo de la longitud del túnel. El túnel tiene 6 m de ancho; $\rho_{\text{agua}} = 1.0 \text{ Mg/m}^3$.



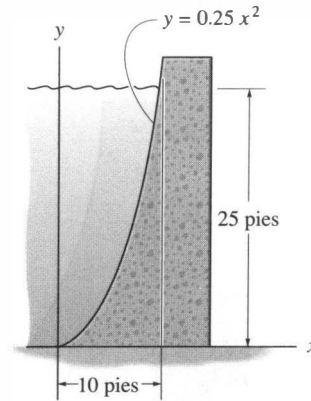
Prob. 9-111

*9-112. El tanque se usa para almacenar un líquido con peso específico de 80 lb/pie^3 . Si está lleno hasta el tope, determine la magnitud de la fuerza que el líquido ejerce sobre cada uno de sus dos lados $ABDC$ y $BDFE$.



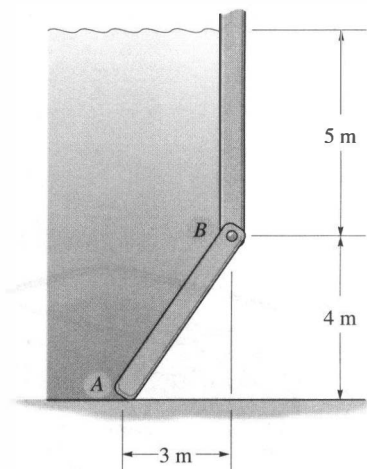
Prob. 9-112

9-113. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza resultante que el agua ejerce sobre el lado de la presa. La presa tiene 25 pies de largo y $\gamma_w = 62.4 \text{ lb/pie}^3$.



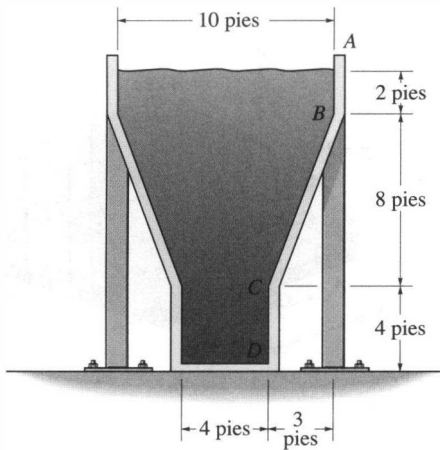
Prob. 9-113

9-114. La compuerta AB tiene 8 m de ancho. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa sobre el pasador en B y la reacción vertical en el soporte liso A . $\rho_{\text{agua}} = 1.0 \text{ Mg/m}^3$.



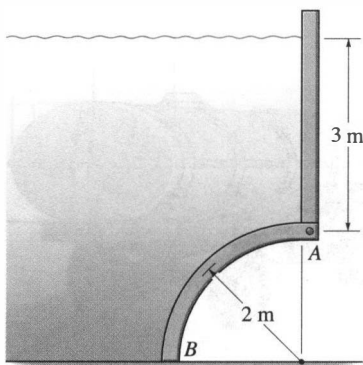
Prob. 9-114

9-115. El tanque de almacenamiento contiene aceite con peso específico de $\gamma_{aceite} = 56 \text{ lb/pie}^3$. Si el tanque es de 6 pies de ancho, calcule la fuerza resultante, causada por el aceite, que actúa sobre el lado inclinado BC del tanque y especifique su ubicación a lo largo de BC , medida desde B . Calcule también la fuerza total resultante que actúa sobre el fondo del tanque.



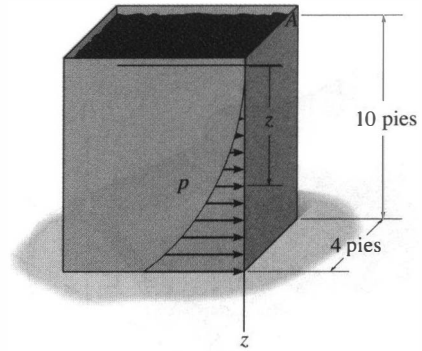
Prob. 9-115

*9-116. La superficie AB en arco tiene la forma de un cuarto de círculo. Si mide 8 m de longitud, determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza resultante causada por el agua actuando sobre la superficie. $\rho_{agua} = 1.0 \text{ Mg/m}^3$.



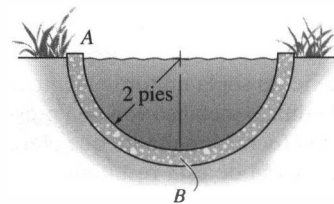
Prob. 9-116

9-117. El depósito rectangular está lleno de carbón, el cual genera una distribución de presión a lo largo de la pared A que varía como se muestra, es decir, $p = 4z^3 \text{ lb/pie}^2$, donde z se mide en pies. Determine la fuerza resultante generada por el carbón y especifique su ubicación a partir de la superficie superior.



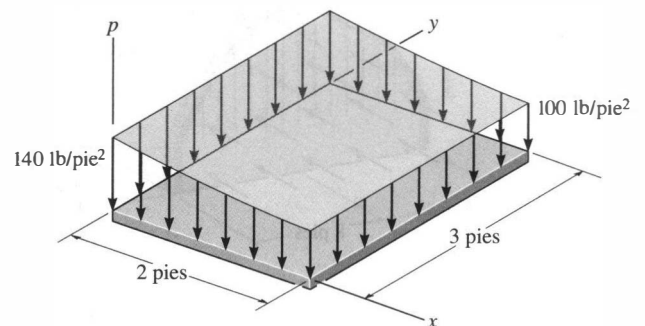
Prob. 9-117

9-118. El tubo semicircular de drenaje está lleno de agua. Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical resultantes que el agua ejerce sobre el lado AB del tubo por pie de longitud de tubo; $\gamma_w = 62.4 \text{ lb/pie}^3$.



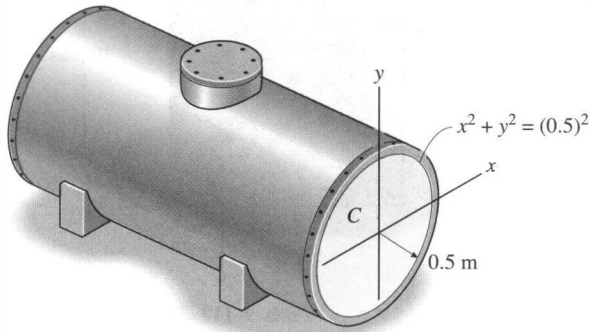
Prob. 9-118

9-119. La carga de presión sobre la placa está descrita por la función $p = 10[6/(x + 1) + 8] \text{ lb/pie}^2$. Determine la magnitud de la fuerza resultante y las coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) del punto donde la línea de acción de la fuerza interseca la placa.



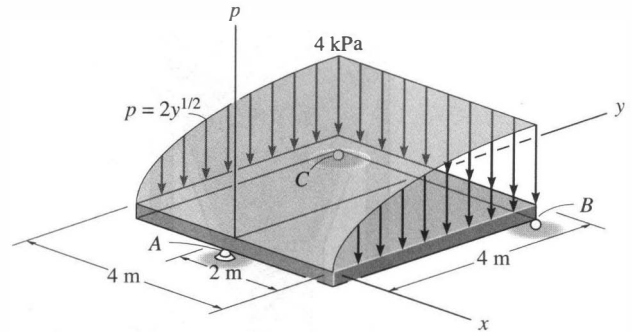
Prob. 9-119

***9-120.** El tanque está lleno hasta el tope ($y = 0.5$ m) con agua cuya densidad es de $\rho_{\text{agua}} = 1.0 \text{ Mg/m}^3$. Determine la fuerza resultante de la presión del agua que actúa sobre la placa C plana del extremo del tanque, medida desde el tope.



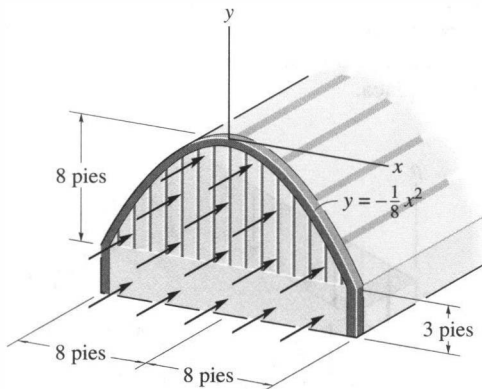
Prob. 9-120

9-122. La carga que actúa sobre una placa plana está representada por una distribución parabólica de presión. Determine la magnitud de la fuerza resultante y las coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) del punto en que la línea de acción de la fuerza interseca la placa. ¿Cuáles son las reacciones en los rodillos B y C y en la rótula esférica A ? Ignore el peso de la placa.



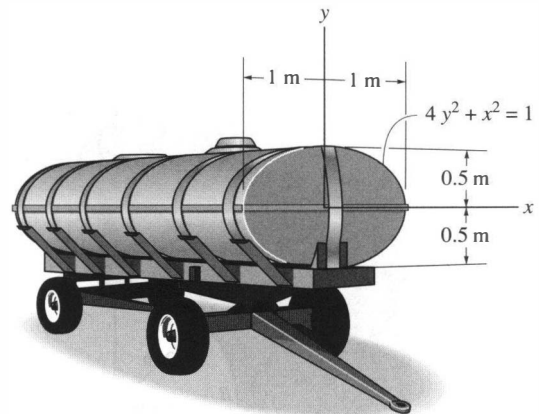
Prob. 9-122

9-121. El viento sopla uniformemente sobre la superficie frontal del edificio metálico con una presión de 30 lb/pie^2 . Determine la fuerza resultante que ejerce sobre la superficie y la posición de esta resultante.



Prob. 9-121

9-123. El tanque está lleno con un líquido que tiene una densidad de 900 kg/m^3 . Determine la fuerza resultante que el líquido ejerce sobre la placa elíptica extrema, y la ubicación del centro de presión medido desde el eje x .



Prob. 9-123

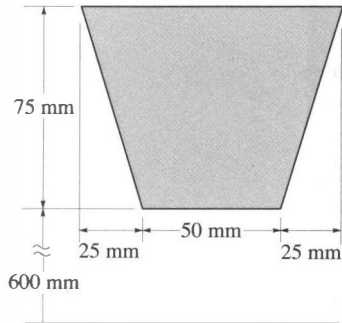
REPASO DEL CAPÍTULO

- Centro de gravedad y centroide.** El *centro de gravedad* representa un punto donde el peso del cuerpo puede considerarse concentrado. La distancia \bar{s} a este punto puede ser determinada a partir del equilibrio por momentos. Esto requiere que el momento del peso de todas las partículas del cuerpo con respecto a algún punto deba ser igual al momento de todo el cuerpo con respecto al punto, $\bar{s}W = \Sigma \bar{s}W$. El *centroide* es la ubicación del centro geométrico del cuerpo. Se determina de manera similar, usando un balance de momentos de elementos geométricos como segmentos de líneas, áreas o volúmenes. Para cuerpos que tienen una forma continua, los momentos se suman (integran) usando elementos diferenciales. Si el cuerpo está compuesto de varias formas, cada una con ubicación conocida de su centro de gravedad o centroide, entonces la ubicación se determina con una suma discreta usando sus partes componentes.
- Teoremas de Pappus y Guldinus.** Estos teoremas se pueden usar para determinar el área superficial y el volumen de un cuerpo de revolución. El *área superficial* es igual al producto de la longitud de la curva generatriz y la distancia necesaria recorrida por el centroide de la curva para generar el área $A = \theta \bar{r}L$. El *volumen* del cuerpo es igual al producto del área generatriz y la distancia necesaria recorrida por el centroide de esta área para generar el volumen, $V = \theta \bar{r}A$.
- Presión del fluido.** La presión desarrollada por un líquido en un punto sobre una superficie sumergida depende de la profundidad del punto y de la densidad del líquido de acuerdo con la ley de Pascal $p = \rho gh = \gamma h$. Esta presión creará una *distribución lineal* de carga sobre una superficie vertical o inclinada. Si la superficie es horizontal, entonces la carga será *uniforme*. En cualquier caso, las resultantes de estas cargas pueden ser determinadas encontrando el volumen o área bajo la curva de carga. La línea de acción de la fuerza resultante pasa por el centroide del diagrama de carga.

PROBLEMAS DE REPASO

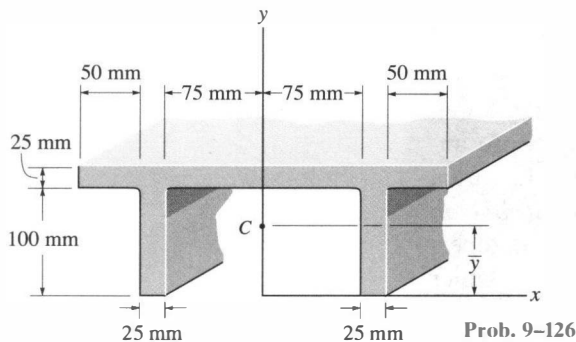
*9-124. Una banda en V circular tiene radio interno de 600 mm y área en su sección transversal como se muestra. Determine el volumen del material requerido para construir la banda.

9-125. Una banda en V circular tiene radio interno de 600 mm y área en su sección transversal como se muestra. Determine el área superficial de la banda.



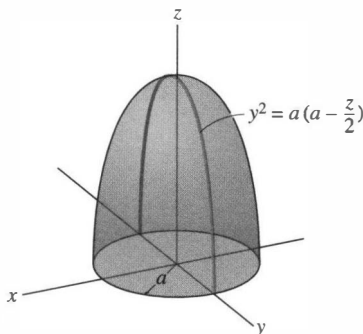
Probs. 9-124/125

9-126. Localice el centroide \bar{y} del área de la sección transversal de la viga.



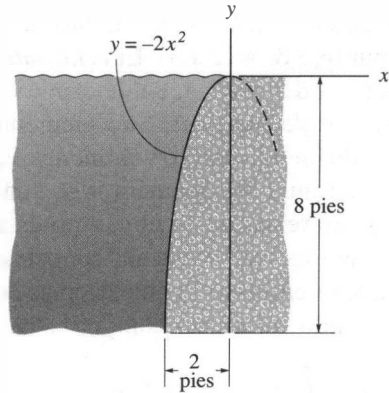
Prob. 9-126

9-127. Localice el centroide del sólido.



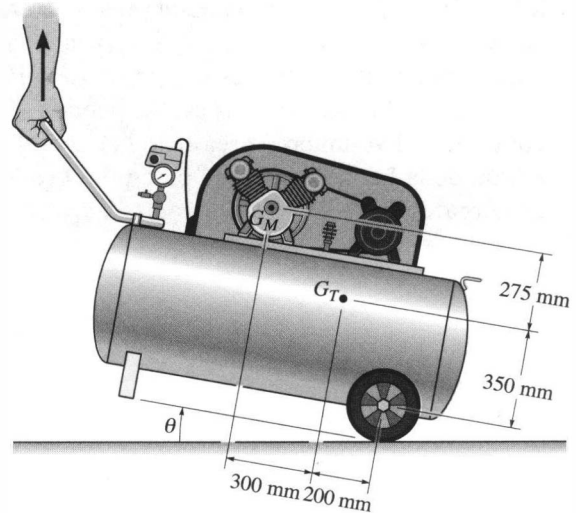
Prob. 9-127

*9-128. Determine la magnitud de la fuerza hidrostática resultante que actúa por pie de longitud sobre la pared marina; $\gamma_w = 62.4 \text{ lb/pie}^3$.



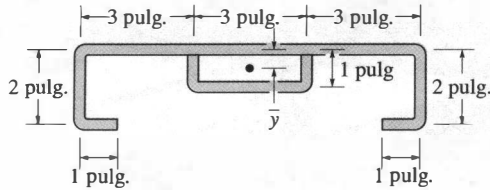
Prob. 9-128

9-129. El tanque y la compresora tienen masa de 15 kg y centro de masa en G_T , y el motor tiene masa de 70 kg y centro de masa en G_M . Determine el ángulo θ de inclinación del tanque de manera que la unidad esté a punto de voltearse.



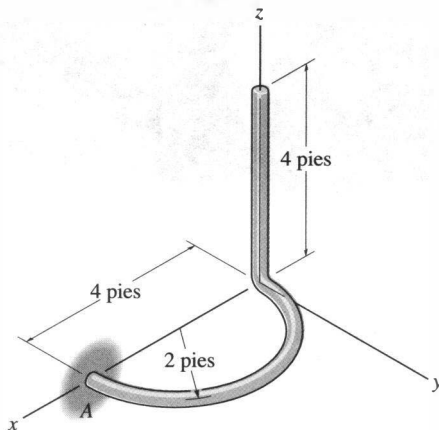
Prob. 9-129

9-130. La canaleta y el refuerzo de pared delgada tienen la sección transversal que se muestra. Si el material tiene espesor constante, determine la ubicación \bar{y} de su centroide. Las dimensiones están indicadas al centro de cada segmento.



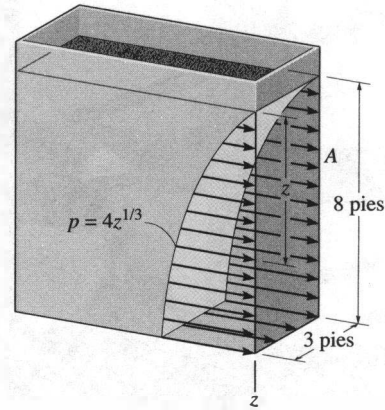
Prob. 9-130

9-131. Localice el centro de gravedad de la barra homogénea cuyo peso es de 2 lb/pie. Calcule también las componentes x, y, z de reacción presentes en el soporte fijo A .



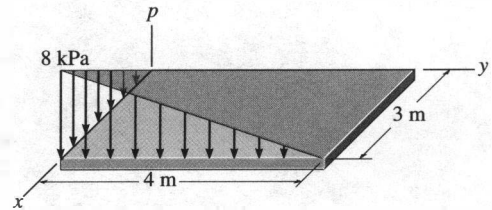
Prob. 9-131

*9-132. El recipiente rectangular está lleno con carbón, el cual genera una distribución de presión a lo largo de la pared A que varía como se muestra, es decir, $p = 4z^{1/3}$ lb/pie², donde z está en pies. Calcule la fuerza resultante generada por el carbón, y su ubicación, medida desde la parte superior.



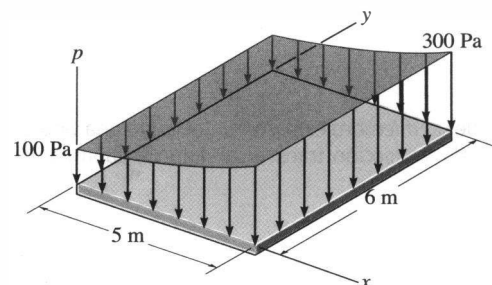
Prob. 9-132

9-133. La carga sobre la placa varía linealmente a lo largo de los lados de la placa de modo que $p = \frac{2}{3}[x(4 - y)]$ kPa. Determine la fuerza resultante y su posición (\bar{x}, \bar{y}) sobre la placa.



Prob. 9-133

9-134. La carga de presión sobre la placa está descrita por la función $p = \{-240/(x + 1) + 340\}$ Pa. Determine la magnitud de la fuerza resultante y las coordenadas del punto donde la línea de acción de la fuerza interseca la placa.



Prob. 9-134



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar un método para determinar el momento de inercia de un área.
- Presentar el producto de inercia y mostrar cómo determinar los momentos de inercia máximo y mínimo de un área.
- Analizar el momento de inercia de masa.

10.1 Definición de momentos de inercia para áreas

En el capítulo anterior determinamos el centroide para un área considerando el primer momento del área con respecto a un eje; esto es, para el cálculo tuvimos que evaluar una integral de la forma $\int x dA$. A una integral del segundo momento de un área, tal como $\int x^2 dA$, se le llama *momento de inercia* para el área. La terminología “momento de inercia” como se usa aquí, es en realidad errónea; sin embargo, ha sido adoptada debido a la similitud con integrales de la misma forma relacionadas con la masa.

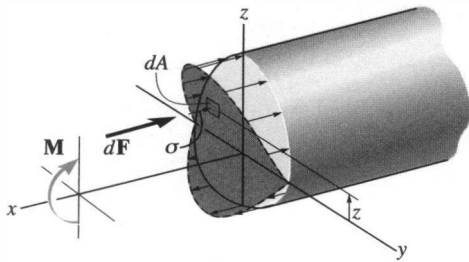


Fig. 10-1

El momento de inercia de un área se origina siempre que relacionamos el esfuerzo normal σ (sigma), o fuerza por unidad de área, que actúa sobre la sección transversal de una viga elástica, con el momento \mathbf{M} aplicado externo, el cual causa flexión de la viga. A partir de la teoría de la mecánica de materiales, se puede mostrar que el esfuerzo dentro de la viga varía linealmente con su distancia desde un eje que pasa por el centroide C del área de la sección transversal de la viga, es decir, $\sigma = kz$, figura 10-1. La magnitud de la fuerza que actúa sobre el elemento de área dA , mostrado en la figura, es entonces $dF = \sigma dA = kz dA$. Como esta fuerza está localizada a una distancia z del eje y , el momento de dF con respecto al eje y es $dM = dFz = kz^2 dA$. El momento resultante de la distribución total de esfuerzo es igual al momento aplicado \mathbf{M} ; por tanto, $M = k \int z^2 dA$. Aquí, la integral representa el momento de inercia del área con respecto al eje y . Como integrales de esta forma surgen a menudo en fórmulas usadas en mecánica de materiales, mecánica estructural, mecánica de fluidos y diseño de máquinas, el ingeniero debe familiarizarse con los métodos usados para su cálculo.

Momento de inercia. Considere el área A , mostrada en la figura 10-2, que se encuentra en el plano x - y . Por definición, los momentos de inercia del área diferencial plana dA con respecto a los ejes x y y son $dI_x = y^2 dA$ y $dI_y = x^2 dA$, respectivamente. Los *momentos de inercia* son determinados por integración para toda el área; es decir,

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA \\ I_y &= \int_A x^2 dA \end{aligned} \tag{10-1}$$

También podemos formular el segundo momento de dA con respecto al polo O o eje z , figura 10-2. A éste se le llama momento de inercia polar, $dJ_o = r^2 dA$. Aquí, r es la distancia perpendicular desde el polo (eje z) hasta el elemento dA . Para toda el área, el *momento de inercia polar* es

$$J_o = \int_A r^2 dA = I_x + I_y \tag{10-2}$$

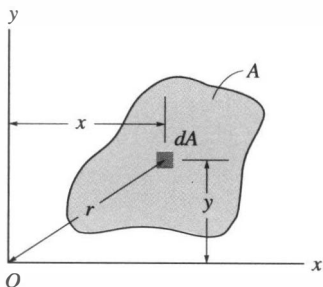


Fig. 10-2

La relación entre J_o e I_x, I_y es posible puesto que $r^2 = x^2 + y^2$, figura 10-2.

A partir de las formulaciones anteriores se ve que I_x, I_y y J_o siempre serán *positivos* ya que implican el producto de una distancia al cuadrado y un área. Además, las unidades para el momento de inercia implican la longitud elevada a la cuarta potencia, esto es, m^4, mm^4 , o $pies^4, pulg^4$.

10.2 Teorema de los ejes paralelos para un área

Si el momento de inercia para un área se conoce con respecto a un eje que pasa a través de su centroide, lo que a menudo es el caso, es conveniente determinar el momento de inercia del área con respecto a un eje paralelo correspondiente usando el *teorema de los ejes paralelos*. Para derivar este teorema, considere encontrar el momento de inercia del área sombreada que muestra la figura 10-3 con respecto al eje x . En este caso, un elemento diferencial dA está ubicado a una distancia arbitraria y' del eje *centroidal* x' , mientras que la *distancia fija* entre los ejes paralelos x y x' es definida como d_y . Puesto que el momento de inercia de dA con respecto al eje x es $dI_x = (y' + d_y)^2 dA$, entonces, para toda el área,

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A (y' + d_y)^2 dA \\ &= \int_A y'^2 dA + 2d_y \int_A y' dA + d_y^2 \int_A dA \end{aligned}$$

La primera integral representa el momento de inercia del área con respecto al eje centroidal $\bar{I}_{x'}$. La segunda integral es cero ya que el eje x' pasa a través del centroide C del área; esto es, $\int y' dA = \bar{y} \int dA = 0$ ya que $\bar{y} = 0$. Observamos que la tercera integral representa el área total A , el resultado final es, por tanto,

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 \quad (10-3)$$

Una expresión similar puede ser escrita para I_y ; esto es,

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 \quad (10-4)$$

Finalmente, para el momento de inercia polar con respecto a un eje perpendicular al plano x - y y que pase a través del polo O (eje z), figura 10-3, tenemos

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \quad (10-5)$$

La forma de cada una de estas tres ecuaciones establece que *el momento de inercia de un área con respecto a un eje es igual al momento de inercia del área con respecto a un eje paralelo que pase a través el centroide del área más el producto del área y el cuadrado de la distancia perpendicular entre los ejes*.

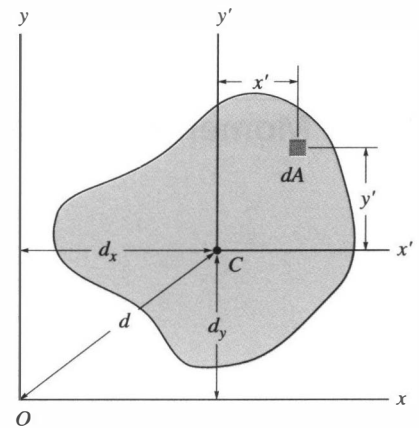


Fig. 10-3

10.3 Radio de giro de un área

El *radio de giro* de un área plana tiene unidades de longitud y es una cantidad usada a menudo en mecánica estructural para el diseño de columnas. Si se *conocen* las áreas y los momentos de inercia, los radios de giro son determinados a partir de las fórmulas

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \quad (10-6)$$

La forma de estas ecuaciones es fácil de recordar ya que es similar a la usada para encontrar el momento de inercia de un área diferencial con respecto a un eje. Por ejemplo, $I_x = k_x^2 A$; mientras que para un área diferencial $dI_x = y^2 dA$.

10.4 Momentos de inercia para un área por integración

Cuando las fronteras de un área plana son expresadas mediante funciones matemáticas, las ecuaciones 10-1 pueden ser integradas para determinar los momentos de inercia para el área. Si el elemento de área elegido para la integración tiene un tamaño diferencial en dos direcciones como se muestra en la figura 10-2, debe efectuarse una integración doble para evaluar el momento de inercia. Sin embargo, a menudo es más fácil efectuar una integración simple eligiendo un elemento que tenga un tamaño diferencial o espesor en sólo una dirección.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

- Si se efectúa una integración simple para determinar el momento de inercia de un área con respecto a un eje, será necesario especificar el elemento diferencial dA .
- La mayor parte de las veces este elemento será rectangular, de tal manera que tendrá una longitud finita y ancho diferencial.
- El elemento deberá estar ubicado de manera que interseque la frontera del área en el *punto arbitrario* (x,y) . Hay dos maneras posibles de orientar el elemento con respecto al eje para el cual se desea determinar el momento de inercia.

Caso 1

- La *longitud* del elemento puede ser orientada *paralelamente* al eje. Esta situación ocurre cuando el elemento rectangular mostrado en la figura 10-4 se usa al determinar I_y para el área. En este caso puede efectuarse una aplicación directa de la ecuación 10-1, esto es, $I_y = \int x^2 dA$, ya que el elemento tiene un espesor dx infinitesimal y, por tanto, *todas las partes* del elemento se encuentran a la *misma* distancia x de brazo de momento desde el eje y .*

Caso 2

- La *longitud* del elemento puede estar orientada *perpendicularmente* al eje. Aquí *no es aplicable* la ecuación 10-1 ya que todas las partes del elemento *no* se encuentran a la misma distancia de brazo de momento desde el eje. Por ejemplo, si el elemento rectangular de la figura 10-4 se usa al determinar I_x para el área, será necesario calcular primero el momento de inercia del *elemento* con respecto a un eje horizontal que pase por el centroide del elemento, y luego determinar el momento de inercia del *elemento* con respecto al eje x usando el teorema de los ejes paralelos. La integración de este resultado dará I_x .

*En el caso del elemento $dA = dx dy$, figura 10-2, los brazos de momento y y x son apropiados para la formulación de I_x e I_y (Ecuación 10-1) ya que *todo* el elemento, debido a su tamaño infinitesimal, se encuentra a las distancias perpendiculares y y x especificadas desde los ejes x y y .

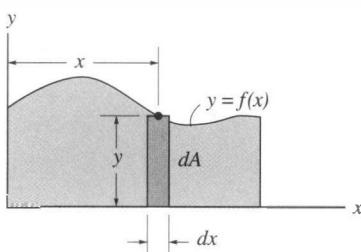


Fig. 10-4

EJEMPLO 10.1

Determine el momento de inercia del área rectangular mostrada en la figura 10-5 con respecto a (a) el eje centroidal x' , (b) el eje x_b que pasa por la base del rectángulo, y (c) el polo o eje z' perpendicular al plano $x' - y'$ y que pasa a través del centroide C .

Solución (Caso 1)

Parte (a). Para la integración, se elige el elemento diferencial mostrado en la figura 10-5. Debido a su ubicación y orientación, *todo el elemento* está a una distancia y' del eje x' . Aquí es necesario integrar a partir de $y' = -h/2$ a $y' = h/2$. Como $dA = b dy'$, entonces

$$\begin{aligned}\bar{I}_{x'} &= \int_A y'^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y'^2 (b dy') = b \int_{-h/2}^{h/2} y'^2 dy \\ &= \frac{1}{12} bh^3\end{aligned}$$

Resp.

Parte (b). El momento de inercia con respecto a un eje que pase por la base del rectángulo se puede obtener usando el resultado de la parte (a) y aplicando el teorema de los ejes paralelos, ecuación 10-3.

$$\begin{aligned}I_{x_b} &= \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 \\ &= \frac{1}{12} bh^3 + bh \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} bh^3\end{aligned}$$

Resp.

Parte (c). Para obtener el momento de inercia polar con respecto al punto C , debemos obtener primero $\bar{I}_{y'}$, la cual puede calcularse intercambiando las dimensiones b y h en el resultado de la parte (a), es decir,

$$\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12} hb^3$$

Usando la ecuación 10-2, el momento de inercia polar con respecto a C es, por tanto,

$$\bar{J}_C = \bar{I}_{x'} + \bar{I}_{y'} = \frac{1}{12} bh(h^2 + b^2)$$

Resp.

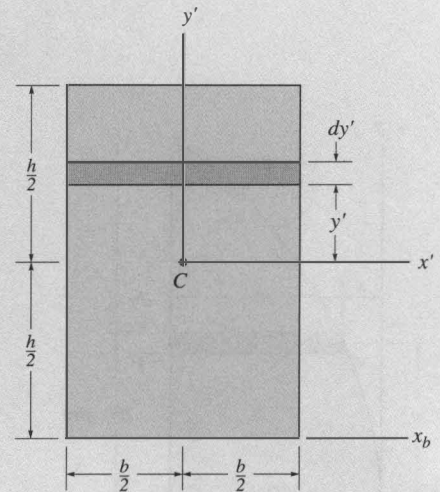
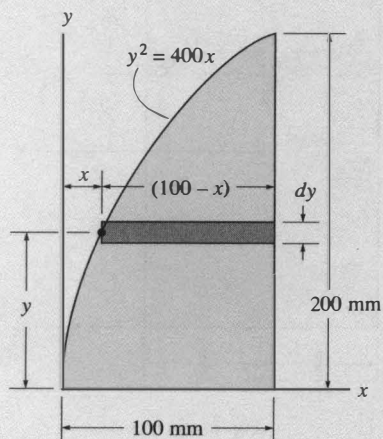


Fig. 10-5

EJEMPLO 10.2

Determine el momento de inercia del área sombreada que muestra la figura 10-6a con respecto al eje x .



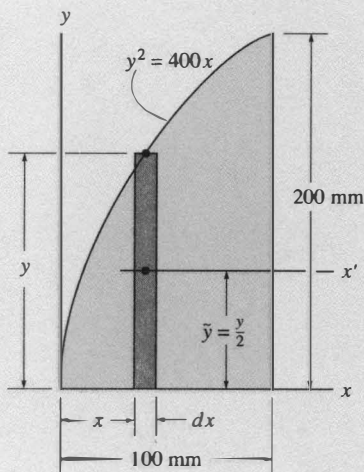
(a)

Solución I (Caso 1)

Un elemento diferencial de área que es *paralelo* al eje x , como se muestra en la figura 10-6a, es elegido para la integración. Como el elemento tiene un espesor dy e interseca la curva en el *punto arbitrario* (x, y) , el área es $dA = (100 - x) dy$. Además, todas las partes del elemento se encuentran a la misma distancia y desde el eje x . Por tanto, integrando con respecto a y , desde $y = 0$ hasta $y = 200$ mm, resulta

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA = \int_A y^2(100 - x) dy \\ &= \int_0^{200} y^2 \left(100 - \frac{y^2}{400} \right) dy = 100 \int_0^{200} y^2 dy - \frac{1}{400} \int_0^{200} y^4 dy \\ &= 107(10^6) \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Resp.



(b)

Fig. 10-6

Solución II (Caso 2)

Para la integración, se elige un elemento diferencial *paralelo* al eje y , como se muestra en la figura 10-6b. El elemento interseca la curva en el *punto arbitrario* (x, y) . En este caso, *no* todas las partes del elemento se encuentran a la misma distancia del eje x , y por tanto, debe usarse el teorema de los ejes paralelos para determinar el *momento de inercia del elemento* con respecto a este eje. Para un rectángulo con base b y altura h , el momento de inercia con respecto a su eje centroidal ya fue determinado en la parte (a) del ejemplo 10.1. Ahí se encontró que $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$. Para el elemento diferencial mostrado en la figura 10-6b, $b = dx$ y $h = y$, entonces $d\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}dx y^3$. Como el centroide del elemento está en $\tilde{y} = y/2$ desde el eje x , el momento de inercia del elemento con respecto a este eje es

$$dI_x = d\bar{I}_{x'} + dA \tilde{y}^2 = \frac{1}{12}dx y^3 + y dx \left(\frac{y}{2} \right)^2 = \frac{1}{3}y^3 dx$$

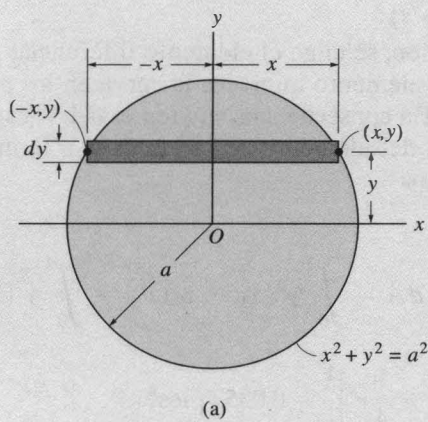
Este resultado también puede obtenerse a partir de la parte (b) del ejemplo 10.1. Integrando con respecto a x , desde $x = 0$ hasta $x = 100$ mm, resulta

$$\begin{aligned} I_x &= \int dI_x = \int_A \frac{1}{3}y^3 dx = \int_0^{100} \frac{1}{3}(400x)^{3/2} dx \\ &= 107(10^6) \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Resp.

EJEMPLO 10.3

Determine el momento de inercia con respecto al eje x del área circular mostrada en la figura 10-7a.


Solución I (Caso 1)

Usando el elemento diferencial mostrado en la figura 10-7a, como $dA = 2x \, dy$, tenemos

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 \, dA = \int_A y^2 (2x) \, dy \\ &= \int_{-a}^a y^2 (2\sqrt{a^2 - y^2}) \, dy = \frac{\pi a^4}{4} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Solución II (Caso 2)

Cuando el elemento diferencial se elige como nos muestra la figura 10-7b, el centroide del elemento se encuentra en el eje x , y entonces, aplicando la ecuación 10-3, observamos que $d_y = 0$ y que para un rectángulo $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12} b h^3$, tenemos

$$\begin{aligned} dI_x &= \frac{1}{12} dx (2y)^3 \\ &= \frac{2}{3} y^3 dx \end{aligned}$$

Integrando con respecto a x resulta

$$I_x = \int_{-a}^a \frac{2}{3} (a^2 - x^2)^{3/2} dx = \frac{\pi a^4}{4} \quad \text{Resp.}$$

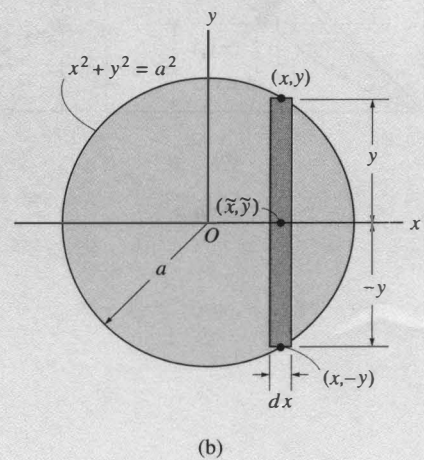
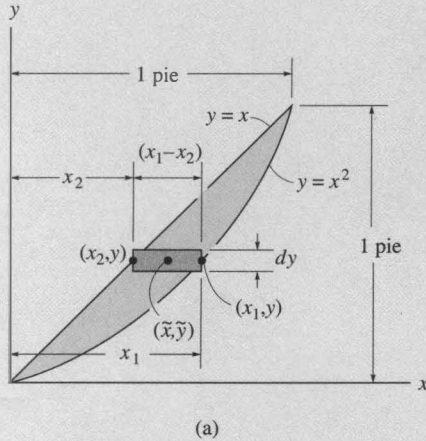


Fig. 10-7

EJEMPLO 10.4

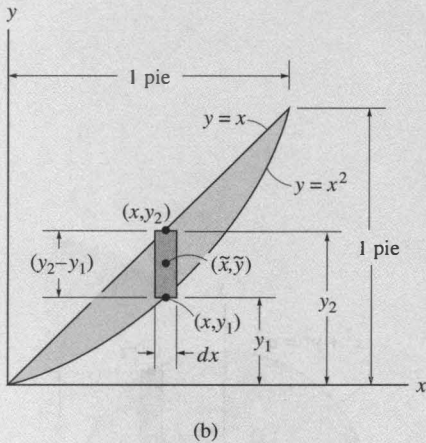
Determine el momento de inercia del área sombreada que muestra la figura 10–8a con respecto al eje x .

**Solución I (Caso 1)**

Para la integración, se elige el elemento diferencial paralelo al eje x , figura 10–8a. El elemento interseca la curva en los *puntos arbitrarios* (x_2, y) y (x_1, y) . En consecuencia, su área es $dA = (x_1 - x_2) dy$. Como todas las partes del elemento se encuentran a la misma distancia y del eje x , tenemos

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^1 y^2 (x_1 - x_2) dy = \int_0^1 y^2 (\sqrt{y} - y) dy$$

$$I_x = \frac{2}{7} y^{7/2} - \frac{1}{4} y^4 \Big|_0^1 = 0.0357 \text{ pies}^4 \quad \text{Resp.}$$

**Solución II (Caso 2)**

El elemento diferencial paralelo al eje y se muestra en la figura 10–8b. Este elemento interseca las curvas en los *puntos arbitrarios* (x, y_2) y (x, y_1) . Como *no* todas sus partes se encuentran a la misma distancia del eje x , debemos aplicar primero el teorema de los ejes paralelos para encontrar el momento de inercia *del elemento* con respecto al eje x , usando $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12} bh^3$, y luego integrar este resultado para determinar I_x . Así,

$$dI_x = d\bar{I}_{x'} + dA \tilde{y}^2 = \frac{1}{12} dx (y_2 - y_1)^3 + (y_2 - y_1) dx \left(y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{3} (y_2^3 - y_1^3) dx = \frac{1}{3} (x^3 - x^6) dx$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_0^1 (x^3 - x^6) dx = \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{21} x^7 \Big|_0^1 = 0.0357 \text{ pies}^4 \quad \text{Resp.}$$

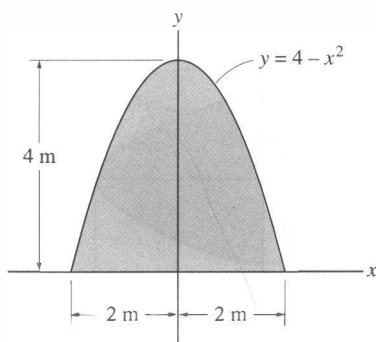
Fig. 10–8

Por comparación, advertimos que la solución I requiere de mucho menos cálculo. Por tanto, si una integral resulta difícil de evaluar usando un elemento particular, intente resolver el problema empleando un elemento orientado en la otra dirección.

PROBLEMAS

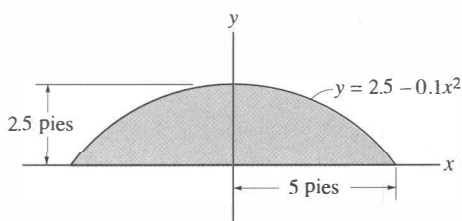
10-1. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje x .

10-2. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje y .



Probs. 10-1/2

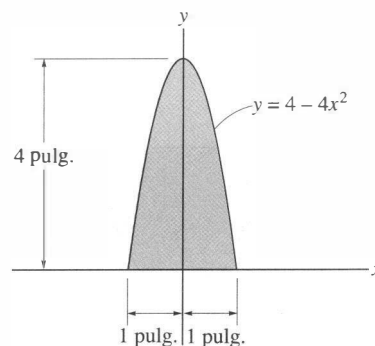
10-3. Determine el momento de inercia del área con respecto al eje x . Usando elementos rectangulares diferenciales, resuelva el problema de dos maneras: (a) con espesor dx , y (b) con espesor dy .



Prob. 10-3

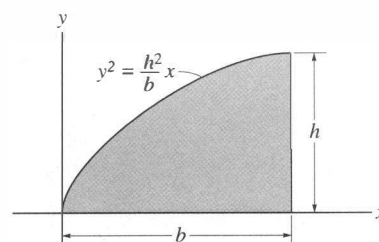
*10-4. Determine el momento de inercia del área con respecto al eje x . Usando elementos rectangulares diferenciales, resuelva el problema de dos maneras: (a) con espesor dx , y (b) con espesor dy .

10-5. Determine el momento de inercia del área con respecto al eje y . Usando elementos rectangulares diferenciales, resuelva el problema de dos maneras: (a) con espesor dx , y (b) con espesor dy .



Probs. 10-4/5

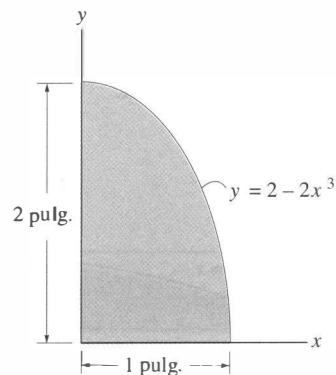
10-6. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje x .



Prob. 10-6

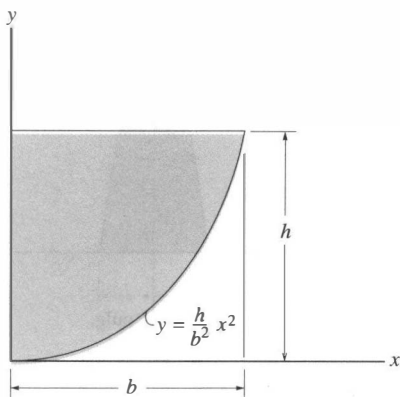
10-7. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje x .

*10-8. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje y .



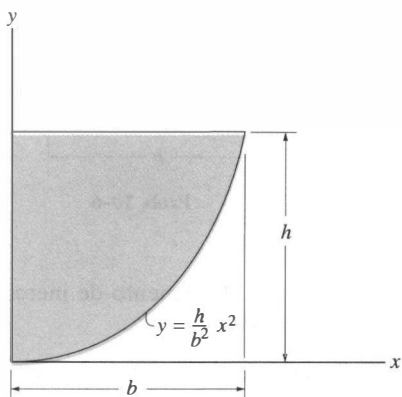
Probs. 10-7/8

10-9. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje x .



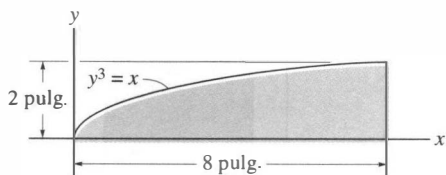
Prob. 10-9

10-10. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje y .



Prob. 10-10

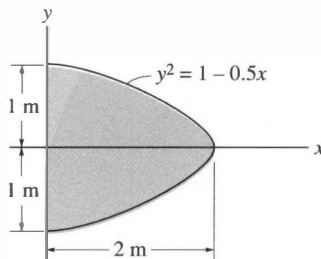
10-11. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje x .



Prob. 10-11

*10-12. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje x .

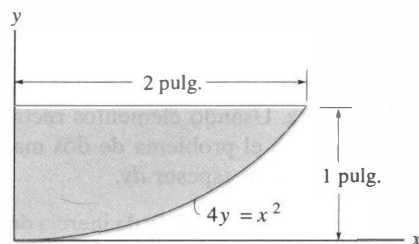
10-13. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje y .



Probs. 10-12/13

10-14. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje x .

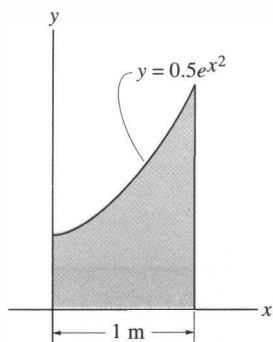
10-15. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje y .



Probs. 10-14/15

*■10-16. Determine el momento de inercia del área con respecto al eje y . Use la regla de Simpson para evaluar la integral.

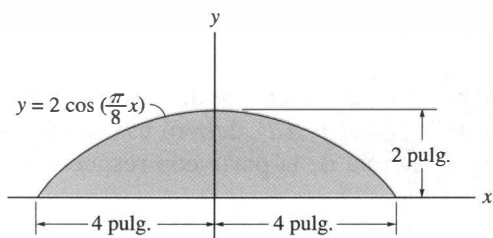
■10-17. Determine el momento de inercia del área con respecto al eje x . Use la regla de Simpson para evaluar la integral.



Probs. 10-16/17

10-18. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje x .

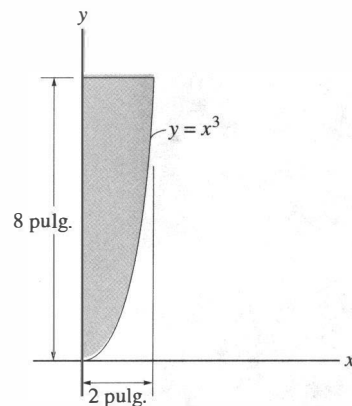
10-19. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje y .



Probs. 10-18/19

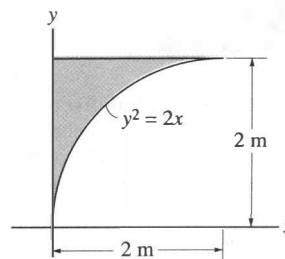
*10-20. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje x .

10-21. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje y .



Probs. 10-20/21

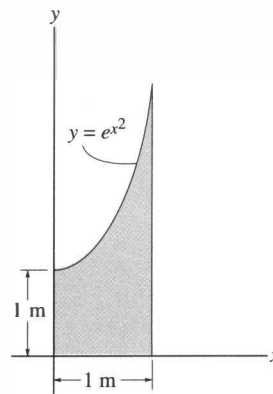
10-22. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje x .



Prob. 10-22

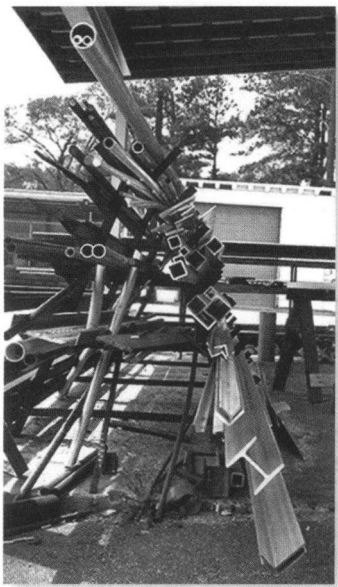
■10-23. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje y . Use la regla de Simpson para evaluar la integral.

*■10-24. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje x . Use la regla de Simpson para evaluar la integral.



Probs. 10-23/24

10.5 Momentos de inercia para áreas compuestas



Los miembros estructurales tienen diversas formas de sección transversal, y es necesario calcular sus momentos de inercia para determinar los esfuerzos en esos miembros.

Un área compuesta consiste en una serie de partes o formas “más simples” conectadas, tales como semicírculos, rectángulos y triángulos. Si el momento de inercia de cada una de esas partes se conoce o puede ser determinado con respecto a un eje común, entonces el momento de inercia del área compuesta es igual a la *suma algebraica* de los momentos de inercia de todas sus partes.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El momento de inercia de un área compuesta con respecto a un eje de referencia puede ser determinado usando el siguiente procedimiento.

Partes componentes.

- Usando un croquis, divida el área en sus partes componentes e indique la distancia perpendicular desde el *centroide* de cada parte hasta el eje de referencia.

Teorema de los ejes paralelos.

- El momento de inercia de cada parte debe ser determinado con respecto a su eje centroidal, que es paralelo al eje de referencia. Para efectuar el cálculo use la tabla dada en la cubierta posterior interna de este libro.
- Si el eje centroidal no coincide con el eje de referencia, el teorema de los ejes paralelos, $I = \bar{I} + Ad^2$, deberá usarse para determinar el momento de inercia de la parte con respecto al eje de referencia.

Sumatoria.

- El momento de inercia de toda el área con respecto al eje de referencia es determinado sumando los resultados de sus partes componentes.
- Si una parte componente tiene un “agujero”, su momento de inercia se encuentra “restando” el momento de inercia del agujero del momento de inercia de toda la parte, incluido el agujero.

EJEMPLO 10.5

Calcule el momento de inercia del área compuesta mostrada en la figura 10-9a con respecto al eje x .

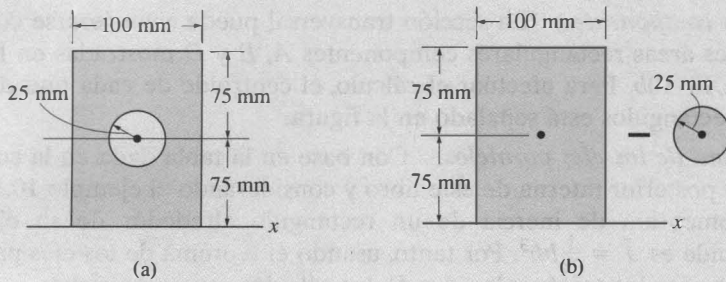


Fig. 10-9

Solución

Partes compuestas. El área compuesta se obtiene *restando* el círculo del rectángulo como se muestra en la figura 10-9b. El centroide de cada área está señalado en la figura.

Teorema de los ejes paralelos. Los momentos de inercia con respecto al eje x son determinados usando el teorema de los ejes paralelos y con los datos proporcionados en la tabla de la cubierta posterior interna de este libro.

Círculo

$$\begin{aligned} I_x &= \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 \\ &= \frac{1}{4}\pi(25)^4 + \pi(25)^2(75)^2 = 11.4(10^6) \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Rectángulo

$$\begin{aligned} I_x &= \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 \\ &= \frac{1}{12}(100)(150)^3 + (100)(150)(75)^2 = 112.5(10^6) \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Sumatoria. El momento de inercia del área compuesta es entonces

$$\begin{aligned} I_x &= -11.4(10^6) + 112.5(10^6) \\ &= 101(10^6) \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Resp.

EJEMPLO 10.6

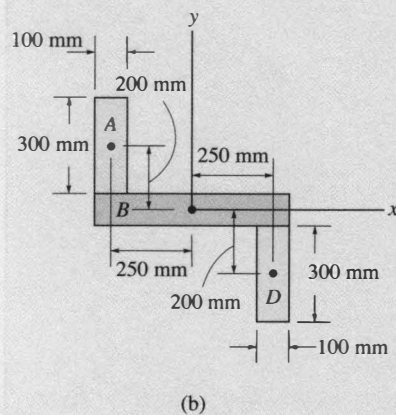
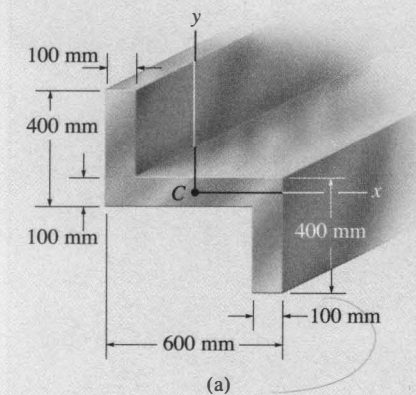


Fig. 10-10

Determine los momentos de inercia del área de la sección transversal de la viga mostrada en la figura 10-10a con respecto a los ejes centroidales x y y .

Solución

Partes componentes. La sección transversal puede considerarse como tres áreas rectangulares componentes A , B y D mostradas en la figura 10-10b. Para efectuar el cálculo, el centroide de cada uno de esos rectángulos está señalado en la figura.

Teorema de los ejes paralelos. Con base en la tabla dada en la cubierta posterior interna de este libro y considerando el ejemplo 10.1, el momento de inercia de un rectángulo alrededor de su eje centroide es $\bar{I} = \frac{1}{12}bh^3$. Por tanto, usando el teorema de los ejes paralelos para los rectángulos A y D , los cálculos son como sigue:

Rectángulo A

$$I_x = \bar{I}_x + Ad_y^2 = \frac{1}{12}(100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2 = 1.425(10^9) \text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + Ad_x^2 = \frac{1}{12}(300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2 = 1.90(10^9) \text{ mm}^4$$

Rectángulo B

$$I_x = \frac{1}{12}(600)(100)^3 = 0.05(10^9) \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(100)(600)^3 = 1.80(10^9) \text{ mm}^4$$

Rectángulo D

$$I_x = \bar{I}_x + Ad_y^2 = \frac{1}{12}(100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2 = 1.425(10^9) \text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + Ad_x^2 = \frac{1}{12}(300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2 = 1.90(10^9) \text{ mm}^4$$

Sumatoria. Los momentos de inercia para toda la sección son entonces

$$I_x = 1.425(10^9) + 0.05(10^9) + 1.425(10^9) = 2.90(10^9) \text{ mm}^4$$

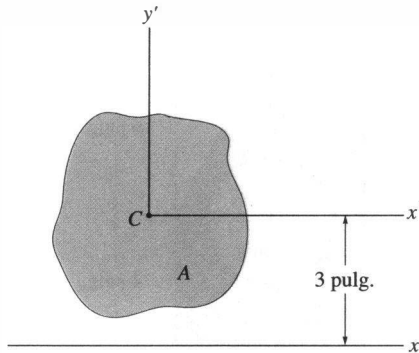
Resp.

$$I_y = 1.90(10^9) + 1.80(10^9) + 1.90(10^9) = 5.60(10^9) \text{ mm}^4$$

Resp.

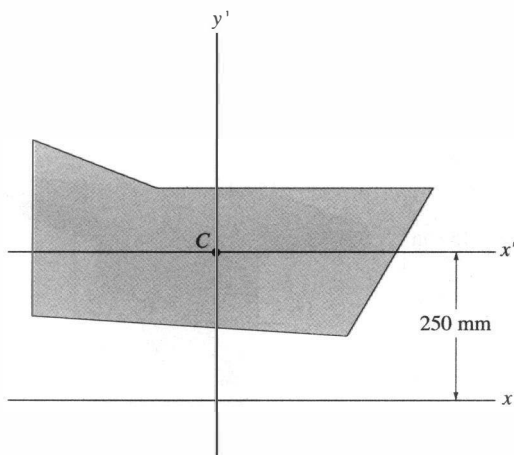
PROBLEMAS

10-25. El momento de inercia polar del área es $\bar{J}_C = 23 \text{ pulg}^4$ con respecto al eje z que pasa a través del centroide C . Si el momento de inercia con respecto al eje y' es de 5 pulg^4 , y el momento de inercia con respecto al eje x es de 40 pulg^4 , determine el área A .



Prob. 10-25

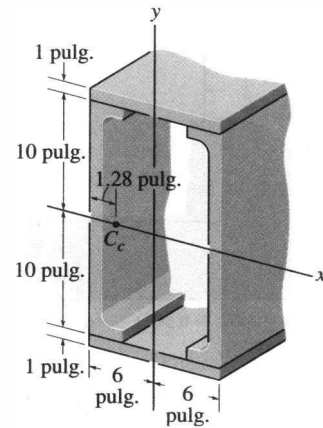
10-26. El momento de inercia polar del área es $\bar{J}_C = 548(10^6) \text{ mm}^4$, con respecto al eje z' que pasa a través del centroide C . El momento de inercia con respecto al eje y' es de $383(10^6) \text{ mm}^4$, y el momento de inercia con respecto al eje x es de $856(10^6) \text{ mm}^4$. Determine el área A .



Prob. 10-26

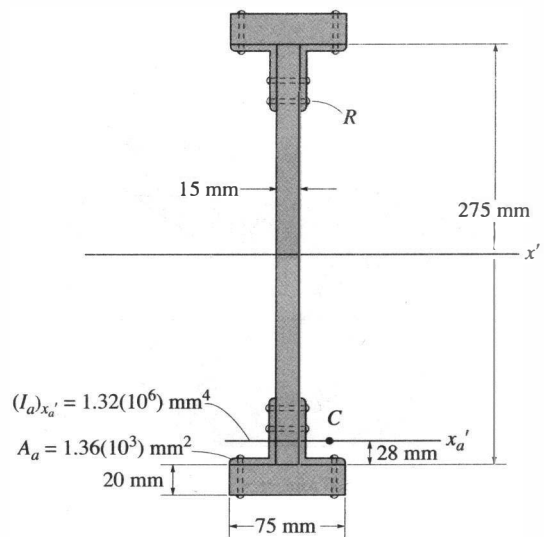
10-27. La viga está construida con dos canaletas y dos cubreplacas. Si cada canaleta tiene un área en su sección transversal de $A_c = 11.8 \text{ pulg}^2$ y un momento de inercia con respecto a un eje horizontal que pasa a través de su propio centroide, C_c , de $(\bar{I}_y)_{C_c} = 349 \text{ pulg}^4$, determine el momento de inercia de la viga con respecto al eje x .

***10-28.** La viga está construida con dos canaletas y dos cubreplacas. Si cada canaleta tiene un área de sección transversal de $A_c = 11.8 \text{ pulg}^2$ y un momento de inercia con respecto a un eje vertical que pasa a través de su propio centroide, C_c , de $(\bar{I}_y)_{C_c} = 9.23 \text{ pulg}^4$, determine el momento de inercia de la viga con respecto al eje y .



Probs. 10-27/28

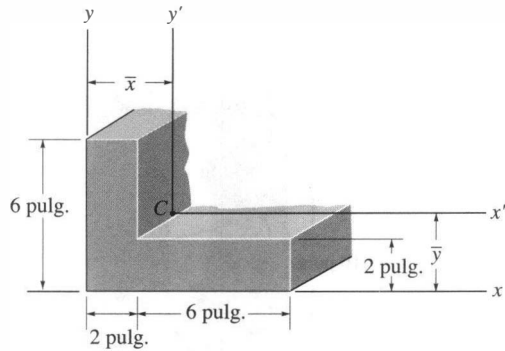
10-29. Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje x' centroidal. Ignore el tamaño de todas las cabezas de remaches R en el cálculo. Con base en manuales de ingeniería, los valores para el área, el momento de inercia y la ubicación del centroide C de uno de los ángulos están dados en la figura.



Prob. 10-29

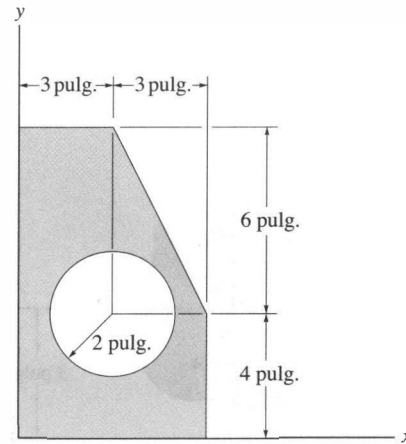
10-30. Localice el centroide \bar{y} del área de la sección transversal para el perfil angular. Luego encuentre el momento de inercia $\bar{I}_{x'}$ con respecto al eje centroidal x' .

10-31. Localice el centroide \bar{x} del área de la sección transversal para el perfil angular. Luego encuentre el momento de inercia \bar{I}_y con respecto al eje centroidal y' .



Probs. 10-30/31

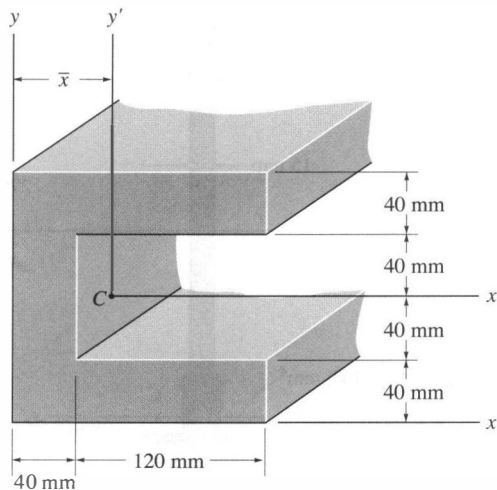
10-34. Determine los momentos de inercia del área sombreada con respecto a los ejes x y y .



Prob. 10-34

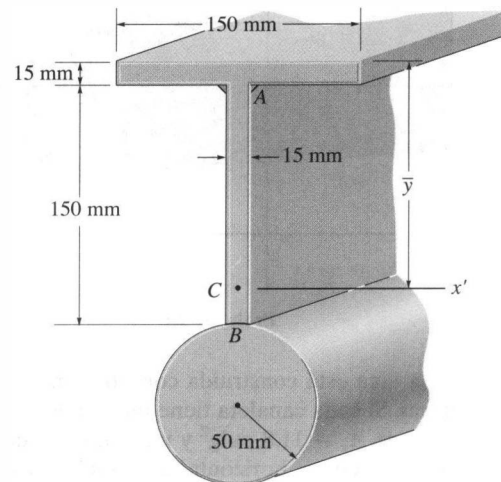
***10-32.** Determine la distancia \bar{x} al centroide del área de la sección transversal de la viga; luego encuentre el momento de inercia con respecto al eje y' .

10-33. Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje x' .



Probs. 10-32/33

10-35. Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje x' . En los cálculos, ignore el tamaño de las soldaduras de esquina situadas en A y B . $\bar{y} = 154.4$ mm.

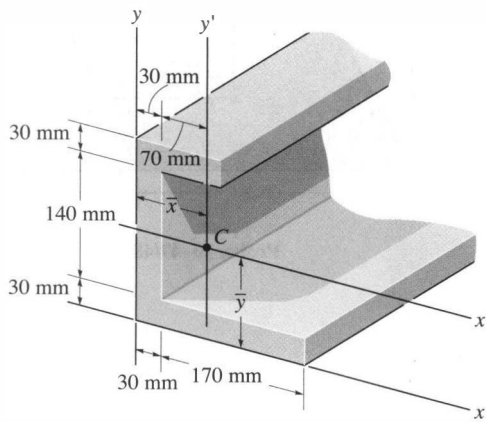


Prob. 10-35

***10-36.** Calcule los momentos de inercia I_x e I_y para el área de la sección transversal de la viga con respecto a los ejes x y y .

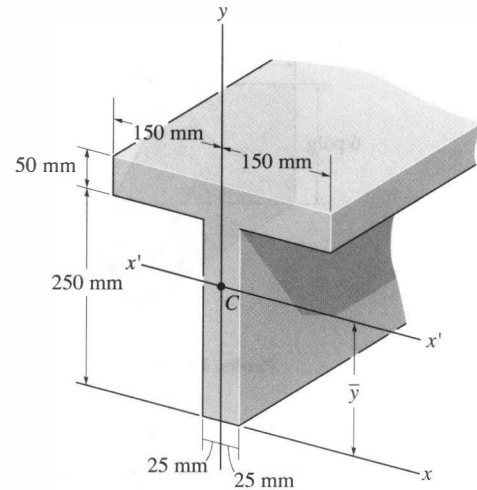
10-37. Determine la distancia \bar{y} al centroide C del área de la sección transversal de la viga y luego calcule el momento de inercia $\bar{I}_{x'}$ con respecto al eje x' .

10-38. Determine la distancia \bar{x} al centroide C del área de la sección transversal de la viga y luego calcule el momento de inercia \bar{I}_y con respecto al eje y' .



Probs. 10-36/37/38

***10-40.** Determine \bar{y} , la cual establece el eje centroidal x' del área de la sección transversal de la viga T, y luego encuentre los momentos de inercia $\bar{I}_{x'}$ e $\bar{I}_{y'}$.

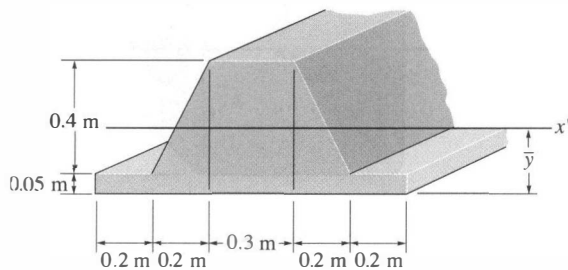


Prob. 10-40

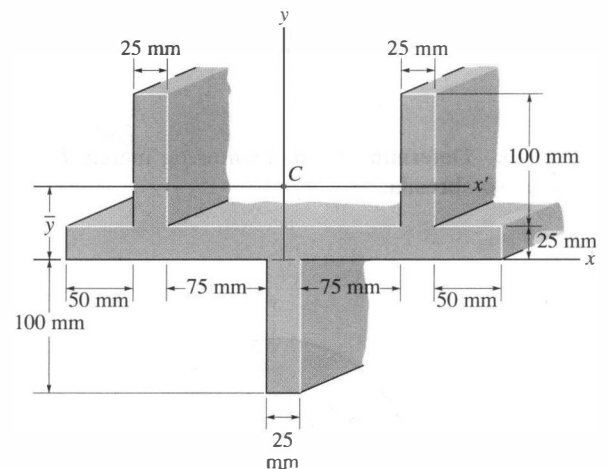
10-41. Determine la distancia \bar{y} al centroide del área de la sección transversal de la viga; luego determine el momento de inercia con respecto al eje x' .

10-42. Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje y .

10-39. Localice el centroide \bar{y} de la sección transversal y determine el momento de inercia de la sección con respecto al eje x' .



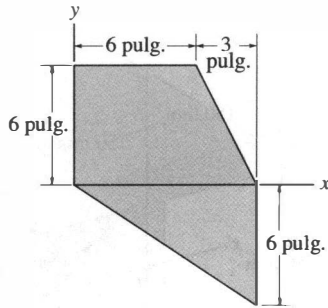
Prob. 10-39



Probs. 10-41/42

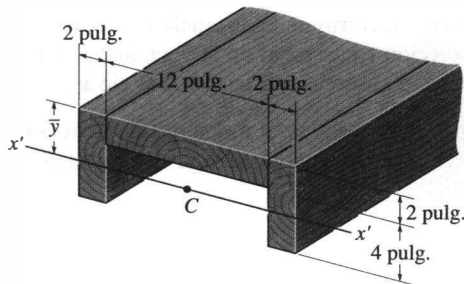
10-43. Determine el momento de inercia I_x del área sombreada con respecto al eje x .

*10-44. Determine el momento de inercia I_y del área sombreada con respecto al eje y .



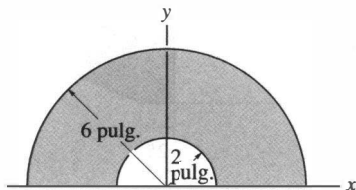
Probs. 10-43/44

10-45. Localice el centroide \bar{y} del área de la sección transversal de la canaleta, y luego determine el momento de inercia con respecto al eje x' que pasa a través del centroide.



Prob. 10-45

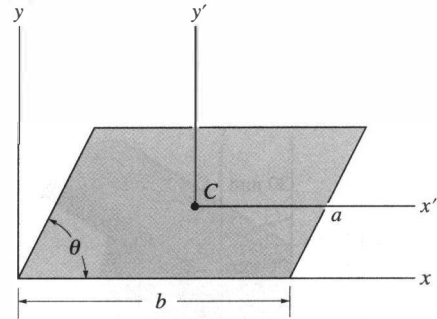
10-46. Determine los momentos de inercia I_x e I_y del área sombreada.



Prob. 10-46

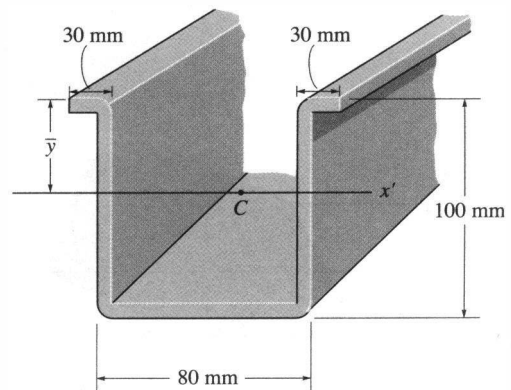
10-47. Determine el momento de inercia del paralelogramo con respecto al eje x' que pasa a través del centroide C del área.

*10-48. Determine el momento de inercia del paralelogramo con respecto al eje y' que pasa a través del centroide C del área.



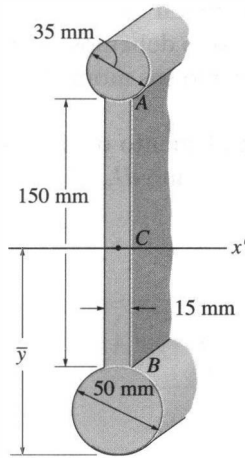
Probs. 10-47/48

10-49. Un puntal de aluminio tiene la sección transversal mostrada en la figura. Determine la ubicación \bar{y} del centroide de su área y el momento de inercia del área con respecto al eje x' . Cada segmento tiene espesor de 10 mm.



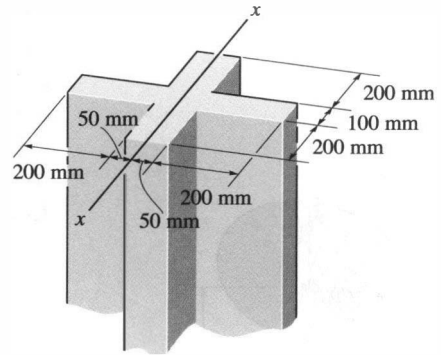
Prob. 10-49

10-50. Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje x' que pasa a través del centroide C de la sección transversal. En los cálculos, ignore el tamaño de las soldaduras de esquina situadas en A y B . $\bar{y} = 104.3$ mm.



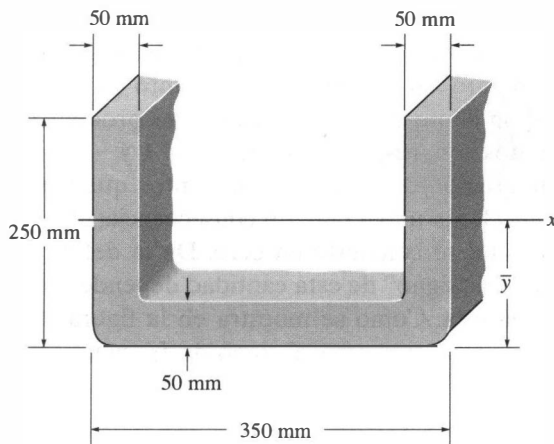
Prob. 10-50

*10-52. Determine el radio de giro k_x del área de la sección transversal de la columna.



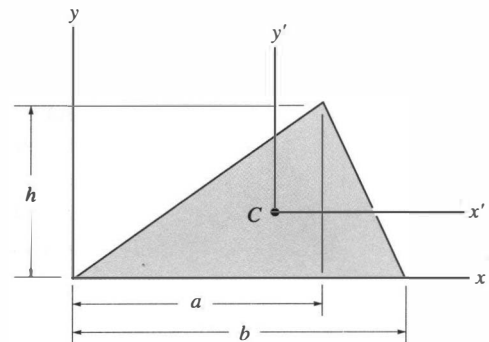
Prob. 10-52

10-51. Determine la ubicación \bar{y} del centroide del área de la sección transversal de la canaleta y luego calcule el momento de inercia del área con respecto a este eje.



Prob. 10-51

10-53. Determine los momentos de inercia del área triangular con respecto a los ejes x' y y' que pasan a través del centroide C del área.



Prob. 10-53

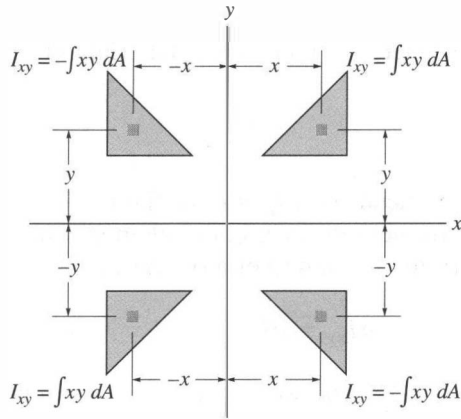


Fig. 10-13

área, y x y y representan un conjunto correspondiente de ejes paralelos. Como el producto de inercia de dA con respecto a los ejes x y y es $dI_{xy} = (x' + d_x)(y' + d_y) dA$, entonces para toda el área,

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \int_A (x' + d_x)(y' + d_y) dA \\
 &= \int_A x' y' dA + d_x \int_A y' dA + d_y \int_A x' dA + d_x d_y \int_A dA
 \end{aligned}$$

El primer término del lado derecho representa el producto de inercia del área con respecto al eje centroidal, $\bar{I}_{x'y'}$. Las integrales en los términos segundo y tercero son cero ya que los momentos del área se toman con respecto al eje centroidal. Observando que la cuarta integral representa el área total A , el resultado final es, por tanto,

$$\boxed{I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y} \quad (10-8)$$

Debe advertirse la similitud entre esta ecuación y la del teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia. En particular, es importante respetar los *signos algebraicos* para d_x y d_y , al aplicar la ecuación 10-8. Como se ilustra en el ejemplo 10.8, el teorema de los ejes paralelos encuentra importante aplicación en la determinación del producto de inercia de un *área compuesta* con respecto al conjunto de ejes x , y .

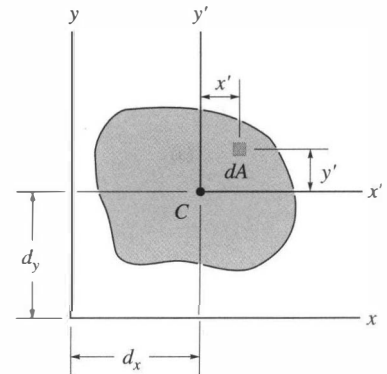


Fig. 10-14

EJEMPLO 10.7

Determine el producto de inercia I_{xy} del triángulo mostrado en la figura 10–15a.

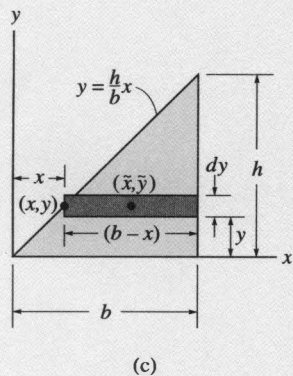
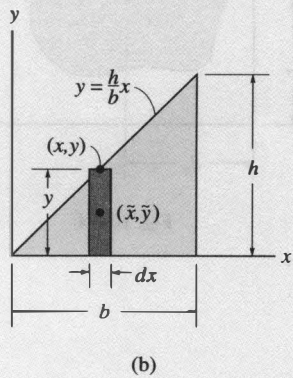
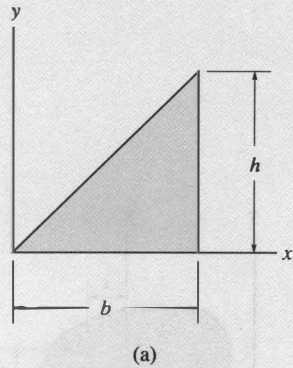


Fig. 10–15

Solución I

Un elemento diferencial con espesor dx , figura 10–15b, tiene un área $dA = y dx$. El producto de inercia del elemento con respecto a los ejes x, y es determinado usando el teorema de los ejes paralelos.

$$dI_{xy} = d\bar{I}_{x'y'} + dA \tilde{x} \tilde{y}$$

donde (\tilde{x}, \tilde{y}) ubica el *centroide* del elemento o el origen de los ejes x', y' . Como $d\bar{I}_{x'y'} = 0$, debido a la simetría, y $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y/2$, entonces

$$\begin{aligned} dI_{xy} &= 0 + (y dx)x\left(\frac{y}{2}\right) = \left(\frac{h}{b}x dx\right)x\left(\frac{h}{2b}x\right) \\ &= \frac{h^2}{2b^2}x^3 dx \end{aligned}$$

Integrando con respecto a x desde $x = 0$ hasta $x = b$, resulta

$$I_{xy} = \frac{h^2}{2b^2} \int_0^b x^3 dx = \frac{b^2 h^2}{8} \quad \text{Resp.}$$

Solución II

El elemento diferencial que tiene espesor dy , figura 10–15c, y área $dA = (b - x) dy$, también puede ser usado. El *centroide* se ubica en el punto $\tilde{x} = x + (b - x)/2 = (b + x)/2$, $\tilde{y} = y$, por lo que el producto de inercia del elemento toma la forma

$$\begin{aligned} dI_{xy} &= d\bar{I}_{x'y'} + dA \tilde{x} \tilde{y} \\ &= 0 + (b - x) dy \left(\frac{b + x}{2}\right) y \\ &= \left(b - \frac{b}{h}y\right) dy \left[\frac{b + (b/h)y}{2}\right] y = \frac{1}{2}y \left(b^2 - \frac{b^2}{h^2}y^2\right) dy \end{aligned}$$

Integrando con respecto a y desde $y = 0$ hasta $y = h$ resulta

$$I_{xy} = \frac{1}{2} \int_0^h y \left(b^2 - \frac{b^2}{h^2}y^2\right) dy = \frac{b^2 h^2}{8} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 10.8

Calcule el producto de inercia del área de la sección transversal de la viga mostrada en la figura 10-16a, con respecto a los ejes centroidales x y y .

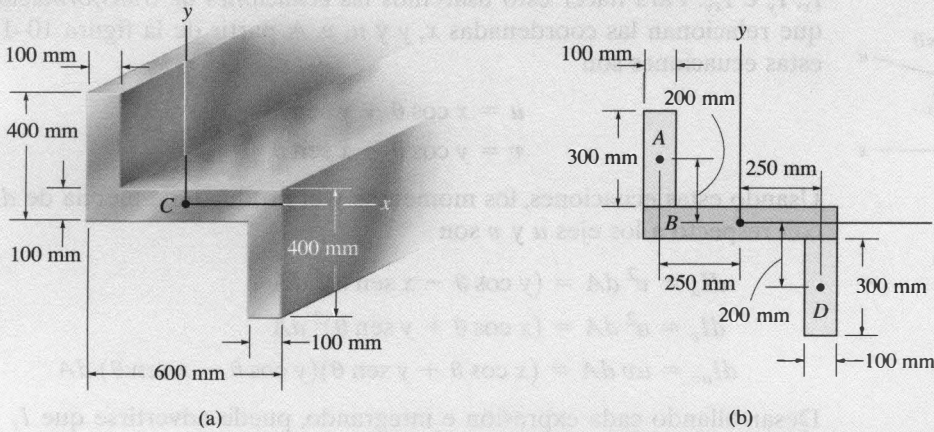


Fig. 10-16

Solución

Igual que en el ejemplo 10.6, la sección transversal puede ser considerada como tres áreas rectangulares componentes A , B y D , figura 10-16b. Las coordenadas para el centroide de cada uno de esos rectángulos se muestran en la figura. Debido a la simetría, el producto de inercia de *cada rectángulo* es *cero* con respecto a cada conjunto de ejes x' , y' que pasan a través del centroide del rectángulo. Por consiguiente, la aplicación del teorema de los ejes paralelos a cada uno de los rectángulos resulta en

Rectángulo A

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + Ad_x d_y \\ &= 0 + (300)(100)(-250)(200) \\ &= -1.50(10^9) \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Rectángulo B

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + Ad_x d_y \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Rectángulo D

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + Ad_x d_y \\ &= 0 + (300)(100)(250)(-200) \\ &= -1.50(10^9) \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

El producto de inercia de toda la sección transversal es entonces

$$I_{xy} = -1.50(10^9) + 0 - 1.50(10^9) = -3.00(10^9) \text{ mm}^4 \quad \text{Resp.}$$

*10.7 Momentos de inercia para un área con respecto a ejes inclinados

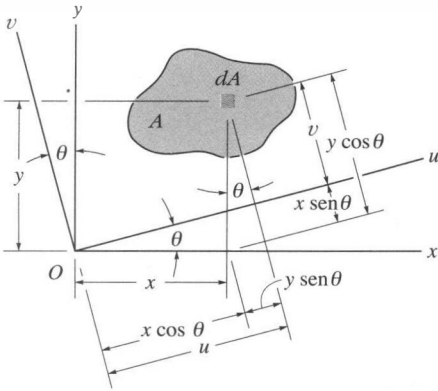


Fig. 10-17

En el diseño estructural y mecánico, a veces es necesario calcular los momentos y el producto de inercia I_u , I_v e I_{uv} para un área con respecto a un conjunto de ejes inclinados u y v cuando se *conocen* los valores de θ , I_x , I_y e I_{xy} . Para hacer esto usaremos las *ecuaciones de transformación* que relacionan las coordenadas x , y y u , v . A partir de la figura 10-17, estas ecuaciones son

$$u = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta$$

$$v = y \cos \theta - x \operatorname{sen} \theta$$

Usando estas ecuaciones, los momentos y el producto de inercia de dA con respecto a los ejes u y v son

$$dI_u = v^2 dA = (y \cos \theta - x \operatorname{sen} \theta)^2 dA$$

$$dI_v = u^2 dA = (x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta)^2 dA$$

$$dI_{uv} = uv dA = (x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta)(y \cos \theta - x \operatorname{sen} \theta) dA$$

Desarrollando cada expresión e integrando, puede advertirse que $I_x = \int y^2 dA$, $I_y = \int x^2 dA$, e $I_{xy} = \int xy dA$, obtenemos

$$I_u = I_x \cos^2 \theta + I_y \operatorname{sen}^2 \theta - 2I_{xy} \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

$$I_v = I_x \operatorname{sen}^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + 2I_{xy} \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

$$I_{uv} = I_x \operatorname{sen} \theta \cos \theta - I_y \operatorname{sen} \theta \cos \theta + I_{xy}(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)$$

Estas ecuaciones pueden ser simplificadas usando las identidades trigonométricas $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ y $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$, en cuyo caso

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \\ I_v &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \\ I_{uv} &= \frac{I_x - I_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (10-9)$$

Si se suman la primera y la segunda ecuaciones, es posible mostrar que el momento de inercia polar con respecto al eje z que pasa a través del punto O es *independiente* de la orientación de los ejes u y v , es decir,

$$J_O = I_u + I_v = I_x + I_y$$

Momentos de inercia principales. Las ecuaciones 10-9 muestran que I_u , I_v e I_{uv} dependen del ángulo de inclinación θ de los ejes u , v . Determinaremos ahora la orientación de esos ejes con respecto a los cuales los momentos de inercia del área, I_u e I_v , son máximo y mínimo. Este conjunto particular de ejes se llama *ejes principales* del área, y los correspondientes momentos de inercia con respecto a esos ejes son llamados *momentos de inercia principales*. En general, hay un conjunto de ejes prin-

principales para cada origen O elegido. Para realizar el diseño estructural y mecánico de un miembro, el origen O se ubica, generalmente, en el centroide del área de la sección transversal.

El ángulo $\theta = \theta_p$, que define la orientación de los ejes principales para el área, puede encontrarse diferenciando la primera de las ecuaciones 10-9 con respecto a θ y estableciendo el resultado igual a cero. Así

$$\frac{dI_u}{d\theta} = -2\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) \sin 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Por tanto, en $\theta = \theta_p$,

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2} \quad (10-10)$$

Esta ecuación tiene dos raíces, θ_{p1} y θ_{p2} , que están separadas en 90° y especifican la inclinación de los ejes principales. Para sustituirlos en la ecuación 10-9, debemos encontrar primero el seno y el coseno de $2\theta_{p1}$ y $2\theta_{p2}$. Esto puede hacerse usando los triángulos mostrados en la figura 10-18 que se basan en la ecuación 10-10.

Para θ_{p1} ,

$$\begin{aligned} \sin 2\theta_{p1} &= -I_{xy} / \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \\ \cos 2\theta_{p1} &= \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) / \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \end{aligned}$$

Para θ_{p2} ,

$$\begin{aligned} \sin 2\theta_{p2} &= I_{xy} / \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \\ \cos 2\theta_{p2} &= -\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) / \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \end{aligned}$$

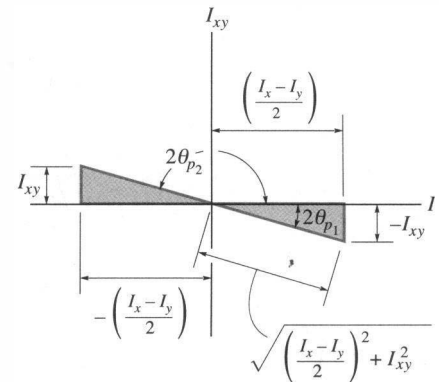


Fig. 10-18

Sustituyendo esos dos conjuntos de relaciones trigonométricas en la primera o la segunda de las ecuaciones 10-9, y simplificando, obtenemos

$$I_{\max/\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (10-11)$$

Dependiendo del signo elegido, este resultado proporciona el máximo o el mínimo momentos de inercia para el área. Además, si las relaciones trigonométricas anteriores para θ_{p1} y θ_{p2} son sustituidas en la tercera de las ecuaciones 10-9, se puede ver que $I_{uv} = 0$; es decir, el *producto de inercia con respecto a los ejes principales es cero*. Como en la sección 10.6 fue indicado que el producto de inercia es cero con respecto a cualquier eje simétrico, se infiere que *cualquier eje simétrico representa un eje principal de inercia para el área*.

EJEMPLO 10.9

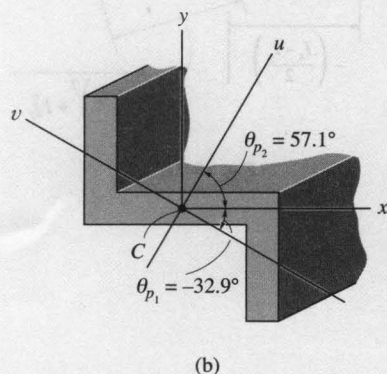
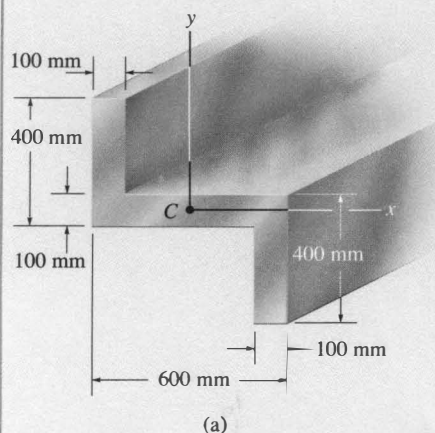


Fig. 10-19

Determine los momentos de inercia principales para el área de la sección transversal de la viga mostrada en la figura 10-19a con respecto a un eje que pase a través del centroide.

Solución

Los momentos y productos de inercia de la sección transversal con respecto a los ejes x, y fueron calculados en los ejemplos 10.6 y 10.8. Los resultados son

$$I_x = 2.90(10^9) \text{ mm}^4 \quad I_y = 5.60(10^9) \text{ mm}^4 \quad I_{xy} = -3.00(10^9) \text{ mm}^4$$

Usando la ecuación 10-10, los ángulos de inclinación de los ejes principales u y v son

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2} = \frac{3.00(10^9)}{[2.90(10^9) - 5.60(10^9)]/2} = -2.22$$

$$2\theta_{p_1} = -65.8^\circ \quad \text{y} \quad 2\theta_{p_2} = 114.2^\circ$$

Entonces, como se muestra en la figura 10-19b,

$$\theta_{p_1} = -32.9^\circ \quad \text{y} \quad \theta_{p_2} = 57.1^\circ$$

Los momentos de inercia principales con respecto a los ejes u y v son determinados con la ecuación 10-11. Por tanto,

$$I_{\max/\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$= \frac{2.90(10^9) + 5.60(10^9)}{2}$$

$$\pm \sqrt{\left[\frac{2.90(10^9) - 5.60(10^9)}{2}\right]^2 + [-3.00(10^9)]^2}$$

$$I_{\max/\min} = 4.25(10^9) \pm 3.29(10^9)$$

o

$$I_{\max} = 7.54(10^9) \text{ mm}^4 \quad I_{\min} = 0.960(10^9) \text{ mm}^4 \quad \text{Resp.}$$

Específicamente, el momento de inercia máximo, $I_{\max} = 7.54(10^9) \text{ mm}^4$, ocurre con respecto al eje u seleccionado ya que *por inspección* nos damos cuenta de que la mayor parte del área de la sección transversal está muy alejada de este eje. O, dicho de otra manera, I_{\max} ocurre con respecto al eje u ya que éste está ubicado dentro de $\pm 45^\circ$ del eje y , el cual tiene el mayor valor de I ($I_y > I_x$). Además, esto puede concluirse también sustituyendo los datos con $\theta = 57.1^\circ$ en la primera de las ecuaciones 10-9.

*10.8 Círculo de Mohr para momentos de inercia

Las ecuaciones 10-9, 10-10 y 10-11 tienen una solución gráfica que es, en general, fácil de usar y recordar. Elevando al cuadrado la primera y la tercera de las ecuaciones 10-9 y sumándolas, encontramos que

$$\left(I_u - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{uv}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2 \quad (10-12)$$

En un problema dado, I_u e I_{uv} son *variables*, e I_x , I_y e I_{xy} son *constantes conocidas*. Así, la ecuación 10-12 puede ser escrita en forma compacta como

$$(I_u - a)^2 + I_{uv}^2 = R^2$$

Cuando esta ecuación es graficada sobre un par de ejes que representan los respectivos momento de inercia y producto de inercia, figura 10-20, la gráfica resultante representa un *círculo* de radio

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

con su centro ubicado en el punto $(a, 0)$, donde $a = (I_x + I_y)/2$. El círculo así construido se llama *círculo de Mohr*, en honor del ingeniero alemán Otto Mohr (1835-1918).

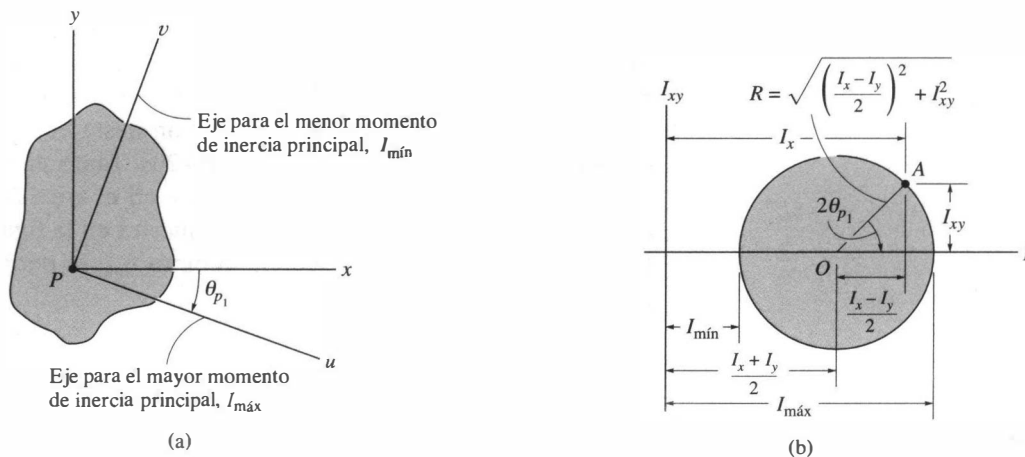


Fig. 10-20

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El principal propósito de usar aquí el círculo de Mohr es tener un medio conveniente para transformar I_x , I_y e I_{xy} en los momentos de inercia principales. El siguiente procedimiento proporciona un método adecuado para lograrlo.

Determine I_x , I_y e I_{xy} .

- Establezca los ejes x , y para el área, con el origen ubicado en el punto P de interés, y determine I_x , I_y e I_{xy} , figura 10-20a.

Construya el círculo.

- Construya un sistema coordenado rectangular tal que la abscisa represente el momento de inercia I y la ordenada represente el producto de inercia I_{xy} , figura 10-20b.
- Determine el centro O del círculo que está localizado a una distancia $(I_x + I_y)/2$ del origen, y marque el punto A de referencia con coordenadas (I_x, I_{xy}) . Por definición, I_x es siempre positivo, mientras que I_{xy} puede ser positivo o negativo.
- Conecte el punto de referencia A con el centro del círculo y determine la distancia OA por trigonometría. Esta distancia representa el radio del círculo, figura 10-20b. Finalmente, trace el círculo.

Momentos de inercia principales.

- Los puntos donde el círculo interseca las abscisas dan los valores de los momentos de inercia principales I_{\min} e I_{\max} . Observe que el producto de inercia será cero en esos puntos, figura 10-20b.

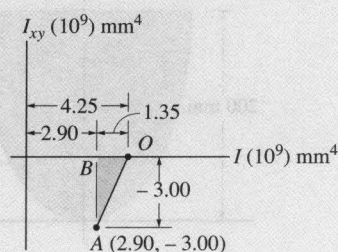
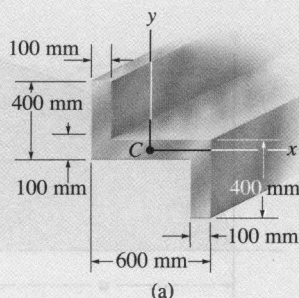
Ejes principales.

- Para encontrar la dirección del eje principal mayor, determine por trigonometría el ángulo $2\theta_{p_1}$, medido desde el radio OA hasta el eje I positivo, figura 10-20b. Este ángulo representa el doble del ángulo desde el eje x del área en cuestión hasta el eje de máximo momento de inercia I_{\max} , figura 10-20a. Tanto el ángulo sobre el círculo, $2\theta_{p_1}$, como el ángulo al eje en el área, $2\theta_{p_1}$, deben medirse en el mismo sentido, como se muestra en la figura 10-20. El eje para el momento de inercia mínimo I_{\min} es perpendicular al eje para I_{\max} .

Usando trigonometría, puede verificarse que el procedimiento anterior está de acuerdo con las ecuaciones desarrolladas en la sección 10.7.

EJEMPLO 10.10

Usando el círculo de Mohr, determine los momentos de inercia principales para el área de la sección transversal de la viga mostrada en la figura 10–21a, con respecto a un eje que pase a través del centroide.



Solución

Determine I_x , I_y e I_{xy} . El momento de inercia y el producto de inercia han sido determinados en los ejemplos 10.6 y 10.8 con respecto a los ejes x , y mostrados en la figura 10–21a. Los resultados son $I_x = 2.90(10^9) \text{ mm}^4$, $I_y = 5.60(10^9) \text{ mm}^4$, e $I_{xy} = -3.00(10^9) \text{ mm}^4$.

Construcción del círculo. Los ejes I e I_{xy} se muestran en la figura 10–21b. El centro del círculo O se encuentra a una distancia $(I_x + I_y)/2 = (2.90 + 5.60)/2 = 4.25$ del origen. Cuando el punto de referencia $A(2.90, -3.00)$ es conectado al punto O , el radio OA se determina en el triángulo OBA usando el teorema de Pitágoras.

$$OA = \sqrt{(1.35)^2 + (-3.00)^2} = 3.29$$

El círculo está construido en la figura 10–21c.

Momentos de inercia principales. El círculo interseca al eje I en los puntos $(7.54, 0)$ y $(0.960, 0)$. Por tanto,

$$I_{\text{máx}} = 7.54(10^9) \text{ mm}^4$$

Resp.

$$I_{\text{mín}} = 0.960(10^9) \text{ mm}^4$$

Resp.

Ejes principales. Como se muestra en la figura 10–21c, el ángulo $2\theta_{p_1}$ es determinado en el círculo midiendo en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde OA hacia la dirección del eje I positivo. Por consiguiente,

$$2\theta_{p_1} = 180^\circ - \sin^{-1}\left(\frac{|BA|}{|OA|}\right) = 180^\circ - \sin^{-1}\left(\frac{3.00}{3.29}\right) = 114.2^\circ$$

El eje principal para $I_{\text{máx}} = 7.54(10^9) \text{ mm}^4$ está, por tanto, orientado a un ángulo $\theta_{p_1} = 57.1^\circ$, medido en *sentido contrario al de las manecillas del reloj*, desde el eje x positivo hacia el eje u positivo. El eje v es perpendicular a este eje. Los resultados se muestran en la figura 10–21d.

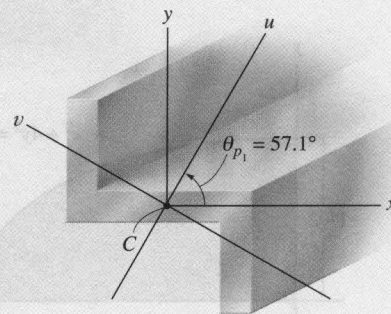
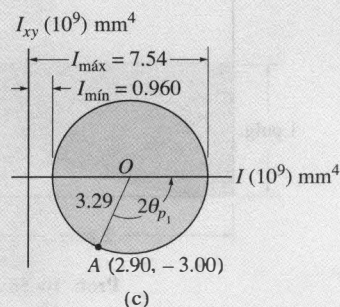
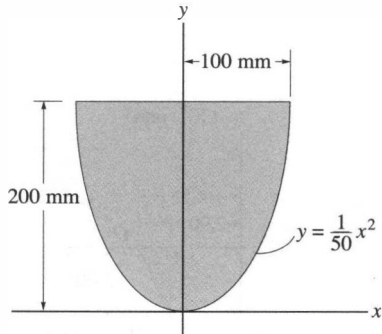


Fig. 10–21

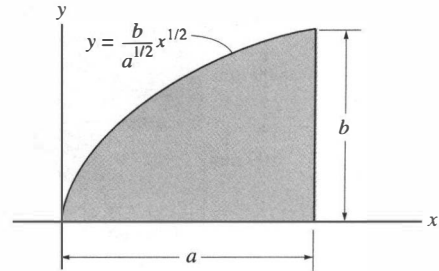
PROBLEMAS

10-54. Determine el producto de inercia de la porción sombreada de la parábola con respecto a los ejes x y y .



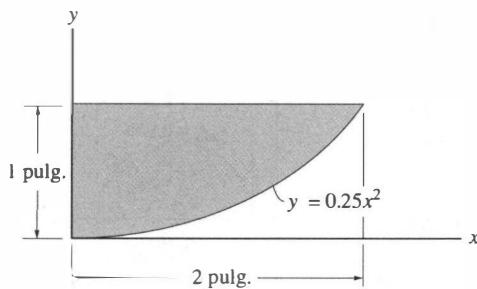
Prob. 10-54

10-57. Determine el producto de inercia del área parabólica con respecto a los ejes x y y .



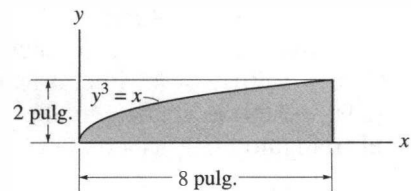
Prob. 10-57

10-55. Determine el producto de inercia del área sombreada con respecto a los ejes x y y .



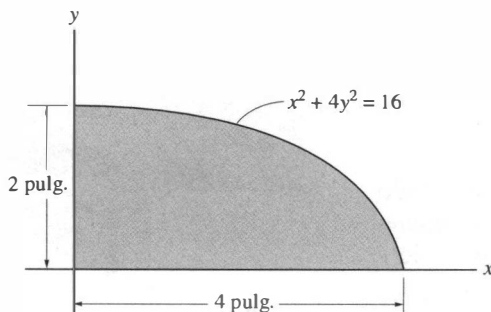
Prob. 10-55

10-58. Determine el producto de inercia del área sombreada con respecto a los ejes x y y .



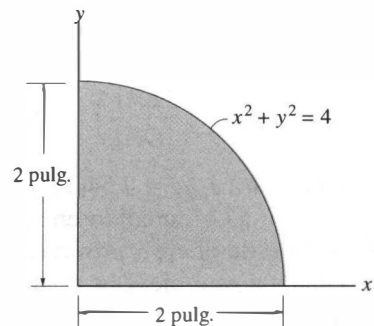
Prob. 10-58

***10-56.** Determine el producto de inercia del área sombreada de la elipse con respecto a los ejes x y y .



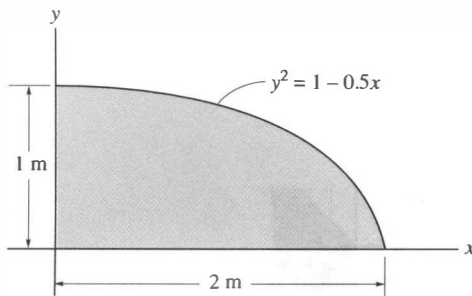
Prob. 10-56

10-59. Determine el producto de inercia del área sombreada con respecto a los ejes x y y .



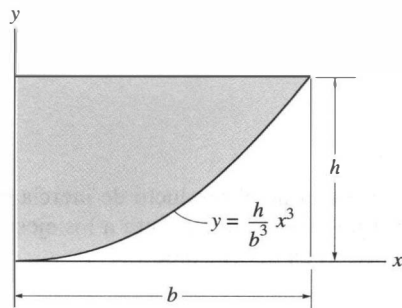
Prob. 10-59

*10-60. Determine el producto de inercia del área sombreada con respecto a los ejes x y y .



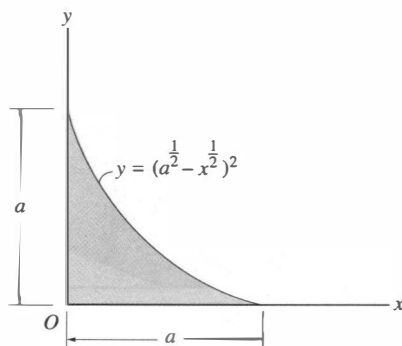
Prob. 10-60

10-61. Determine el producto de inercia del área sombreada con respecto a los ejes x y y .



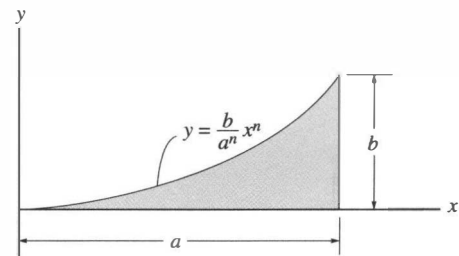
Prob. 10-61

10-62. Determine el producto de inercia del área sombreada con respecto a los ejes x y y .



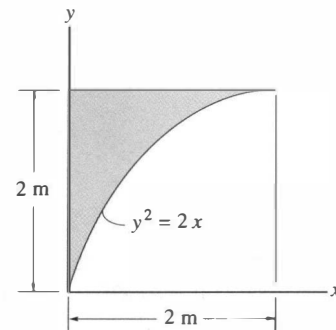
Prob. 10-62

10-63. Determine el producto de inercia del área sombreada con respecto a los ejes x y y .



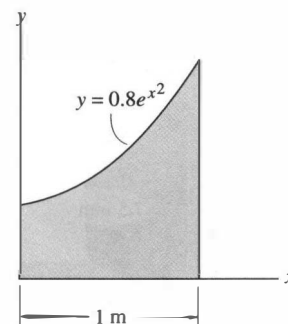
Prob. 10-63

*10-64. Determine el producto de inercia del área sombreada con respecto a los ejes x y y .



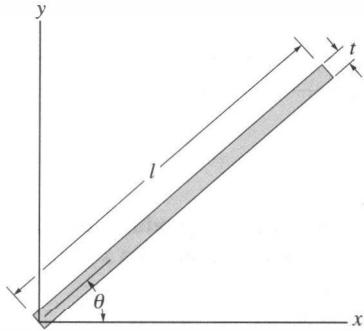
Prob. 10-64

■10-65. Determine el producto de inercia del área sombreada con respecto a los ejes x y y . Use la regla de Simpson para evaluar la integral.



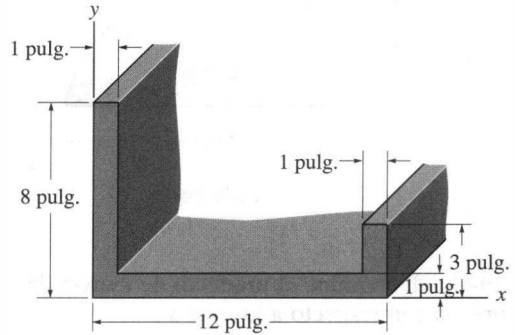
Prob. 10-65

10-66. Determine el producto de inercia del área de la franja delgada con respecto a los ejes x y y . La franja está orientada a un ángulo θ desde el eje x . Suponga que $t \ll l$.



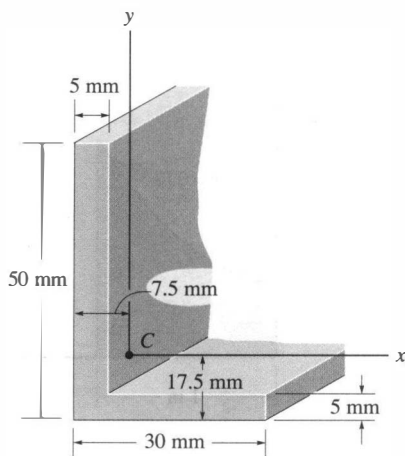
Prob. 10-66

*10-68. Determine el producto de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto a los ejes x y y .



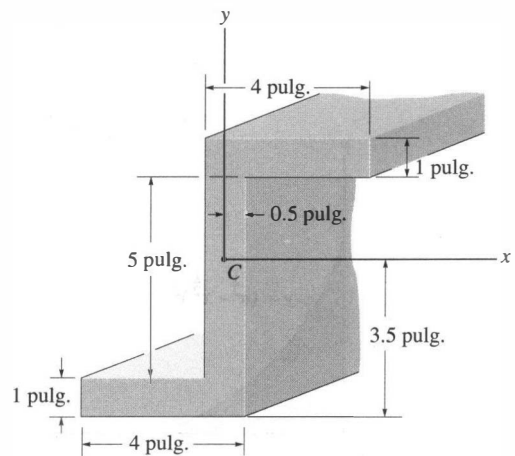
Prob. 10-68

10-67. Determine el producto de inercia del área de la sección transversal con respecto a los ejes x y y que tienen su origen en el centroide C .



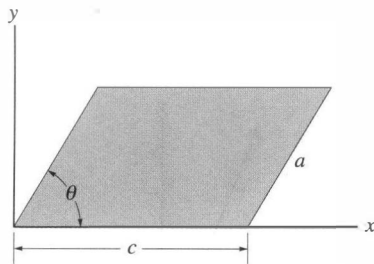
Prob. 10-67

10-69. Determine el producto de inercia del área de la sección transversal con respecto a los ejes x y y que tienen su origen en el centroide C .



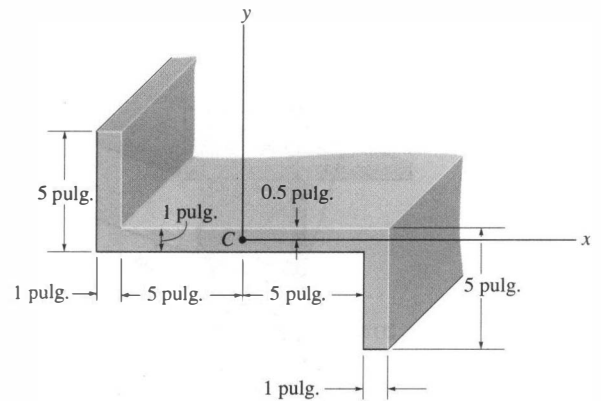
Prob. 10-69

10-70. Determine el producto de inercia del paralelogramo con respecto a los ejes x y y .



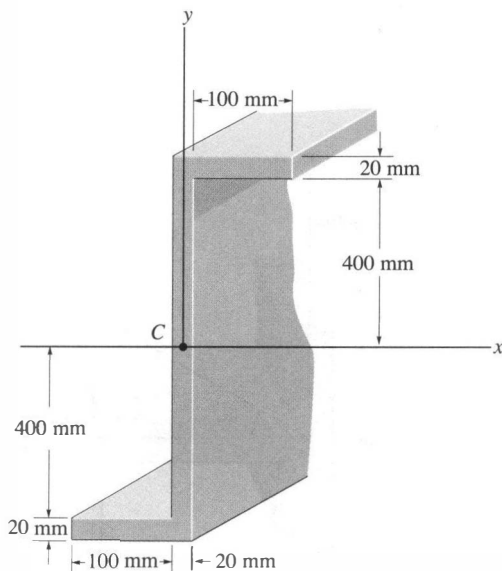
Prob. 10-70

*10-72. Determine el producto de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto a los ejes x y y que tienen su origen en el centroide C .



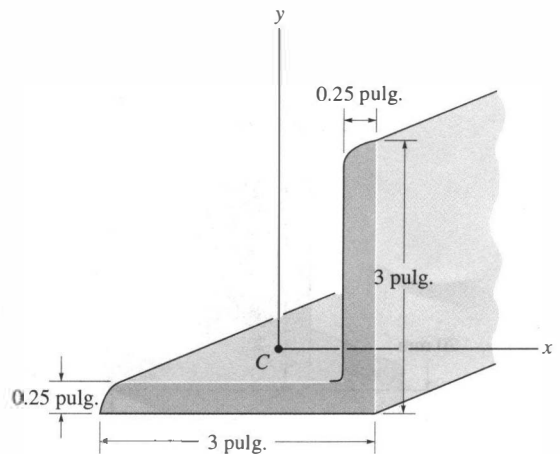
Prob. 10-72

10-71. Determine el producto de inercia del área de la sección transversal con respecto a los ejes x y y .



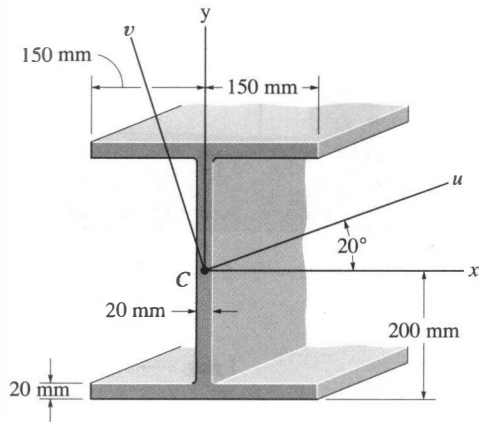
Prob. 10-71

10-73. Determine el producto de inercia del ángulo con respecto a los ejes x y y que pasan a través del centroide C . Suponga que todas las esquinas están a escuadra.



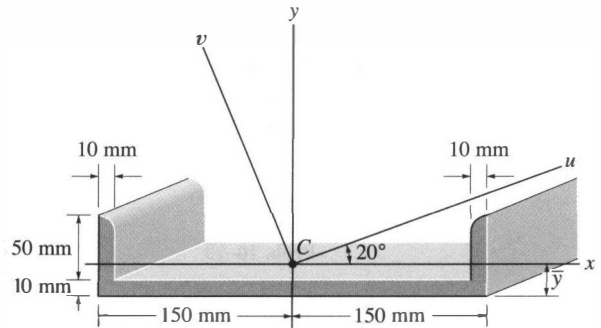
Prob. 10-73

10-74. Determine el producto de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto a los ejes u y v .



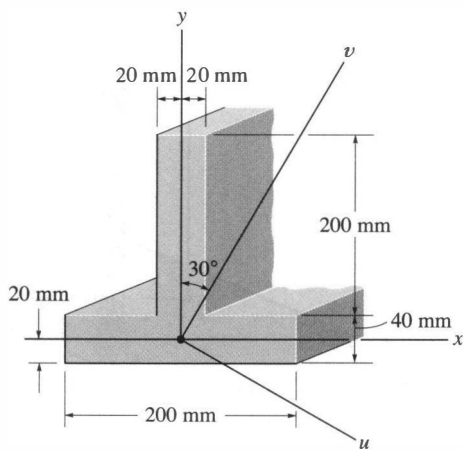
Prob. 10-74

*10-76. Determine la distancia \bar{y} al centroide del área y luego calcule los momentos de inercia I_u e I_v del área de la sección transversal de la canaleta. Los ejes u y v tienen su origen en el centroide C . Para los cálculos, suponga que todas las esquinas están a escuadra.



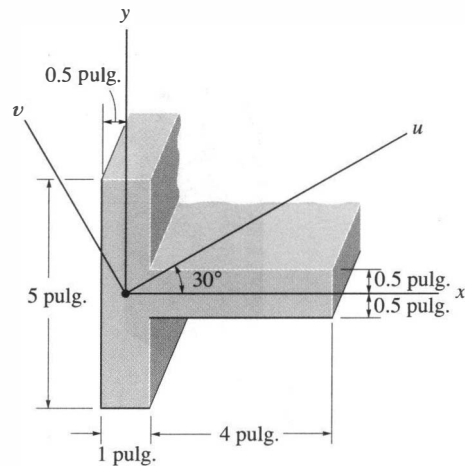
Prob. 10-76

10-75. Determine los momentos de inercia I_u e I_v del área de la sección transversal.



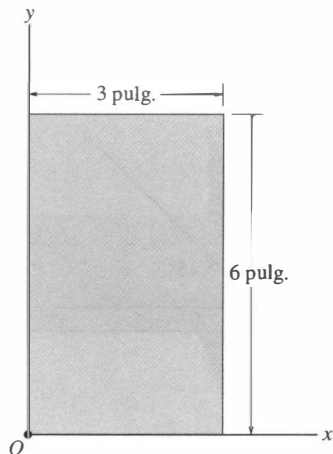
Prob. 10-75

10-77. Determine los momentos de inercia del área sombreada con respecto a los ejes u y v .



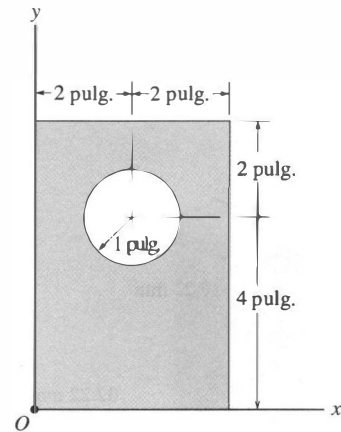
Prob. 10-77

10-78. Determine las direcciones de los ejes principales con origen en el punto O , y los momentos de inercia principales del área rectangular con respecto a esos ejes.



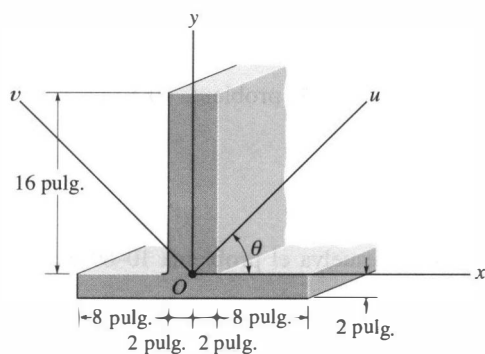
Prob. 10-78

*10-80. Determine las direcciones de los ejes principales con origen en el punto O , y los momentos de inercia principales del área con respecto a esos ejes.



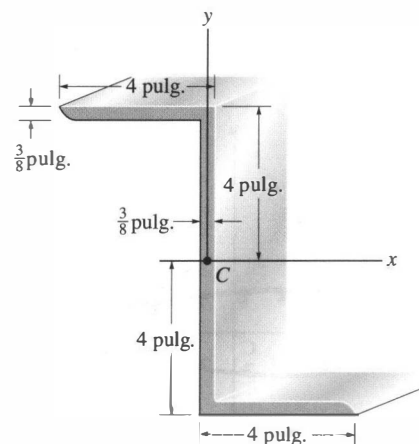
Prob. 10-80

10-79. Determine los momentos de inercia I_u, I_v y el producto de inercia I_{uv} del área de la sección transversal de la viga. Considere $\theta = 45^\circ$.



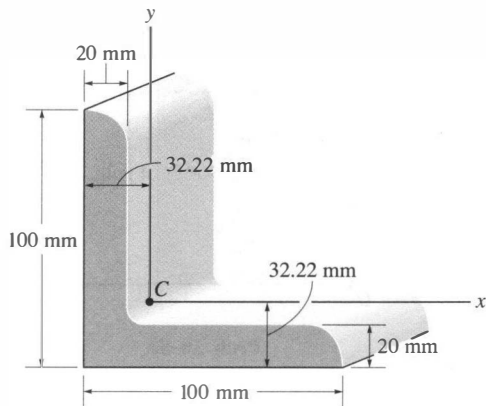
Prob. 10-79

10-81. Determine los momentos de inercia principales del área de la sección transversal de la viga con respecto a los ejes principales que tienen su origen en el centroide C . Use las ecuaciones desarrolladas en la sección 10.7. Para el cálculo, suponga que todas las esquinas están a escuadra.



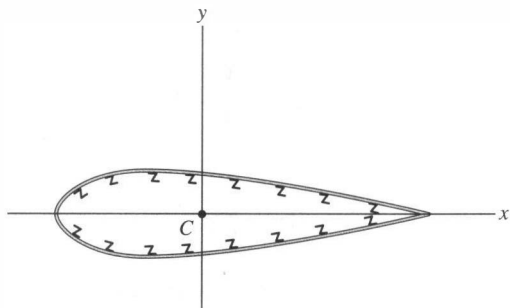
Prob. 10-81

10-82. Determine los momentos de inercia principales para el área de la sección transversal del ángulo con respecto a un conjunto de ejes principales que tienen su origen en el centroide C . Use la ecuación desarrollada en la sección 10.7. Para el cálculo, suponga que todas las esquinas están a escuadra.



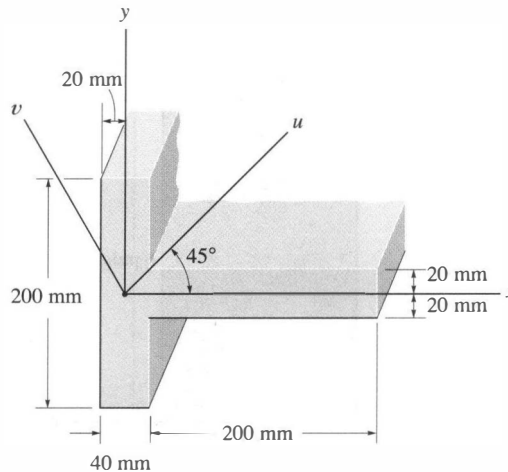
Prob. 10-82

10-83. El área de la sección transversal de un ala de avión tiene las siguientes propiedades con respecto a los ejes x y y que pasan a través del centroide C : $\bar{I}_x = 450 \text{ pulg}^4$, $\bar{I}_y = 1730 \text{ pulg}^4$, $\bar{I}_{xy} = 138 \text{ pulg}^4$. Determine la orientación de los ejes principales y los momentos de inercia principales.



Prob. 10-83

***10-84.** Determine los momentos de inercia I_u e I_v del área sombreada.



Prob. 10-84

10-85. Resuelva el problema 10-78 usando el círculo de Mohr.

10-86. Resuelva el problema 10-81 usando el círculo de Mohr.

10-87. Resuelva el problema 10-82 usando el círculo de Mohr.

***10-88.** Resuelva el problema 10-80 usando el círculo de Mohr.

10-89. Resuelva el problema 10-83 usando el círculo de Mohr.

10.9 Momentos de inercia de masa

El momento de inercia de masa de un cuerpo es una propiedad que mide la resistencia del cuerpo a la aceleración angular. Como este momento se usa en dinámica para estudiar el movimiento rotatorio, los métodos para efectuar su cálculo serán analizados a continuación.

Definimos el *momento de inercia de masa* como la integral del “segundo momento” con respecto a un eje de todos los elementos de masa dm que componen el cuerpo.* Por ejemplo, considere el cuerpo rígido mostrado en la figura 10–22; su momento de inercia con respecto al eje z es

$$I = \int_m r^2 dm \quad (10-13)$$

Aquí, el “brazo de momento” r es la distancia perpendicular desde el eje hasta el elemento arbitrario dm . Como la formulación implica a r , el valor de I es *único* para cada eje z con respecto al cual es calculado. Sin embargo, generalmente, el eje que es seleccionado para el análisis pasa por el centro de masa G del cuerpo. El momento de inercia calculado con respecto a este eje será definido como I_G . Observe que, como r está elevado al cuadrado en la ecuación 10–13, el momento de inercia de masa es siempre una *cantidad positiva*. Las unidades comunes usadas para su medida son $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ o $\text{slug} \cdot \text{pie}^2$.

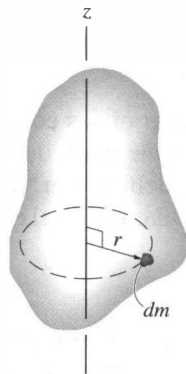


Fig. 10–22

*Otra propiedad del cuerpo que mide la simetría de la masa del cuerpo con respecto a un sistema coordenado es el producto de inercia de masa. Esta propiedad se aplica a menudo al movimiento tridimensional de un cuerpo y es analizada en *Engineering Mechanics: Dynamics* (Capítulo 21).

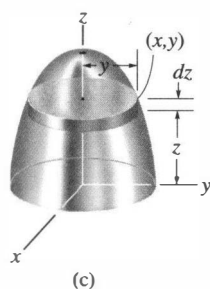
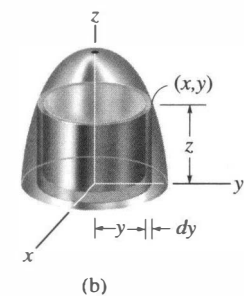
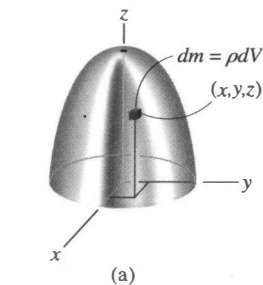


Fig. 10-23

Si el cuerpo consiste de material con densidad variable, $\rho = \rho(x, y, z)$, la masa elemental dm del cuerpo puede ser expresada en términos de su densidad y volumen como $dm = \rho dV$. Sustituyendo dm en la ecuación 10-13, el momento de inercia del cuerpo es calculado entonces usando *elementos de volumen* para la integración, es decir,

$$I = \int_V r^2 \rho dV \quad (10-14)$$

En el caso especial donde ρ es una *constante*, este término puede ser factorizado fuera de la integral, y la integración es entonces meramente una función de la geometría:

$$I = \rho \int_V r^2 dV \quad (10-15)$$

Cuando el volumen elemental elegido para la integración tiene tamaños diferentes en las tres direcciones, por ejemplo, $dV = dx dy dz$, figura 10-23a, el momento de inercia del cuerpo debe ser determinado usando “integración triple”. Sin embargo, el proceso de integración puede ser reducido a una *integración simple* siempre que el volumen elemental elegido tenga un tamaño diferencial o espesor en sólo *una dirección*. Los elementos de cascarón o de disco a menudo son usados para este fin.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Para la integración, consideraremos sólo cuerpos simétricos que tengan superficies generadas al girar una curva con respecto a un eje. Ejemplo de un cuerpo con tales características y que es generado con respecto al eje z se muestra en la figura 10-23.

Elemento cascarón

- Si un *elemento cascarón* con altura z , radio y y espesor dy se elige para la integración, figura 10-23b, entonces el volumen $dV = (2\pi y)(z) dy$.
- Este elemento se puede usar en las ecuaciones 10-14 o 10-15 para determinar el momento de inercia I_z del cuerpo con respecto al eje z ya que todo el elemento, debido a su “delgadez”, se encuentra a la *misma* distancia perpendicular $r = y$ del eje z (vea el Ejemplo 10.11).

Elemento de disco

- Si un elemento de disco, con radio y y espesor dz , se elige para la integración, figura 10-23c, entonces el volumen $dV = (\pi y^2) dz$.
- En este caso el elemento es *finito* en la dirección radial, y en consecuencia *no* todas sus partes se encuentran a la *misma* distancia radial r del eje z . Por esto, las ecuaciones 10-14 o 10-15 *no se pueden* usar para determinar I_z . En vez de efectuar la integración usando este elemento, primero es necesario determinar el momento de inercia *del elemento* con respecto al eje z y luego integrar este resultado (vea el Ejemplo 10.12).

EJEMPLO 10.11

Determine el momento de inercia de masa del cilindro mostrado en la figura 10-24a con respecto al eje z . La densidad ρ del material es constante.

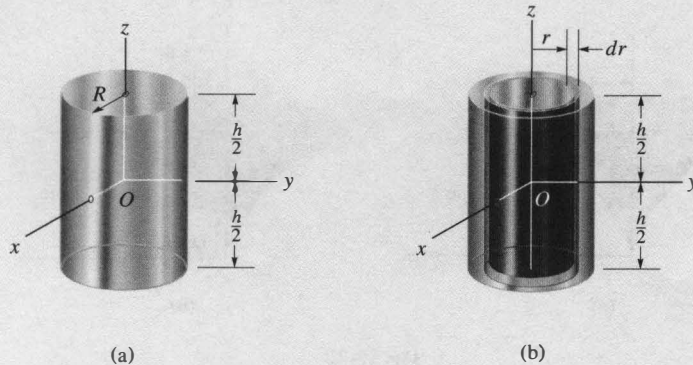


Fig. 10-24

Solución

Elemento cascarón. Este problema puede ser resuelto usando el *elemento cascarón* que muestra la figura 10-24b e integración simple. El volumen del elemento es $dV = (2\pi r)(h) dr$, de modo que su masa es $dm = \rho dV = \rho(2\pi hr dr)$. Como *todo el elemento* se encuentra a la misma distancia r del eje z , el momento de inercia *del elemento* es

$$dI_z = r^2 dm = \rho 2\pi h r^3 dr$$

Al integrar en toda la región del cilindro resulta

$$I_z = \int_m r^2 dm = \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr = \frac{\rho\pi}{2} R^4 h$$

La masa del cilindro es

$$m = \int_m dm = \rho 2\pi h \int_0^R r dr = \rho\pi h R^2$$

por lo que

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2 \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 10.12

Un sólido es generado al girar el área sombreada que muestra la figura 10-25a con respecto al eje y . Si la densidad del material es de 5 slug/pie^3 , determine el momento de inercia de masa con respecto al eje y .

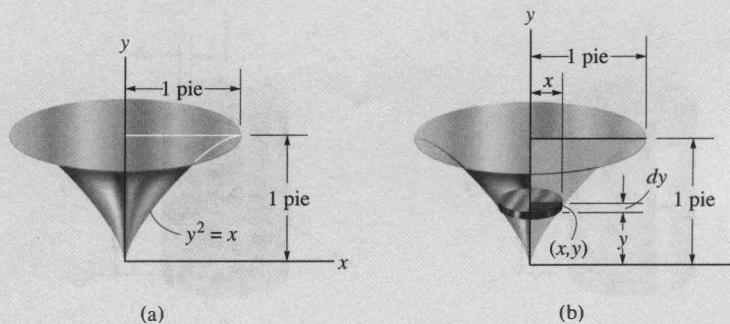


Fig. 10-25

Solución

Elemento de disco. El momento de inercia será determinado usando un *elemento de disco*, como se muestra en la figura 10-25b. Aquí, el elemento interseca la curva en el punto arbitrario (x, y) y tiene una masa

$$dm = \rho dV = \rho(\pi x^2) dy$$

Aunque todas las porciones del elemento *no* están ubicadas a la misma distancia del eje y , es posible determinar el momento de inercia dI_y del elemento con respecto al eje y . En el ejemplo 10.11 se mostró que el momento de inercia de un cilindro con respecto a su eje longitudinal es $I = \frac{1}{2}mR^2$, donde m y R son la masa y el radio del cilindro. Como la altura del cilindro no está implicada en esta fórmula, también la podemos usar para un disco. Así, para el elemento de disco que se muestra en la figura 10-25b, tenemos

$$dI_y = \frac{1}{2}(dm)x^2 = \frac{1}{2}[\rho(\pi x^2) dy]x^2$$

Sustituyendo $x = y^2$, $\rho = 5 \text{ slug/pie}^3$, e integrando con respecto a y , desde $y = 0$ hasta $y = 1 \text{ pie}$, obtenemos el momento de inercia para todo el sólido:

$$I_y = \frac{5\pi}{2} \int_0^1 x^4 dy = \frac{5\pi}{2} \int_0^1 y^8 dy = 0.873 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2 \quad \text{Resp.}$$

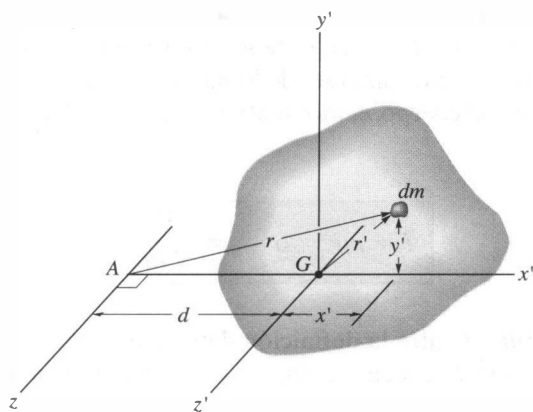


Fig. 10-26

Teorema de los ejes paralelos. Si se conoce el momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje que pase por el centro de masa del cuerpo, entonces el momento de inercia con respecto a cualquier otro *eje paralelo* puede ser determinado usando el *teorema de los ejes paralelos*. Este teorema puede derivarse considerando el cuerpo mostrado en la figura 10-26. El eje z' pasa por el centro de masa G , mientras que el correspondiente *eje z paralelo* se encuentra a una distancia constante d . Seleccionando el elemento diferencial de masa dm que se localiza en el punto (x', y') y usando el teorema de Pitágoras, $r^2 = (d + x')^2 + y'^2$, podemos expresar el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje z como

$$\begin{aligned} I &= \int_m r^2 dm = \int_m [(d + x')^2 + y'^2] dm \\ &= \int_m (x'^2 + y'^2) dm + 2d \int_m x' dm + d^2 \int_m dm \end{aligned}$$

En vista de que $r'^2 = x'^2 + y'^2$, la primera integral representa a I_G . La segunda integral es igual a *cero*, ya que el eje z' pasa por el centro de masa del cuerpo, es decir, $\int x' dm = \bar{x} \int dm = 0$ ya que $\bar{x} = 0$. Finalmente, la tercera integral representa la masa total m del cuerpo. Por consiguiente, el momento de inercia con respecto al eje z puede escribirse como

$$I = I_G + md^2 \quad (10-16)$$

donde

I_G = momento de inercia con respecto al eje z' que pasa por el centro de masa G

m = masa del cuerpo

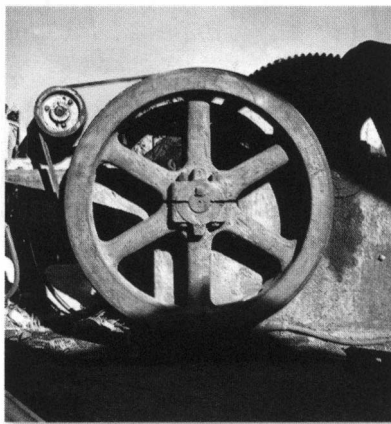
d = distancia perpendicular entre los ejes paralelos

Radio de giro. En ocasiones, el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje específico es reportado en los manuales usando el *radio de giro* k . Este valor tiene unidades de longitud, y cuando es conocido junto con la masa m del cuerpo, el momento de inercia se determina mediante la ecuación

$$I = mk^2 \quad \text{o} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (10-17)$$

Observe la *similitud* entre la definición de k en esta fórmula y la de r en la ecuación $dI = r^2 dm$, la cual define el momento de inercia de una masa elemental dm del cuerpo con respecto a un eje.

Cuerpos compuestos. Si un cuerpo está construido a partir de varias formas simples como discos, esferas y barras, el momento de inercia de ese cuerpo con respecto a cualquier eje z puede ser determinado sumando algebraicamente los momentos de inercia de todas las formas componentes calculados con respecto al eje z . La suma algebraica es necesaria ya que una parte componente debe ser considerada como una cantidad negativa si ya ha sido incluida dentro de otra parte; por ejemplo, un “agujero” sustraído de una placa sólida. El teorema de los ejes paralelos es necesario para los cálculos si el centro de masa de cada parte componente no se encuentra sobre el eje z . Entonces, para el cálculo, $I = \Sigma(I_G + md^2)$, donde I_G para cada una de las partes componentes se calcula por integración o puede ser determinado con ayuda de una tabla, como la dada en la cubierta posterior interna de este libro.



Este volante, que opera un cortador de metal, tiene un gran momento de inercia con respecto a su centro. Una vez que empieza a girar es difícil detenerlo, y por tanto, un movimiento uniforme puede ser transferido efectivamente a la hoja cortadora.

EJEMPLO 10.13

Si la placa mostrada en la figura 10–27a tiene densidad de 8000 kg/m^3 y espesor de 10 mm , determine su momento de inercia de masa con respecto a un eje dirigido perpendicularmente a la página y que pase por el punto O .

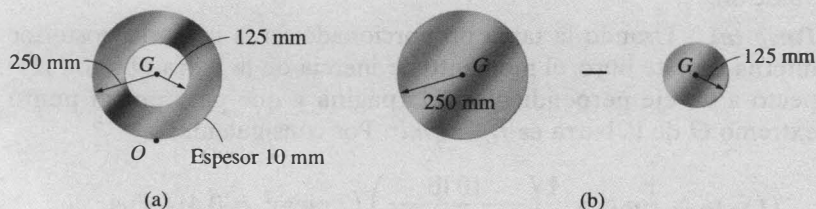


Fig. 10–27

Solución

La placa consiste en dos partes compuestas, el disco de 250 mm de radio *menos* un disco de 125 mm de radio, figura 10–27b. El momento de inercia con respecto a O puede ser determinado calculando el momento de inercia de cada una de esas partes con respecto a O , y sumando luego *algebraicamente* los resultados. Los cálculos son efectuados usando el teorema de los ejes paralelos junto con los datos dados en la cubierta posterior interna de este libro.

Disco. El momento de inercia de un disco con respecto a un eje perpendicular al plano del disco es $I_G = \frac{1}{2}mr^2$. El centro de masa del disco está a una distancia de 0.25 m del punto O . Entonces,

$$\begin{aligned} m_d &= \rho_d V_d = 8000 \text{ kg/m}^3 [\pi (0.25 \text{ m})^2 (0.01 \text{ m})] = 15.71 \text{ kg} \\ (I_O)_d &= \frac{1}{2} m_d r_d^2 + m_d d^2 \\ &= \frac{1}{2} (15.71 \text{ kg}) (0.25 \text{ m})^2 + (15.71 \text{ kg}) (0.25 \text{ m})^2 \\ &= 1.473 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

Agujero. Para el disco (agujero) de 125 mm de radio, tenemos

$$\begin{aligned} m_h &= \rho_h V_h = 8000 \text{ kg/m}^3 [\pi (0.125 \text{ m})^2 (0.01 \text{ m})] = 3.93 \text{ kg} \\ (I_O)_h &= \frac{1}{2} m_h r_h^2 + m_h d^2 \\ &= \frac{1}{2} (3.93 \text{ kg}) (0.125 \text{ m})^2 + (3.93 \text{ kg}) (0.25 \text{ m})^2 \\ &= 0.276 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

El momento de inercia de la placa con respecto al punto O es entonces

$$\begin{aligned} I_O &= (I_O)_d - (I_O)_h \\ &= 1.473 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 - 0.276 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ &= 1.20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

Resp.

EJEMPLO 10.14

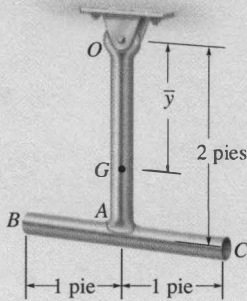


Fig. 10-28

El péndulo que aparece en la figura 10-28 consiste en dos barras delgadas con peso de 10 lb. Determine el momento de inercia de masa del péndulo con respecto a un eje que pase por (a) el pasador en O , y (b) el centro de masa G del péndulo.

Solución

Parte (a). Usando la tabla proporcionada en la cubierta posterior interna de este libro, el momento de inercia de la barra OA con respecto a un eje perpendicular a la página y que pasa por el punto extremo O de la barra es $I_O = \frac{1}{3}ml^2$. Por consiguiente,

$$(I_{OA})_O = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{10 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2} \right) (2 \text{ pies})^2 = 0.414 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

El mismo valor puede ser calculado usando $I_G = \frac{1}{12}ml^2$ y el teorema de los ejes paralelos, esto es,

$$\begin{aligned} (I_{OA})_O &= \frac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{10 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2} \right) (2 \text{ pies})^2 + \frac{10 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2} (1 \text{ pies})^2 \\ &= 0.414 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2 \end{aligned}$$

Para la barra BC tenemos

$$\begin{aligned} (I_{BC})_O &= \frac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{10 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2} \right) (2 \text{ pies})^2 + \frac{10 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2} (2 \text{ pies})^2 \\ &= 1.346 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2 \end{aligned}$$

El momento de inercia del péndulo con respecto a O es, por tanto,

$$I_O = 0.414 + 1.346 = 1.76 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2 \quad \text{Resp.}$$

Parte (b). El centro de masa G será localizado con respecto al pasador situado en O . Suponiendo que esta distancia es \bar{y} , figura 10-28, y usando la fórmula para determinar el centro de masa, tenemos

$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}m}{\sum m} = \frac{1(10/32.2) + 2(10/32.2)}{(10/32.2) + (10/32.2)} = 1.50 \text{ pies}$$

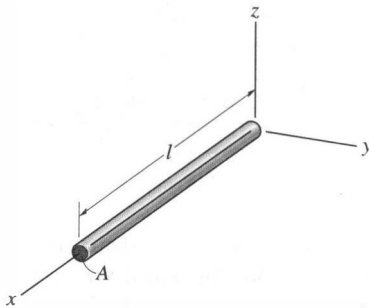
El momento de inercia I_G puede ser calculado de la misma manera que I_O , lo cual requiere aplicaciones sucesivas del teorema de los ejes paralelos para transferir los momentos de inercia de las barras OA y BC a G . Sin embargo, una solución más directa implica aplicar el teorema de los ejes paralelos usando el resultado para I_O determinado líneas arriba; esto es,

$$I_O = I_G + md^2; \quad 1.76 \text{ slug} \cdot \text{pies}^2 = I_G + \left(\frac{20 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2} \right) (1.50 \text{ pie})^2$$

$$I_G = 0.362 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2 \quad \text{Resp.}$$

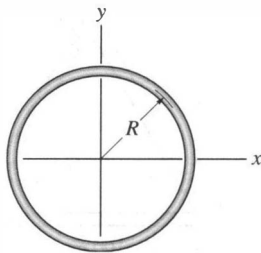
PROBLEMAS

10-90. Determine el momento de inercia I_y para la barra esbelta. La densidad ρ de la barra y el área A de su sección transversal son constantes. Expresé el resultado en términos de la masa total m de la barra.



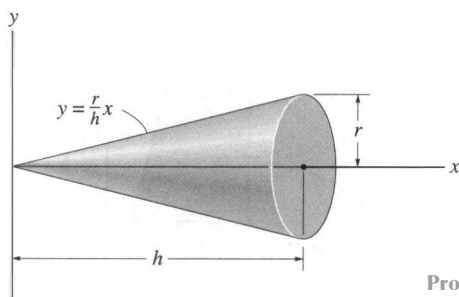
Prob. 10-90

10-91. Determine el momento de inercia del anillo delgado con respecto al eje z . El anillo tiene masa m .



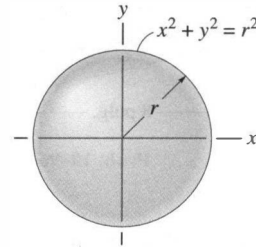
Prob. 10-91

*10-92. Determine el momento de inercia I_x del cono circular recto y exprese el resultado en términos de la masa total m del cono. El cono tiene densidad constante ρ .



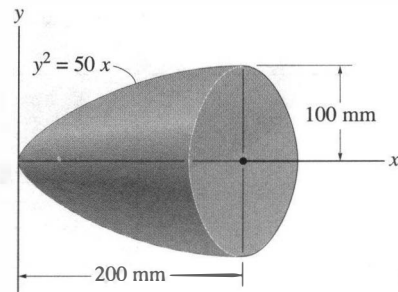
Prob. 10-92

10-93. Determine el momento de inercia I_x de la esfera y exprese el resultado en términos de la masa total m de la esfera. La esfera tiene densidad ρ constante.



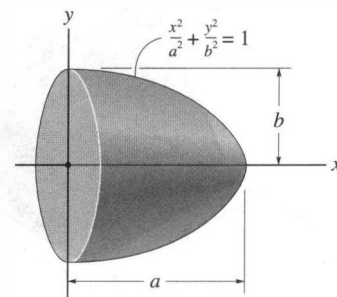
Prob. 10-93

10-94. Determine el radio de giro k_x del paraboloides. La densidad del material es $\rho = 5 \text{ Mg/m}^3$.



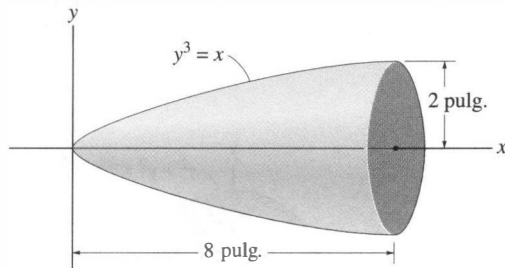
Prob. 10-94

10-95. Determine el momento de inercia del semielipsoide con respecto al eje x y exprese el resultado en términos de la masa m del semielipsoide. El material tiene densidad ρ constante.



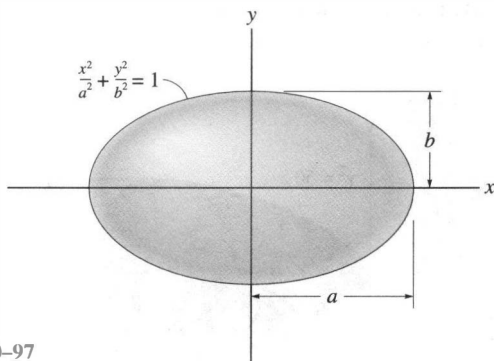
Prob. 10-95

*10-96. Determine el radio de giro k_x del cuerpo. El peso específico del material es $\gamma = 380 \text{ lb/pie}^3$.



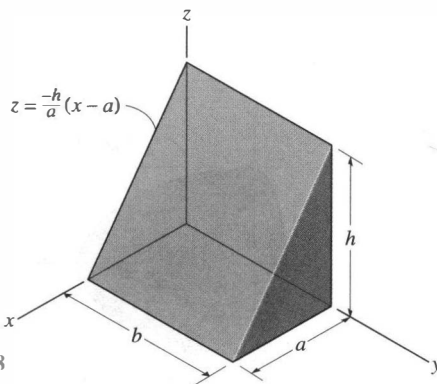
Prob. 10-96

10-97. Determine el momento de inercia del elipsoide con respecto al eje x y exprese el resultado en términos de la masa m del elipsoide. El material tiene densidad ρ constante.



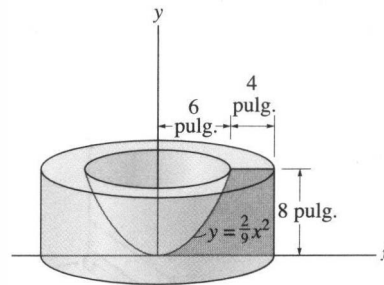
Prob. 10-97

10-98. Determine el momento de inercia del prisma triangular homogéneo con respecto al eje y . Exprese el resultado en términos de la masa m del prisma. *Sugerencia:* Para la integración, use elementos de placa delgada con espesor dz y paralelos al plano $x-y$.



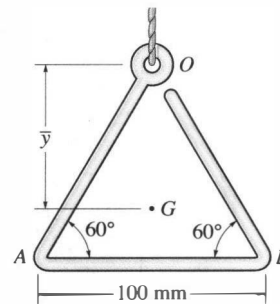
Prob. 10-98

10-99. El perfil de concreto es formado al girar el área sombreada con respecto al eje y . Determine el momento de inercia I_y . El peso específico del concreto es $\gamma = 150 \text{ lb/pie}^3$.



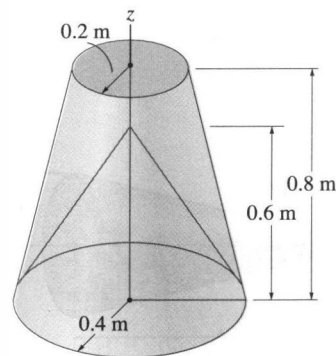
Prob. 10-99

*10-100. Determine el momento de inercia del triángulo de alambre con respecto a un eje perpendicular a la página que pase por el punto O . Localice también el centro de masa G y determine el momento de inercia con respecto a un eje perpendicular a la página que pase por el punto G . El alambre tiene masa de 0.3 kg/m . Ignore el tamaño del anillo situado en O .



Prob. 10-100

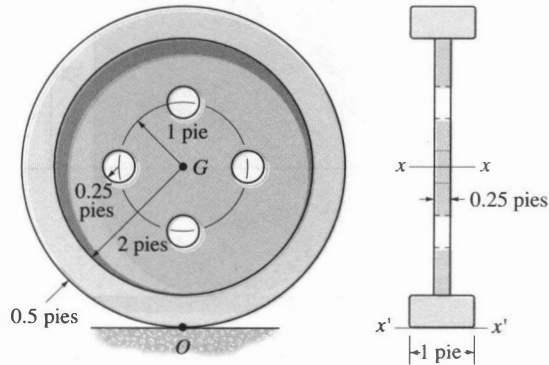
10-101. Determine el momento de inercia I_z del cono truncado que tiene una depresión cónica. El material tiene densidad de 200 kg/m^3 .



Prob. 10-101

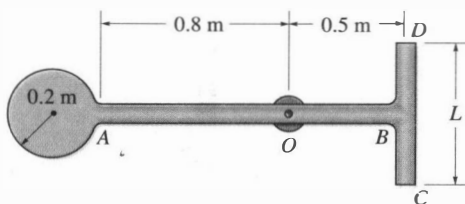
10-102. Determine el momento de inercia de la rueda con respecto al eje x que pasa por el centro de masa G . El material tiene peso específico de $\gamma = 90 \text{ lb/pie}^3$.

10-103. Determine el momento de inercia de la rueda con respecto al eje x' que pasa por el punto O . El material tiene peso específico de $\gamma = 90 \text{ lb/pie}^3$.



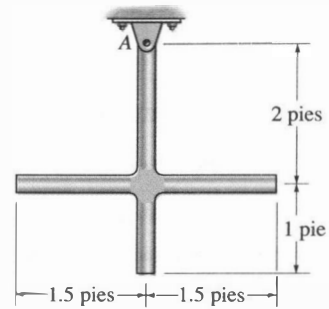
Probs. 10-102/103

***10-104.** El péndulo consiste en un disco con masa de 6 kg y las barras esbeltas AB y DC que tienen masa de 2 kg/m. Determine la longitud L de DC de manera que el centro de masa esté en la chumacera O . ¿Cuál es el momento de inercia del conjunto con respecto a un eje perpendicular a la página que pase por el punto O ?



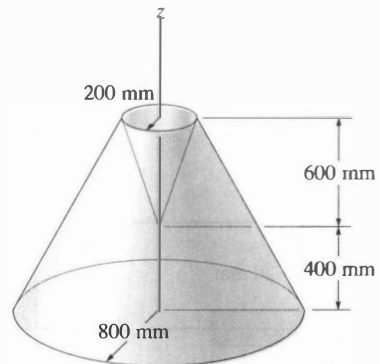
Prob. 10-104

10-105. Las barras esbeltas tienen un peso de 3 lb/pie. Determine el momento de inercia del conjunto con respecto a un eje perpendicular a la página que pase por el punto A .



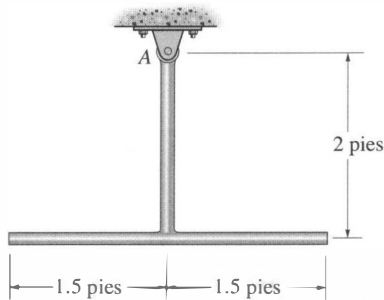
Prob. 10-105

10-106. Determine el momento de inercia I_z del cono truncado que tiene una depresión cónica. El material tiene densidad de 200 kg/m^3 .



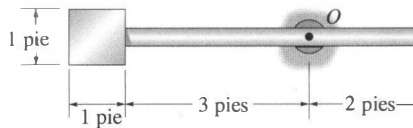
Prob. 10-106

10-107. Las barras esbeltas tienen un peso de 3 lb/pie. Determine el momento de inercia del conjunto con respecto a un eje perpendicular a la página que pase por el punto A .



Prob. 10-107

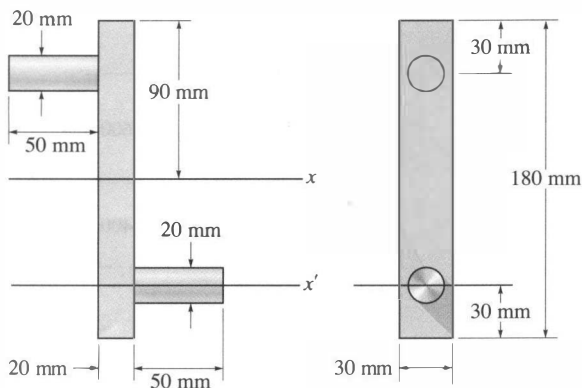
*10-108. El péndulo consiste en una placa con peso de 12 lb y una barra esbelta con peso de 4 lb. Determine el radio de giro del péndulo con respecto a un eje perpendicular a la página que pase por el punto O .



Prob. 10-108

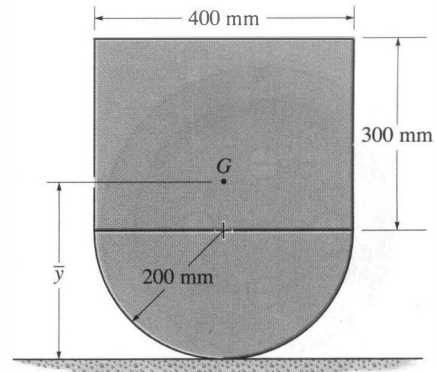
10-109. Determine el momento de inercia de la manivela con respecto al eje x . El material es acero con densidad $\rho = 7.85 \text{ Mg/m}^3$.

10-110. Determine el momento de inercia de la manivela con respecto al eje x' . El material es acero con densidad $\rho = 7.85 \text{ Mg/m}^3$.



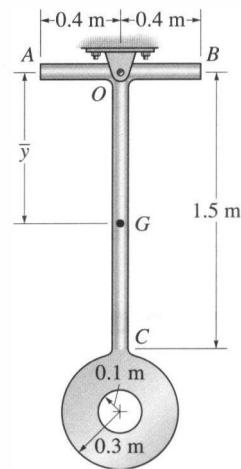
Probs. 10-109/110

10-111. Determine la ubicación de \bar{y} del centro de masa G del conjunto, y luego calcule el momento de inercia con respecto a un eje que sea perpendicular a la página y pase por G . El bloque tiene masa de 3 kg y la masa del semicilindro es de 5 kg.



Prob. 10-111

*10-112. El péndulo consiste en dos barras esbeltas AB y OC que tienen masa de 3 kg/m. La placa delgada tiene masa de 12 kg/m^2 . Determine la ubicación \bar{y} del centro de masa G del péndulo, y luego calcule el momento de inercia del péndulo con respecto a un eje que sea perpendicular a la página y pase por G .



Prob. 10-112

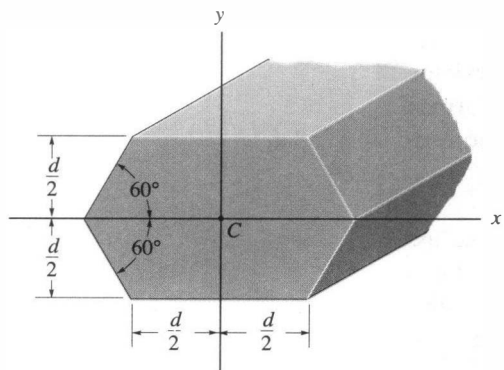
REPASO DEL CAPÍTULO

- Momento de inercia de un área.** El momento de inercia de un área representa el segundo momento del área con respecto a un eje, $I = \int r^2 dA$. Este momento es usado a menudo en fórmulas relacionadas con la resistencia y la estabilidad de miembros estructurales o elementos mecánicos. Si la forma del área es irregular, entonces debe seleccionarse un elemento diferencial e integrarse sobre toda el área. Se dispone de valores del momento de inercia de formas comunes con respecto a sus *ejes centroidales*. Para determinar el momento de inercia de esas formas con respecto a *otro eje*, debe usarse el teorema de los ejes paralelos, $I = \bar{I} + Ad^2$. Si un área es una composición de esas formas, entonces su momento de inercia es igual a la suma de los momentos de inercia de cada una de sus partes.
- Producto de inercia.** El producto de inercia de un área se usa para determinar la ubicación de un eje con respecto al cual el momento de inercia del área es un máximo o un mínimo. Esta propiedad es determinada a partir de $I_{xy} = \int xy dA$, donde la integración se efectúa en toda el área. Si se conoce el producto de inercia para un área con respecto a sus ejes centroidales x' , y' , entonces su valor se puede determinar con respecto a cualesquiera ejes x , y usando el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia, $I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y$.
- Momentos de inercia principales.** Siempre que los momentos de inercia I_x e I_y , y el producto de inercia I_{xy} se conozcan, entonces las fórmulas del círculo de Mohr pueden ser usadas para determinar los *momentos de inercia principales* máximo y mínimo para el área, así como para encontrar la orientación de los ejes principales de inercia.
- Momento de inercia de masa.** El momento de inercia de masa es la propiedad de un cuerpo que mide su resistencia a un cambio en su rotación. Este momento es definido como el segundo momento de los elementos de masa del cuerpo con respecto a un eje, $I = \int r^2 dm$. Para cuerpos con simetría axial, se puede determinar por integración usando elementos de disco o de cascarón. El momento de inercia de masa de un cuerpo compuesto es determinado mediante valores tabulares de sus formas compuestas junto con el teorema de los ejes paralelos, $I = \bar{I} + md^2$.

PROBLEMAS DE REPASO

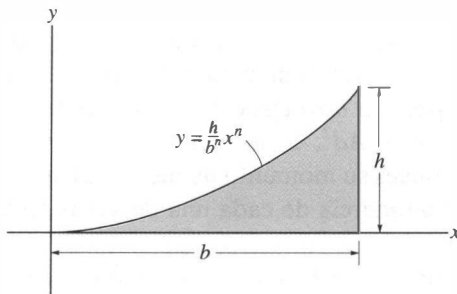
10-113. Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje x que pasa a través del centroide C .

10-114. Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje y que pasa a través del centroide C .



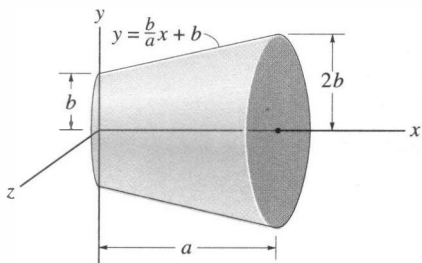
Probs. 10-113/114

***10-116.** Determine los momentos de inercia I_x e I_y del área sombreada.



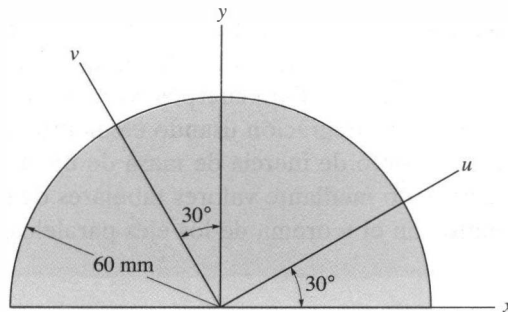
Prob. 10-116

10-115. Determine el momento de inercia de masa I_x del cuerpo y exprese el resultado en términos de la masa total m del cuerpo. La densidad es constante.



Prob. 10-115

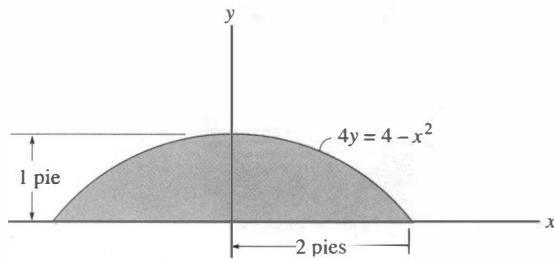
10-117. Determine los momentos de inercia I_u e I_v y el producto de inercia I_{uv} del área semicircular.



Prob. 10-117

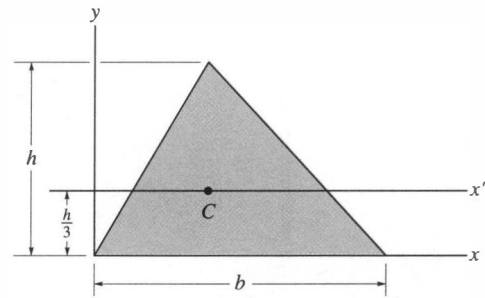
10-118. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje y .

10-119. Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje x .



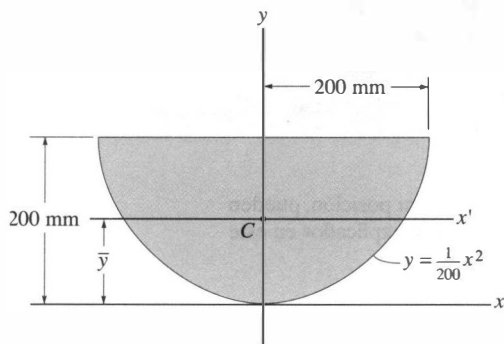
Probs. 10-118/119

10-121. Determine el momento de inercia del área triangular con respecto a (a) el eje x , y (b) el eje x' centroidal.



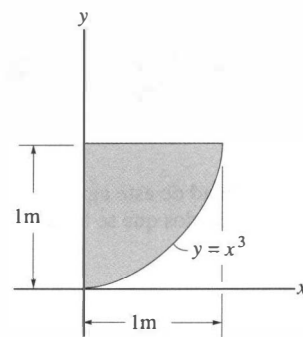
Prob. 10-121

***10-120.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje x . Luego, usando el teorema de los ejes paralelos, encuentre el momento de inercia con respecto al eje x' que pasa a través del centroide C del área. $\bar{y} = 120$ mm.



Prob. 10-120

10-122. Determine el producto de inercia del área sombreada con respecto a los ejes x y y .



Prob. 10-122

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Presentar el principio del trabajo virtual y mostrar cómo se aplica para determinar la configuración de equilibrio de una serie de miembros conectados mediante pasadores.
- Establecer la función de energía potencial y usar el método de la energía potencial para investigar el tipo de equilibrio o estabilidad de un cuerpo rígido o configuración.

11.1 Definición de trabajo y trabajo virtual

Trabajo de una fuerza. En mecánica una fuerza \mathbf{F} efectúa trabajo sólo cuando experimenta un desplazamiento en la dirección de la fuerza. Por ejemplo, considere la fuerza \mathbf{F} que se muestra en la figura 11-1, la cual está ubicada sobre la trayectoria s especificada por el vector posición \mathbf{r} . Si la fuerza se mueve a lo largo de la trayectoria a una nueva posición $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\mathbf{r}$, el desplazamiento es $d\mathbf{r}$, y por tanto, el trabajo dU es una *cantidad escalar* definida por el producto punto

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

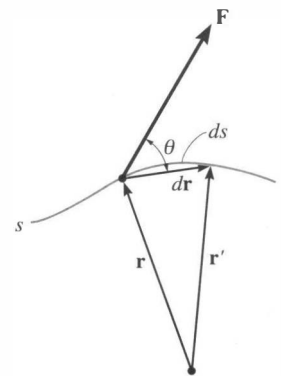


Fig. 11-1

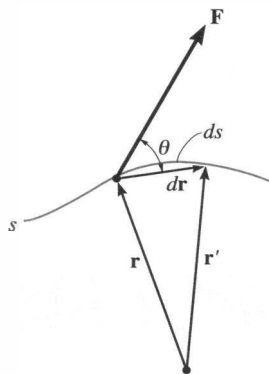


Fig. 11-1

Como $d\mathbf{r}$ es infinitesimal, la magnitud de $d\mathbf{r}$ puede ser representada por ds , el segmento de arco diferencial a lo largo de la trayectoria. Si el ángulo entre las colas de $d\mathbf{r}$ y \mathbf{F} es θ , figura 11-1, entonces, por definición del producto punto, la ecuación anterior también puede ser escrita como

$$dU = F ds \cos \theta$$

El trabajo expresado por esta ecuación puede interpretarse en una de dos maneras: como el producto de F y la componente de desplazamiento en la dirección de la fuerza, es decir, $ds \cos \theta$; o como el producto de ds y la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento, esto es, $F \cos \theta$. Observe que si $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$, entonces la componente de la fuerza y el desplazamiento tienen el *mismo sentido*, por lo que el trabajo es *positivo*; mientras que si $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$, esos vectores tienen *sentido opuesto*, y por tanto, el trabajo es *negativo*. Además, $dU = 0$ si la fuerza es *perpendicular* al desplazamiento, ya que $\cos 90^\circ = 0$, o si la fuerza está aplicada en un *punto fijo*, en cuyo caso el desplazamiento $ds = 0$.

La unidad básica para el trabajo combina las unidades de fuerza y desplazamiento. En el SI, un *joule* (J) es equivalente al trabajo efectuado por una fuerza de 1 newton que se mueve 1 metro en la dirección de la fuerza ($1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$). En el sistema FPS, el trabajo es definido en unidades de pies \cdot lb. El momento de una fuerza tiene la misma combinación de unidades; sin embargo, los conceptos de momento y trabajo no están relacionados entre sí. Un momento es una cantidad vectorial, mientras que el trabajo es un escalar.

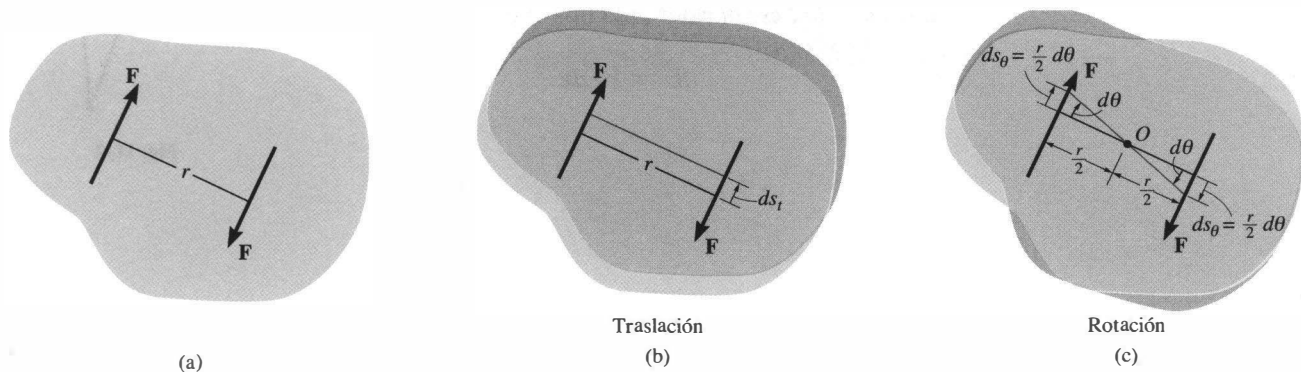


Fig. 11-2

Trabajo de un par. Las dos fuerzas de un par efectúan trabajo cuando el par *gira* alrededor de un eje perpendicular al plano del par. Para mostrar esto, considere el cuerpo que aparece en la figura 11-2a, el cual está sometido a un par cuyo momento tiene magnitud $M = Fr$. Cualquier desplazamiento diferencial general del cuerpo puede ser considerado como la combinación de una traslación y una rotación. Cuando el cuerpo se *traslada* de manera que la *componente de desplazamiento* a lo largo de la línea de acción de cada fuerza es ds_r , el trabajo “positivo” de una fuerza ($F ds_r$) *cancela* el trabajo “negativo” de la otra ($-F ds_r$), figura 11-2b. Considere ahora una *rotación* diferencial $d\theta$ del cuerpo alrededor de un eje perpendicular al plano del par, que interseca el plano en el punto O , figura 11-2c. (Para la derivación, cualquier otro punto en el plano puede también ser considerado). Como se muestra, cada fuerza sufre un desplazamiento $ds_\theta = (r/2) d\theta$ en la dirección de la fuerza; por tanto, el trabajo de ambas fuerzas es

$$dU = F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) + F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) = (Fr) d\theta$$

o

$$dU = M d\theta$$

El trabajo resultante es *positivo* cuando el sentido de \mathbf{M} es el *mismo* que el de $d\theta$, y *negativo* cuando éstos tienen un sentido opuesto. Como en el caso del vector momento, *la dirección y el sentido* de $d\theta$ son definidos por la regla de la mano derecha, donde los dedos de la mano derecha siguen la rotación y el pulgar indica la dirección de $d\theta$. Por consiguiente, la línea de acción de $d\theta$ será *paralela* a la línea de acción de \mathbf{M} si el movimiento del cuerpo ocurre en el *mismo plano*. Sin embargo, cuando el cuerpo gira en el espacio, la *componente* de $d\theta$ en la dirección de \mathbf{M} es requerida. Así, en general, el trabajo efectuado por un par es definido por el producto punto, $dU = \mathbf{M} \cdot d\theta$.

Trabajo virtual. Las definiciones del trabajo de una fuerza y de un par han sido presentadas en términos de *movimientos reales* expresados mediante desplazamientos diferenciales con magnitudes de ds y $d\theta$. Consideremos ahora un *movimiento imaginario* o *virtual*, el cual indica un desplazamiento, o una rotación, que es *supuesto* y *no existe realmente*. Estos movimientos son cantidades diferenciales de primer orden y serán denotados mediante los símbolos δs y $\delta\theta$ (delta s y delta θ), respectivamente. El *trabajo virtual* efectuado por una fuerza que sufre un desplazamiento virtual δs es

$$\delta U = F \cos \theta \delta s \quad (11-1)$$

Similarmente, cuando un par sufre una rotación virtual $\delta\theta$ en el plano de las fuerzas del par, el *trabajo virtual* es

$$\delta U = M \delta\theta \quad (11-2)$$

11.2 Principio del

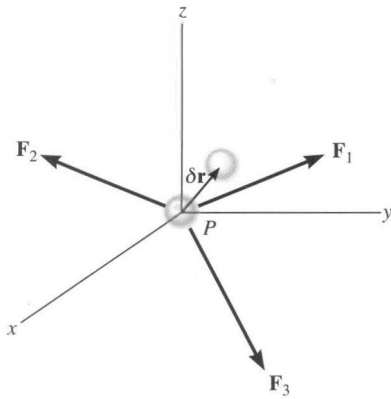


Fig. 11-3

Partícula. Si la partícula que se muestra en la figura 11-3 sufre un desplazamiento imaginario o virtual $\delta \mathbf{r}$, entonces el trabajo virtual (δU) efectuado por el sistema de fuerzas es

$$\begin{aligned} \delta U &= \Sigma \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} \\ &= (\Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k}) \cdot (\delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j} + \delta z \mathbf{k}) \\ &= \Sigma F_x \delta x + \Sigma F_y \delta y + \Sigma F_z \delta z \end{aligned}$$

Por equilibrio, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$, así que el trabajo virtual debe ser también cero, es decir,

$$\delta U = 0$$

En otras palabras, podemos escribir tres ecuaciones independientes de trabajo virtual correspondientes a las tres ecuaciones de equilibrio.

Por ejemplo, considere el diagrama de cuerpo libre de la bola que descansa sobre el piso, figura 11-4. Si “imaginamos” que la bola es desplazada hacia abajo una cantidad virtual δy , entonces el peso efectúa trabajo virtual positivo, $W\delta y$, y la fuerza normal efectúa trabajo virtual negativo, $-N\delta y$. Por equilibrio, el trabajo virtual total debe ser cero, así que $\delta U = W\delta y - N\delta y = (W - N)\delta y = 0$. Como $\delta y \neq 0$, entonces $N = W$, tal como se requiere.

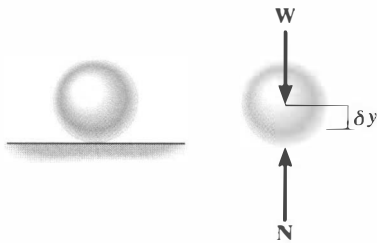
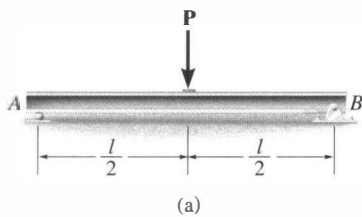


Fig. 11-4

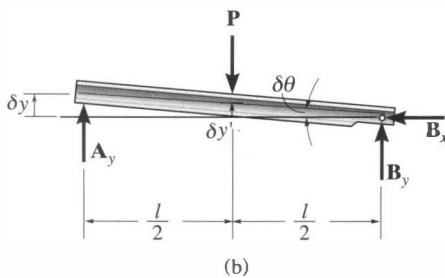
Cuerpo rígido. De manera similar, también podemos escribir un conjunto de tres ecuaciones de trabajo virtual ($\delta U = 0$) para un cuerpo rígido sometido a un sistema de fuerzas coplanares. Si estas ecuaciones implican traslaciones virtuales separadas en las direcciones x y y , y una rotación virtual con respecto a un eje perpendicular al plano x - y que pase por un punto arbitrario O , entonces se puede demostrar que corresponderán a las tres ecuaciones de equilibrio, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, y $\Sigma M_O = 0$. Al escribir estas ecuaciones, *no es necesario* incluir el trabajo efectuado por las *fuerzas internas* que actúan dentro del cuerpo, ya que un cuerpo rígido *no se deforma* cuando está sometido a una carga externa, y además, cuando el cuerpo se mueve a través un desplazamiento virtual, las fuerzas internas ocurren en pares colineales iguales pero opuestos, de manera que el correspondiente trabajo efectuado por cada par de fuerzas se *cancela*.

Como ejemplo, consideremos la viga simplemente apoyada que muestra la figura 11-5a. Cuando a la viga se le da una rotación virtual $\delta\theta$ con respecto al punto B , figura 11-5b, las únicas fuerzas que trabajan son \mathbf{P} y \mathbf{A}_y . Como $\delta y = l\delta\theta$ y $\delta y' = (l/2)\delta\theta$, la ecuación de trabajo virtual para este caso es $\delta U = A_y(l\delta\theta) - P(l/2)\delta\theta = (A_y - P/2)l\delta\theta = 0$. Como $\delta\theta \neq 0$, entonces $A_y = P/2$. Excluyendo $\delta\theta$, observe que los términos entre paréntesis representan en realidad el equilibrio por momento con respecto al punto B .

Como en el caso de una partícula, ninguna ventaja se obtiene resolviendo problemas de equilibrio de cuerpo rígido mediante el principio del trabajo virtual. Esto es porque para cada aplicación de la ecuación del trabajo virtual, el desplazamiento virtual, común a cada término, se factoriza dejando una ecuación que podría obtenerse de *manera más directa* aplicando simplemente las ecuaciones de equilibrio.



(a)



(b)

Fig. 11-5

11.3 Principio del trabajo virtual conectados

El método del trabajo virtual es más adecuado para resolver problemas de equilibrio que implican un sistema de varios cuerpos rígidos *conectados*, tal como los que muestra la figura 11-6. Sin embargo, antes de poder aplicar el principio del trabajo virtual a esos sistemas, debemos especificar primero el número de grados de libertad para un sistema y establecer coordenadas que definan la posición del sistema.

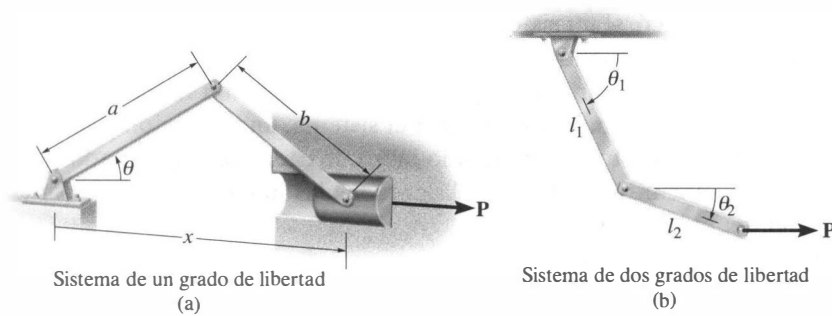


Fig. 11-6

Grados de libertad. Un sistema de cuerpos conectados toma una forma única que puede ser especificada siempre que conozcamos la posición de un número de puntos específicos sobre el sistema. Estas posiciones son definidas usando *coordenadas independientes* q , las cuales se miden desde puntos fijos de referencia. Para cada coordenada establecida, el sistema tendrá un *grado de libertad* para realizar desplazamientos a lo largo del eje coordenado de modo que sean consistentes con la acción restrictiva de los soportes. Así, un sistema de n grados de libertad requiere n coordenadas independientes q_n para especificar la ubicación de todos sus miembros. Por ejemplo, el arreglo de eslabón y bloque deslizable mostrado en la figura 11-6a es representativo de un sistema de un grado de libertad. La coordenada independiente $q = \theta$ puede ser usada para especificar la ubicación de los dos eslabones conectados y el bloque. La coordenada x podría usarse también como la coordenada independiente. Sin embargo, como el bloque está restringido a moverse dentro de la ranura, x no es independiente de θ , pero puede relacionarse con θ mediante la ley de los cosenos, $b^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos \theta$. El arreglo de doble eslabón, mostrado en la figura 11-6b, es ejemplo de un sistema de dos grados de libertad. Para especificar la ubicación de cada eslabón, los ángulos coordenados θ_1 y θ_2 deben ser conocidos ya que una rotación de un eslabón es independiente de una rotación del otro.



En operación, el elevador de tijera tiene un grado de libertad. Sin desmembrar el mecanismo, la fuerza hidráulica requerida para hacer funcionar el elevador puede ser determinada *directamente* usando el principio del trabajo virtual.

Principio del trabajo virtual. El principio del trabajo virtual para un sistema de cuerpos rígidos cuyas conexiones son *sin fricción* puede ser enunciado como sigue: *Un sistema de cuerpos rígidos conectados está en equilibrio siempre que el trabajo virtual efectuado por todas las fuerzas y pares externos que actúan sobre el sistema sea cero para cada desplazamiento independiente virtual del sistema.* Matemáticamente, esto puede ser expresado como

$$\delta U = 0 \quad (11-3)$$

donde δU representa el trabajo virtual de todas las fuerzas externas (y pares) que actúan sobre el sistema durante cualquier desplazamiento independiente virtual.

Como se indicó, si un sistema tiene n grados de libertad, se requieren n coordenadas independientes q_n para especificar completamente la ubicación del sistema. Por consiguiente, es posible escribir n ecuaciones independientes de trabajo virtual para el sistema, una ecuación para cada desplazamiento virtual tomado a lo largo de cada eje coordenado independiente, mientras que las $n - 1$ coordenadas independientes restantes se mantienen *fijas*.*

PUNTOS

- Una fuerza efectúa trabajo cuando se mueve a través de un desplazamiento en la dirección de la fuerza. Un momento de par efectúa trabajo cuando se mueve a través de una rotación colineal. Específicamente, se efectúa trabajo positivo cuando la fuerza o el momento de par y sus desplazamientos tienen el mismo sentido de dirección.
- Por lo general, el principio del trabajo virtual es usado al determinar la configuración de equilibrio para una serie de miembros de conexión múltiple.
- Un desplazamiento virtual es imaginario, esto es, no ocurre realmente. Es un diferencial dado en la dirección positiva de la coordenada de posición.
- Las fuerzas o los momentos de par que no se desplazan virtualmente no efectúan trabajo virtual.

*Ocasionalmente, a este método de aplicar el principio del trabajo virtual se le denomina *método de los desplazamientos virtuales* ya que es aplicado un desplazamiento virtual, resultando en el cálculo de una fuerza real. Aunque no se usará aquí, observe que también podemos aplicar el principio del trabajo virtual como un método de fuerzas virtuales. Este método a menudo es usado para determinar los desplazamientos de puntos sobre cuerpos deformables. Vea R. C. Hibbeler, *Mechanics of Materials*, 5a. edición, Prentice Hall, Inc., 2003.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

La ecuación del trabajo virtual puede ser usada para resolver problemas que implican un sistema de cuerpos rígidos conectados sin fricción, y con un solo grado de libertad, aplicando el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre.

- Trace el diagrama de cuerpo libre del sistema completo de cuerpos conectados y defina la *coordenada independiente* q .
- Grafique la “posición deflexionada” del sistema en el diagrama de cuerpo libre cuando el sistema experimenta un desplazamiento virtual positivo δq .

Desplazamientos virtuales.

- Indique las *coordenadas de posición* s_i , medidas desde un *punto fijo* en el diagrama de cuerpo libre, hacia cada uno del número i de fuerzas y pares “activos”, es decir, de aquellos que efectúan trabajo.
- Cada eje coordenado debe ser paralelo a la línea de acción de la fuerza “activa” hacia la que está dirigida, de manera que el trabajo virtual a lo largo del eje coordenado pueda ser calculado.
- Relacione cada una de las coordenadas de posición s_i con la coordenada independiente q ; luego *diferencie* esas expresiones para representar los desplazamientos virtuales δs_i en términos de δq .

Ecuación del trabajo virtual.

- Escriba la *ecuación del trabajo virtual* para el sistema suponiendo que, sea posible o no, todas las coordenadas de posición s_i sufren desplazamientos virtuales *positivos* δs_i .
- Usando las relaciones para δs_i , exprese el trabajo de *cada* fuerza y par “activo” en la ecuación en términos del *solo* desplazamiento virtual independiente δq .
- Factorice este desplazamiento común de todos los términos y despeje la fuerza, el par o la posición de equilibrio, q , desconocidos.
- Si el sistema contiene n grados de libertad, deben ser especificadas n coordenadas q_n independientes. Siga el procedimiento anterior y deje que *sólo una* de las coordenadas independientes sufra un desplazamiento virtual, mientras que las $n - 1$ coordenadas restantes *permanecen fijas*. De este modo, pueden escribirse n ecuaciones de trabajo virtual, una para cada coordenada independiente.

EJEMPLO 11.1

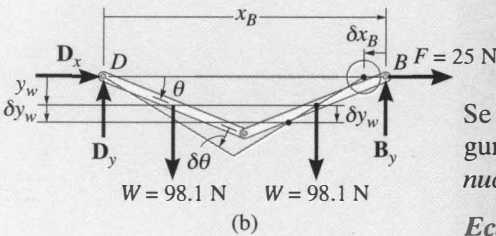
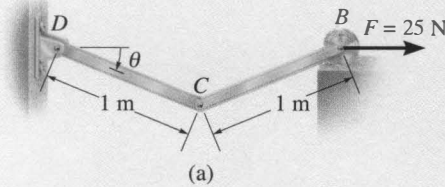


Fig. 11-7

Determine el ángulo θ por equilibrio del eslabonamiento de dos miembros mostrado en la figura 11.7a. Cada miembro tiene una masa de 10 kg.

Solución

Diagrama de cuerpo libre. El sistema tiene sólo un grado de libertad ya que la ubicación de ambos eslabones puede ser especificada mediante la sola coordenada independiente ($q =$) θ . Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 11-7b, cuando θ sufre una rotación virtual *positiva* (en el sentido de las manecillas del reloj), sólo las fuerzas activas, \mathbf{F} y los dos pesos de 98.1 N, efectúan trabajo. (Las fuerzas reactivas \mathbf{D}_x y \mathbf{D}_y están fijas, y \mathbf{B}_y no se mueve a lo largo de su línea de acción).

Desplazamientos virtuales. Si el origen de coordenadas es establecido en el soporte de pasador *fijo* D , la ubicación de \mathbf{F} y \mathbf{W} puede ser especificada mediante las *coordenadas de posición* x_B y y_w , como se muestra en la figura. Para determinar el trabajo, observe que esas coordenadas son paralelas a las líneas de acción de sus fuerzas asociadas.

Al expresar las coordenadas de posición en términos de la coordenada independiente θ , y tomando las derivadas, resulta

$$x_B = 2(1 \cos \theta) \text{ m} \quad \delta x_B = -2 \operatorname{sen} \theta \delta \theta \text{ m} \quad (1)$$

$$y_w = \frac{1}{2}(1 \operatorname{sen} \theta) \text{ m} \quad \delta y_w = 0.5 \cos \theta \delta \theta \text{ m} \quad (2)$$

Se advierte por los *signos* de esas ecuaciones, y está indicado en la figura 11-7b, que un *incremento* de θ (esto es, $\delta \theta$) ocasiona una *disminución* en x_B y un *incremento* en y_w .

Ecuación del trabajo virtual. Si los desplazamientos virtuales δx_B y δy_w fuesen *ambos positivos*, entonces las fuerzas \mathbf{W} y \mathbf{F} realizarían trabajo positivo ya que las fuerzas y sus correspondientes desplazamientos tendrían el mismo sentido. Por tanto, la ecuación del trabajo virtual para el desplazamiento $\delta \theta$ es

$$\delta U = 0; \quad W \delta y_w + W \delta y_w + F \delta x_B = 0 \quad (3)$$

Al sustituir las ecuaciones 1 y 2 en la ecuación 3 para relacionar los desplazamientos virtuales con el desplazamiento común virtual $\delta \theta$ resulta

$$98.1(0.5 \cos \theta \delta \theta) + 98.1(0.5 \cos \theta \delta \theta) + 25(-2 \operatorname{sen} \theta \delta \theta) = 0$$

Observe que el “trabajo negativo” efectuado por \mathbf{F} (fuerza en el sentido opuesto al desplazamiento) ha sido *tomado en cuenta* en la ecuación anterior mediante el “signo negativo” de la ecuación 1. Al factorizar el *desplazamiento común* $\delta \theta$, despejando θ , y observando que $\delta \theta \neq 0$, obtenemos

$$(98.1 \cos \theta - 50 \operatorname{sen} \theta) \delta \theta = 0$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{98.1}{50} = 63.0^\circ$$

Resp.

Si este problema hubiese sido resuelto usando las ecuaciones de equilibrio, habría sido necesario desmembrar los eslabones y aplicar tres ecuaciones escalares a *cada* eslabón. El principio del trabajo virtual, por medio del cálculo, ha eliminado esta tarea de manera que la respuesta se obtenga directamente.

EJEMPLO 11.2

Determine el ángulo θ requerido para mantener el equilibrio del mecanismo que aparece en la figura 11-8a. Ignore el peso de los eslabones. El resorte no está alargado cuando $\theta = 0^\circ$, y mantiene una posición horizontal debido al rodillo. *¿Por qué?*

Solución

Diagrama de cuerpo libre. El mecanismo tiene un grado de libertad, y por ello la ubicación de cada miembro puede ser especificada usando la coordenada independiente θ . Cuando θ sufre un desplazamiento virtual *positivo* $\delta\theta$, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 11-8b, los eslabones AB y EC giran la misma cantidad ya que tienen la misma longitud, y el eslabón BC únicamente se traslada. Como un momento de par *sólo* trabaja cuando gira, el trabajo efectuado por M_2 es cero. Las fuerzas reactivas en A y E no trabajan. *¿Por qué?*

Desplazamientos virtuales. Las coordenadas de posición x_B y x_D son *paralelas* a las líneas de acción de P y F_s , y estas coordenadas ubican a las fuerzas con respecto a los *puntos fijos* A y E . A partir de la figura 11-8b,

$$x_B = 0.4 \text{ sen } \theta \text{ m}$$

$$x_D = 0.2 \text{ sen } \theta \text{ m}$$

Entonces,

$$\delta x_B = 0.4 \text{ cos } \theta \delta\theta \text{ m}$$

$$\delta x_D = 0.2 \text{ cos } \theta \delta\theta \text{ m}$$

Ecuación de trabajo virtual. Para desplazamientos virtuales *positivos*, F_s es opuesta a δx_D y efectúa, por ello, trabajo negativo. Así,

$$\delta U = 0; \quad M_1 \delta\theta + P \delta x_B - F_s \delta x_D = 0$$

Al relacionar cada uno de los desplazamientos virtuales con el desplazamiento virtual *común* $\delta\theta$ resulta

$$\begin{aligned} 0.5 \delta\theta + 2(0.4 \text{ cos } \theta \delta\theta) - F_s(0.2 \text{ cos } \theta \delta\theta) &= 0 \\ (0.5 + 0.8 \text{ cos } \theta - 0.2F_s \text{ cos } \theta) \delta\theta &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Para el ángulo arbitrario θ , el resorte está estirado una distancia $x_D = (0.2 \text{ sen } \theta) \text{ m}$; y por tanto, $F_s = 60 \text{ N/m}(0.2 \text{ sen } \theta) \text{ m} = (12 \text{ sen } \theta) \text{ N}$. Al sustituir en la ecuación 1 y observando que $\delta\theta \neq 0$, tenemos

$$0.5 + 0.8 \text{ cos } \theta - 0.2(12 \text{ sen } \theta) \text{ cos } \theta = 0$$

Como $\text{sen } 2\theta = 2 \text{ sen } \theta \text{ cos } \theta$, entonces

$$1 = 2.4 \text{ sen } 2\theta - 1.6 \text{ cos } \theta$$

Al despejar θ por tanteos resulta

$$\theta = 36.3^\circ$$

Resp.

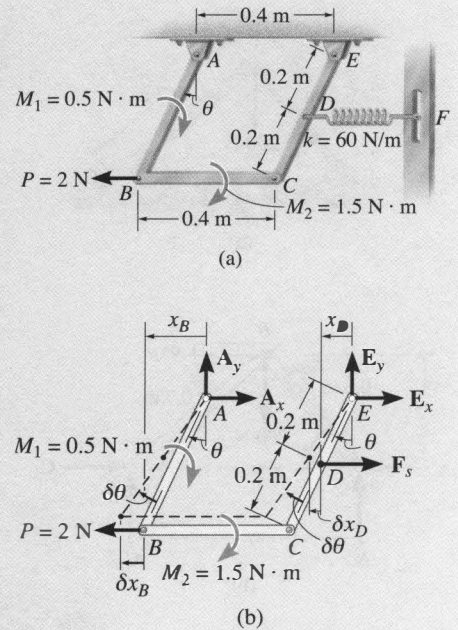


Fig. 11-8

EJEMPLO 11.3

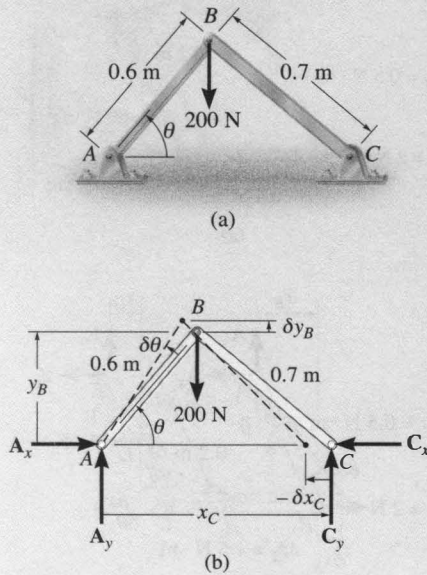


Fig. 11-9

Determine la fuerza horizontal C_x que el pasador ubicado en C debe ejercer sobre BC para mantener el mecanismo mostrado en la figura 11-9a en equilibrio cuando $\theta = 45^\circ$. Ignore el peso de los miembros.

Solución

Diagrama de cuerpo libre. La reacción C_x puede ser obtenida liberando la restricción del pasador ubicado en C en la dirección x y permitiendo que el bastidor se desplace en esa dirección. El sistema tiene entonces un solo grado de libertad, definido por la coordenada independiente θ , figura 11-9b. Cuando θ sufre un desplazamiento virtual positivo $\delta\theta$, sólo C_x y la fuerza de 200 N efectúan trabajo.

Desplazamientos virtuales. Las fuerzas C_x y de 200 N son localizadas desde el origen fijo A usando coordenadas de posición y_B y x_C . A partir de la figura 11-9b, x_C puede ser relacionada a θ mediante la “ley de los cosenos”. Por tanto,

$$(0.7)^2 = (0.6)^2 + x_C^2 - 2(0.6)x_C \cos \theta \quad (1)$$

$$0 = 0 + 2x_C \delta x_C - 1.2 \delta x_C \cos \theta + 1.2x_C \sin \theta \delta \theta$$

$$\delta x_C = \frac{1.2x_C \sin \theta}{1.2 \cos \theta - 2x_C} \delta \theta \quad (2)$$

También,

$$\begin{aligned} y_B &= 0.6 \sin \theta \\ \delta y_B &= 0.6 \cos \theta \delta \theta \end{aligned} \quad (3)$$

Ecuación del trabajo virtual. Cuando y_B y x_C sufren desplazamientos virtuales positivos δy_B y δx_C , C_x y 200 N efectúan *trabajo negativo* ya que actúan en sentido opuesto a δy_B y δx_C . Por consiguiente,

$$\delta U = 0; \quad -200 \delta y_B - C_x \delta x_C = 0$$

Al sustituir las ecuaciones 2 y 3 en esta ecuación, factorizando $\delta\theta$, y despejando C_x resulta

$$\begin{aligned} -200(0.6 \cos \theta \delta \theta) - C_x \frac{1.2x_C \sin \theta}{1.2 \cos \theta - 2x_C} \delta \theta &= 0 \\ C_x &= \frac{-120 \cos \theta (1.2 \cos \theta - 2x_C)}{1.2x_C \sin \theta} \end{aligned} \quad (4)$$

En la posición de equilibrio $\theta = 45^\circ$ requerida, el valor correspondiente de x_C puede encontrarse al aplicar la ecuación 1, en cuyo caso

$$x_C^2 - 1.2 \cos 45^\circ x_C - 0.13 = 0$$

Despejando la raíz positiva resulta

$$x_C = 0.981 \text{ m}$$

Así, a partir de la ecuación 4,

$$C_x = 114 \text{ N}$$

Resp.

EJEMPLO 11.4

Determine la posición de equilibrio del eslabonamiento de dos barras mostrado en la figura 11-10a. Ignore el peso de los eslabones.

Solución

El sistema tiene dos grados de libertad ya que las *coordenadas independientes* θ_1 y θ_2 deben conocerse para localizar la posición de ambos eslabones. La coordenada de posición x_B , medida desde el punto fijo O , se usa para especificar la ubicación de \mathbf{P} , figuras 11-10b y c.

Si θ_1 se mantiene *fijo* y θ_2 varía por una cantidad $\delta\theta_2$, como se muestra en la figura 11-10b, la ecuación del trabajo virtual toma la forma

$$[\delta U = 0]_{\theta_2}; \quad P(\delta x_B)_{\theta_2} - M \delta\theta_2 = 0 \quad (1)$$

Aquí, P y M representan las magnitudes de la fuerza y el momento de par aplicados que actúan en el eslabón AB .

Cuando θ_2 se mantiene *fijo* y θ_1 varía por una cantidad $\delta\theta_1$, como se muestra en la figura 11-10c, entonces AB se traslada y la ecuación del trabajo virtual toma la forma

$$[\delta U = 0]_{\theta_1}; \quad P(\delta x_B)_{\theta_1} - M \delta\theta_1 = 0 \quad (2)$$

La *coordenada de posición* x_B puede relacionarse con las coordenadas independientes θ_1 y θ_2 mediante la ecuación

$$x_B = l \sin \theta_1 + l \sin \theta_2 \quad (3)$$

Para obtener la variación de δx_B en términos de $\delta\theta_2$, es necesario tomar la *derivada parcial* de x_B con respecto a θ_2 ya que x_B es una función de θ_1 y θ_2 . Por consiguiente,

$$\frac{\partial x_B}{\partial \theta_2} = l \cos \theta_2 \quad (\delta x_B)_{\theta_2} = l \cos \theta_2 \delta\theta_2$$

Sustituyendo en la ecuación 1, tenemos

$$(Pl \cos \theta_2 - M) \delta\theta_2 = 0$$

Como $\delta\theta_2 \neq 0$, entonces

$$\theta_2 = \cos^{-1} \left(\frac{M}{Pl} \right)$$

Resp.

Al usar la ecuación 3 para obtener la variación de x_B con θ_1 resulta

$$\frac{\partial x_B}{\partial \theta_1} = l \cos \theta_1 \quad (\delta x_B)_{\theta_1} = l \cos \theta_1 \delta\theta_1$$

Sustituyendo en la ecuación 2, tenemos

$$(Pl \cos \theta_1 - M) \delta\theta_1 = 0$$

Como $\delta\theta_1 \neq 0$, entonces

$$\theta_1 = \cos^{-1} \left(\frac{M}{Pl} \right)$$

Resp.

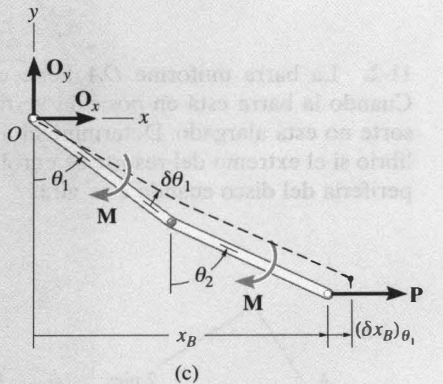
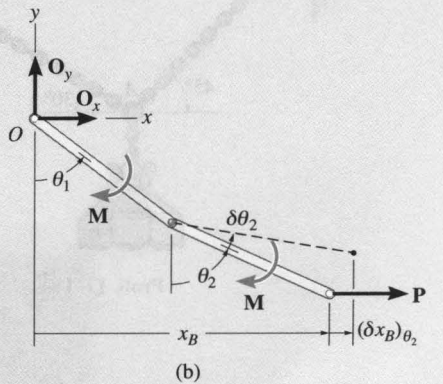
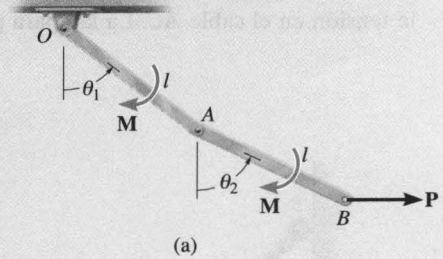
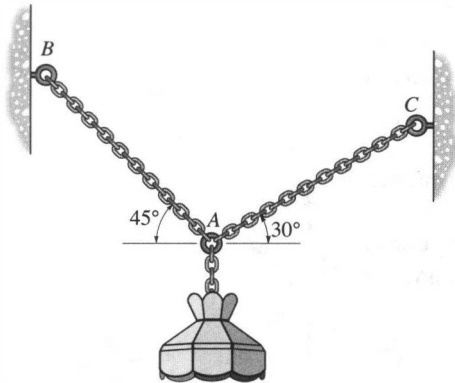


Fig. 11-10

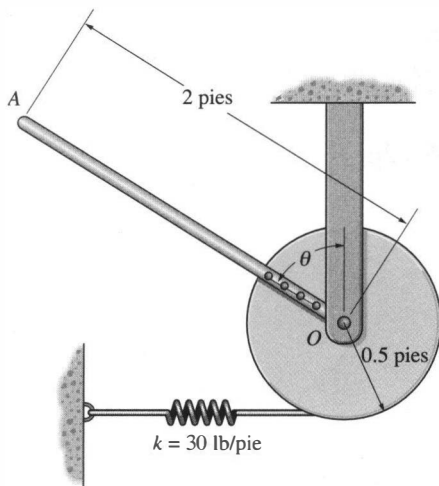
PROBLEMAS

11-1. Use el método del trabajo virtual para determinar la tensión en el cable AC . La lámpara pesa 10 lb.



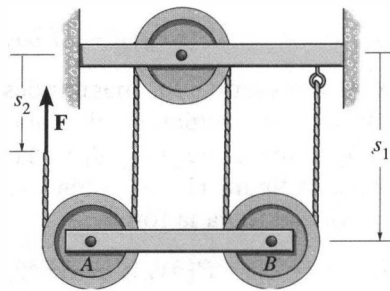
Prob. 11-1

11-2. La barra uniforme OA tiene un peso de 10 lb. Cuando la barra está en posición vertical, $\theta = 0^\circ$, el resorte no está alargado. Determine el ángulo θ por equilibrio si el extremo del resorte se enrolla alrededor de la periferia del disco cuando éste gira.



Prob. 11-2

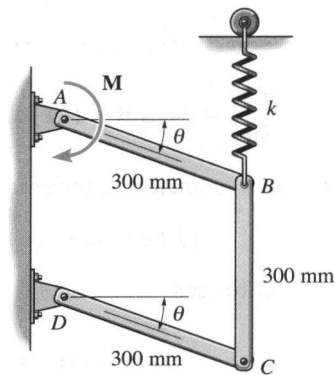
11-3. Determine la fuerza F que actúa sobre la cuerda que es requerida para mantener el equilibrio de la barra AB horizontal de 10 kg. *Sugerencia:* Expresé la longitud l constante vertical total de la cuerda en términos de las coordenadas de posición s_1 y s_2 . La derivada de esta ecuación resulta en una relación entre δ_1 y δ_2 .



Prob. 11-3

*11-4. Cada miembro del mecanismo conectado mediante pasadores tiene una masa de 8 kg. Si el resorte no está alargado cuando $\theta = 0^\circ$, determine el ángulo θ por equilibrio. Considere $k = 2500 \text{ N/m}$ y $M = 50 \text{ N} \cdot \text{m}$.

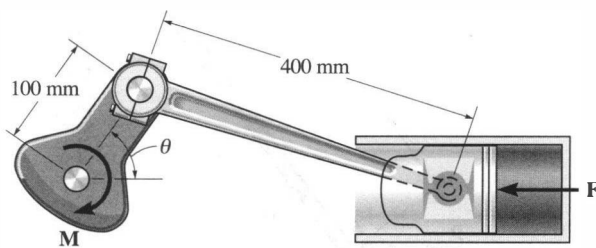
11-5. Cada miembro del mecanismo conectado mediante pasadores tiene una masa de 8 kg. Si el resorte no está alargado cuando $\theta = 0^\circ$, determine la rigidez k requerida de manera que el mecanismo esté en equilibrio cuando $\theta = 30^\circ$. Considere $M = 0$.



Probs. 11-4/5

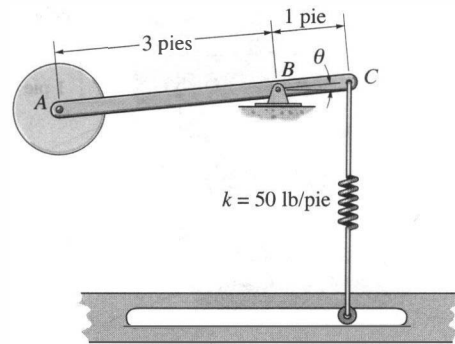
11-6. El cigüeñal está sometido a una torca de $M = 50 \text{ N} \cdot \text{m}$. Determine la fuerza F horizontal de compresión aplicada al pistón por equilibrio cuando $\theta = 60^\circ$.

11-7. El cigüeñal está sometido a una torca de $M = 50 \text{ N} \cdot \text{m}$. Determine la fuerza F horizontal de compresión y grafique el resultado de F (ordenadas) contra θ (abscisas) para $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.



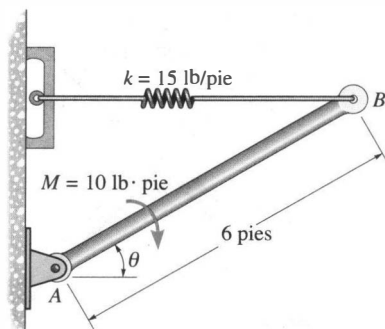
Probs. 11-6/7

11-9. Determine los ángulos θ por equilibrio del disco de 4 lb usando el principio del trabajo virtual. Ignore el peso de la barra. El resorte no está alargado cuando $\theta = 0^\circ$ y siempre permanece en posición vertical debido a la guía de rodillo.



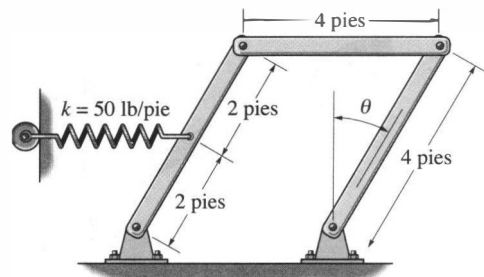
Prob. 11-9

*11-8. Determine la fuerza desarrollada en el resorte y que es requerida para mantener la barra uniforme AB de 10 lb en equilibrio cuando $\theta = 35^\circ$.



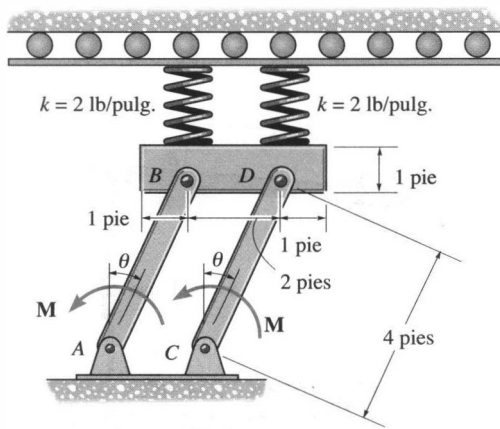
Prob. 11-8

11-10. Si cada uno de los tres eslabones del mecanismo tiene un peso de 20 lb, determine el ángulo θ por equilibrio del resorte, el cual, debido a la guía de rodillo, siempre permanece horizontal y no está alargado cuando $\theta = 0^\circ$.



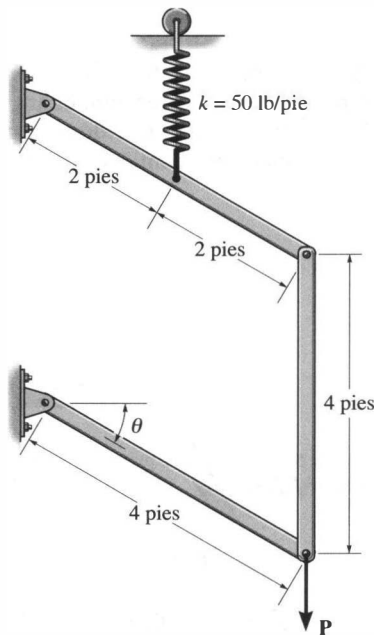
Prob. 11-10

11-11. Cuando $\theta = 20^\circ$, el bloque uniforme de 50 lb comprime los dos resortes verticales de 4 pulg. Si cada uno de los eslabones uniformes AB y CD pesa 10 lb, determine la magnitud de los momentos de par M aplicados necesarios para mantener el equilibrio cuando $\theta = 20^\circ$.



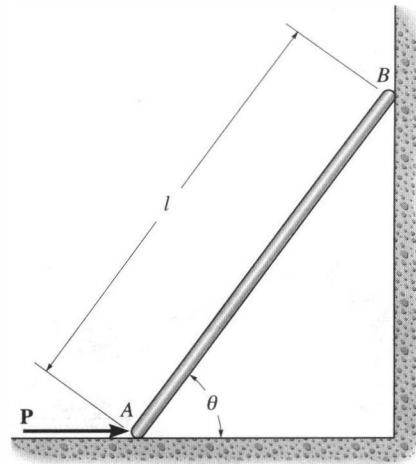
Prob. 11-11

***11-12.** El resorte no está alargado cuando $\theta = 0^\circ$. Si $P = 8$ lb, determine el ángulo θ por equilibrio. Debido a la guía de rodillo, el resorte siempre permanece vertical. Ignore el peso de los eslabones.



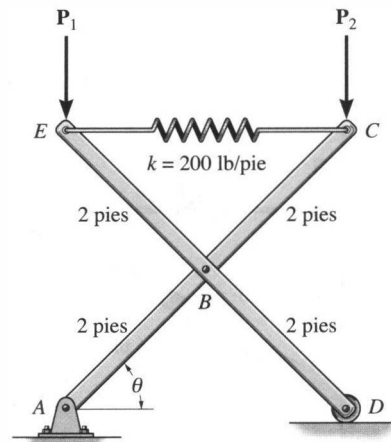
Prob. 11-12

11-13. La barra delgada de peso W descansa contra la pared y el piso lisos. Determine la magnitud de la fuerza P necesaria para mantener la barra en equilibrio para un ángulo θ dado.



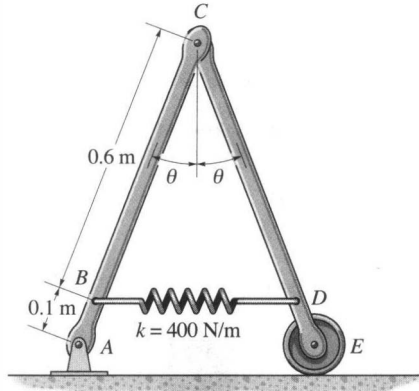
Prob. 11-13

11-14. Los miembros de 4 pies del mecanismo están conectados mediante pasadores en sus centros. Si fuerzas verticales $P_1 = P_2 = 30$ lb actúan en C y E como se muestra, determine el ángulo θ por equilibrio. El resorte no está alargado cuando $\theta = 45^\circ$. Ignore el peso de los miembros.



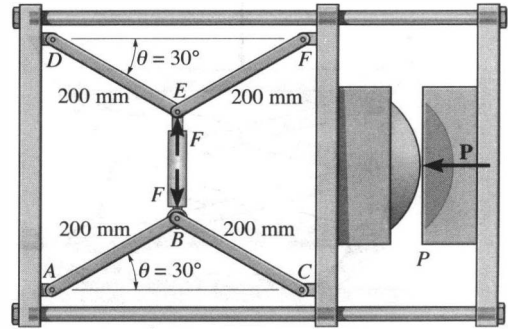
Prob. 11-14

11-15. El resorte tiene una longitud no alargada de 0.3 m. Determine el ángulo θ por equilibrio si cada uno de los eslabones uniformes tiene una masa de 5 kg.



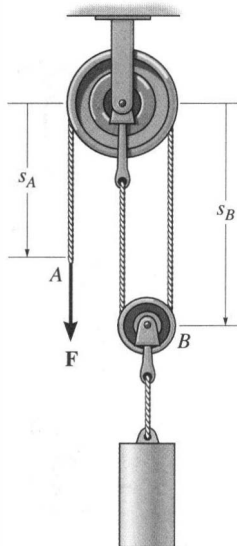
Prob. 11-15

11-17. La máquina mostrada se usa para darle forma a placas metálicas. Consiste en dos palancas acodadas ABC y DEF , las cuales son operadas mediante un cilindro hidráulico BE . Las palancas empujan la barra móvil FC hacia delante, presionando la placa p en la cavidad. Si la fuerza que la placa ejerce sobre la cabeza es $P = 8$ kN, determine la fuerza F presente en el cilindro hidráulico cuando $\theta = 30^\circ$.



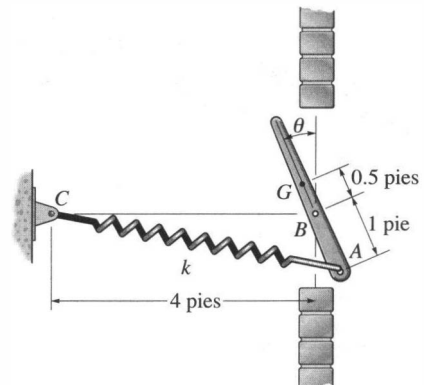
Prob. 11-17

***11-16.** Determine la fuerza F necesaria para elevar el bloque que tiene un peso de 100 lb. *Sugerencia:* Observe que las coordenadas s_A y s_B pueden ser relacionadas a la longitud l vertical constante de la cuerda.



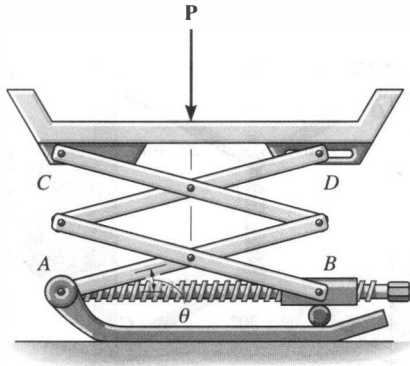
Prob. 11-16

11-18. La placa de una ventila está soportada en B mediante un pasador. Si pesa 15 lb y tiene su centro de gravedad en G , determine la rigidez k del resorte de manera que la placa permanezca en equilibrio cuando $\theta = 30^\circ$. El resorte no está alargado cuando $\theta = 0^\circ$.



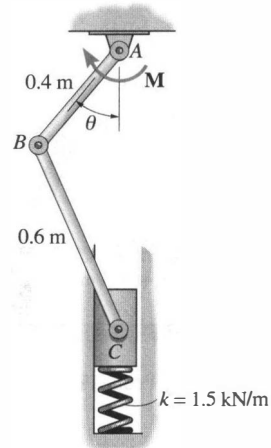
Prob. 11-18

11-19. El gato de tijera soporta una carga P . Determine la fuerza axial que es necesaria en el tornillo por equilibrio cuando el gato está en la posición θ . Cada uno de los cuatro eslabones tiene una longitud L y está conectado en su centro mediante un pasador. Los puntos B y D se pueden mover horizontalmente.



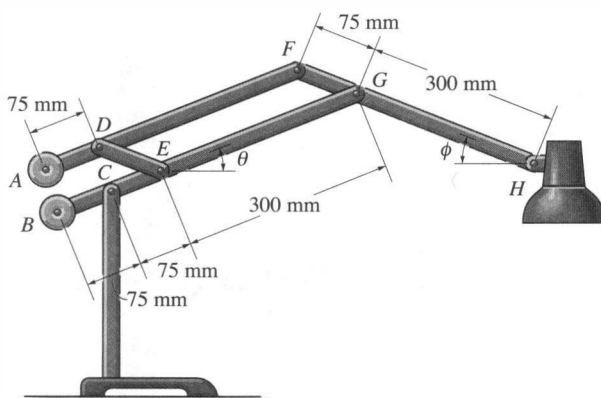
Prob. 11-19

11-21. El pistón C se mueve verticalmente entre las dos paredes lisas. Si el resorte tiene una rigidez de $k = 1.5 \text{ kN/m}$ y no está alargado cuando $\theta = 0^\circ$, determine el par que debe aplicarse al eslabón AB para mantener el mecanismo en equilibrio; $\theta = 30^\circ$.



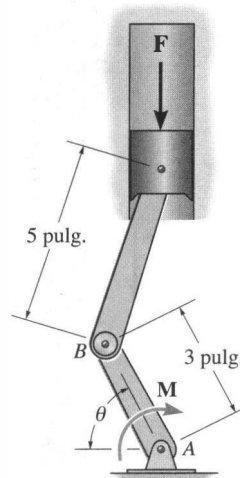
Prob. 11-21

***11-20.** Determine la masa de A y B requerida para mantener en equilibrio la lámpara de 400 g en cualesquiera ángulos θ y ϕ . Ignore el peso del mecanismo y el tamaño de la lámpara.



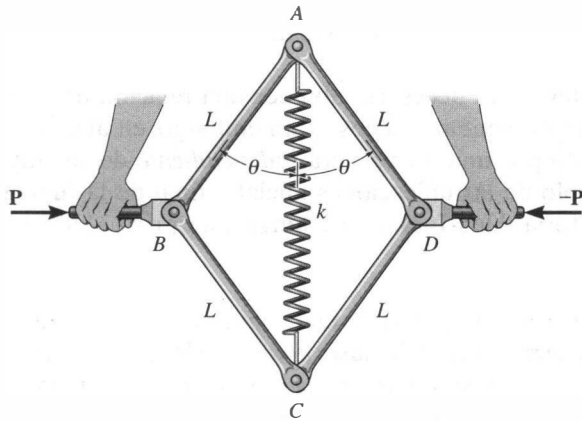
Prob. 11-20

11-22. El cigüeñal está sometido a un par de $M = 50 \text{ lb} \cdot \text{pie}$. Determine la fuerza vertical de compresión F aplicada al pistón por equilibrio cuando $\theta = 60^\circ$.



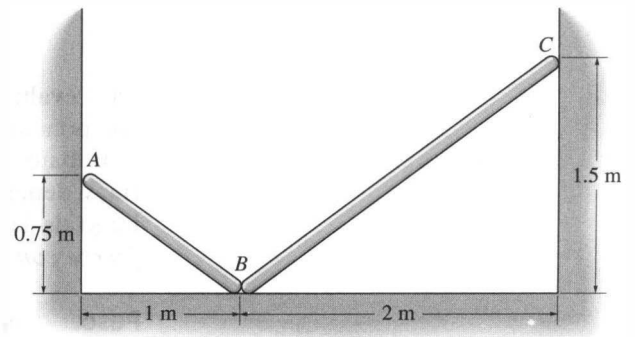
Prob. 11-22

11-23. El dispositivo se usa para hacer ejercicio. Consiste en cuatro barras conectadas mediante pasadores, cada barra tiene longitud L , y un resorte de rigidez k con longitud no alargada a ($< 2L$). Si se aplican fuerzas horizontales \mathbf{P} y $-\mathbf{P}$ a las manijas de manera que θ es disminuido lentamente, determine el ángulo θ para el que la magnitud de \mathbf{P} resulta un máximo.



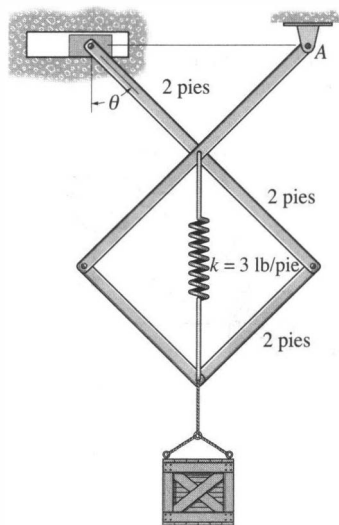
Prob. 11-23

11-25. Las barras AB y BC tienen centros de masa ubicados en sus puntos medios. Si todas las superficies en contacto son lisas y BC tiene masa de 100 kg, determine la masa apropiada de AB requerida por equilibrio.



Prob. 11-25

*11-24. Determine el peso W de la caja si el ángulo $\theta = 45^\circ$. Los resortes no están alargados cuando $\theta = 60^\circ$. Ignore los pesos de los miembros.



Prob. 11-24

*11.4 Fuerzas conservadoras

El trabajo efectuado por una fuerza cuando ésta sufre un *desplazamiento diferencial* ha sido definido como $dU = F \cos \theta ds$, figura 11-11. Si la fuerza es desplazada sobre una trayectoria que tiene una *longitud s finita*, el trabajo se determina integrando sobre la trayectoria, es decir,

$$U = \int_s F \cos \theta ds$$

Para evaluar la integral, es necesario obtener una relación entre F y la componente de desplazamiento $ds \cos \theta$. Sin embargo, en algunos casos el trabajo efectuado por una fuerza será *independiente* de su trayectoria, y dependerá sólo de las ubicaciones inicial y final de la fuerza a lo largo de la trayectoria. Una fuerza que tenga esta propiedad se llama *fuerza conservadora*.

Peso. Considere el cuerpo mostrado en la figura 11-11, que está inicialmente en P' . Si el cuerpo es movido *hacia abajo* a lo largo de la *trayectoria A arbitraria* a la segunda posición, entonces, para un desplazamiento dado ds a lo largo de la trayectoria, la componente del desplazamiento en la dirección de \mathbf{W} tiene una magnitud $dy = ds \cos \theta$, como se muestra. En virtud de que tanto la fuerza como el desplazamiento tienen la misma dirección, el trabajo es positivo; por tanto,

$$U = \int_s W \cos \theta ds = \int_0^y W dy$$

o bien,

$$U = Wy$$

De manera similar, el trabajo efectuado por el peso cuando el cuerpo se mueve una distancia y y hacia arriba hasta P' , a lo largo de la trayectoria arbitraria A' , es

$$U = -Wy$$

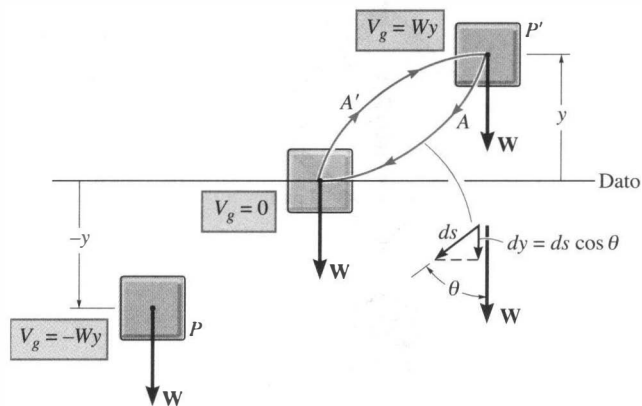


Fig. 11-11

¿Por qué es negativo el trabajo?

El peso de un cuerpo es, por tanto, una fuerza conservadora, ya que el trabajo efectuado por el peso depende *sólo* del *desplazamiento vertical* del cuerpo y es independiente de la trayectoria a lo largo de la cual éste se mueve.

Resorte elástico. La fuerza desarrollada por un resorte elástico ($F_s = ks$) es también una fuerza conservadora. Si el resorte está unido a un cuerpo y el cuerpo se desplaza a lo largo de *cualquier trayectoria*, de manera que ocasione que el resorte se alargue o se comprima desde una posición s_1 hasta otra posición s_2 , el trabajo será negativo, ya que el resorte ejerce una fuerza \mathbf{F}_s sobre el cuerpo que es opuesta al desplazamiento ds del cuerpo, figura 11-12. Ya sea que se trate de una extensión o de una compresión, el trabajo es independiente de la trayectoria y es simplemente

$$\begin{aligned} U &= \int_{s_1}^{s_2} F_s ds = \int_{s_1}^{s_2} (-ks) ds \\ &= -\left(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2\right) \end{aligned}$$

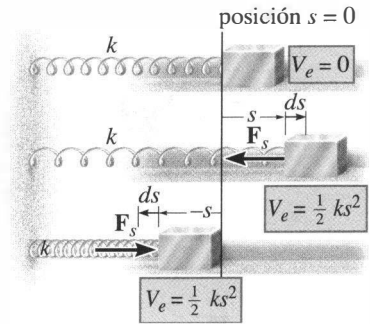


Fig. 11-12

Fricción. En contraste con una fuerza conservadora, considere la fuerza de *fricción* ejercida sobre un cuerpo que se desliza por una superficie fija. El trabajo efectuado por la fuerza de fricción depende de la trayectoria; entre más larga sea la trayectoria, mayor será el trabajo efectuado. En consecuencia, las fuerzas de fricción son *no conservadoras*, y el trabajo efectuado se disipa en forma de calor en el cuerpo.

*11.5 Energía potencial

Cuando una fuerza conservadora actúa sobre un cuerpo, le proporciona la capacidad de efectuar trabajo. Esta capacidad, medida como *energía potencial*, depende de la ubicación del cuerpo.

Energía potencial gravitatoria. Si un cuerpo está ubicado a una distancia y *por arriba* de una referencia fija horizontal o *datum*, figura 11-11, el peso del cuerpo tiene energía potencial gravitatoria *positiva* V_g puesto que \mathbf{W} tiene la capacidad de efectuar trabajo positivo cuando el cuerpo es llevado al datum. Igualmente, si el cuerpo está localizado a una distancia y *por abajo* de la referencia, V_g es *negativa* puesto que el peso efectúa trabajo negativo cuando el cuerpo es movido hacia arriba hasta la referencia. En la referencia, $V_g = 0$.

Si medimos la y como *positiva hacia arriba*, la energía potencial gravitatoria del peso \mathbf{W} del cuerpo es entonces

$$V_g = Wy \quad (11-4)$$

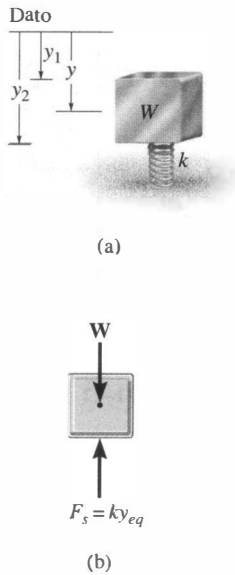


Fig. 11-13

Energía potencial elástica. La energía potencial elástica V_e que un resorte produce sobre un cuerpo unido a él, cuando el resorte es alargado o comprimido desde una posición no deformada ($s = 0$) hasta una posición final s , es

$$V_e = \frac{1}{2}ks^2 \quad (11-5)$$

Aquí, V_e es *siempre positiva* puesto que en la posición deformada el resorte tiene la capacidad de efectuar *trabajo positivo al retornar* el cuerpo a la posición no deformada del resorte, figura 11-12.

Función potencial. En el caso general, si un cuerpo está sometido a fuerzas gravitatorias y elásticas, la *energía potencial o función potencial* V del cuerpo puede ser expresada como la suma algebraica

$$V = V_g + V_e \quad (11-6)$$

donde la medida de V depende de la ubicación del cuerpo con respecto a una referencia seleccionado de acuerdo con las ecuaciones 11-4 y 11-5.

En general, si un sistema de cuerpos rígidos conectados sin fricción tiene un *solo grado de libertad* de manera que su posición desde la referencia es definida por la coordenada independiente q , entonces la función potencial para el sistema puede ser expresada como $V = V(q)$. El trabajo efectuado por todas las fuerzas conservadoras que actúan sobre el sistema al moverse éste desde q_1 hasta q_2 se mide por medio de la *diferencia* en V ; esto es,

$$U_{1-2} = V(q_1) - V(q_2) \quad (11-7)$$

Por ejemplo, la función potencial para un sistema que consiste en un bloque de peso W soportado por un resorte, figura 11-13a, puede ser expresada en términos de su coordenada independiente ($q = y$) y, medida desde una referencia fija ubicada en la longitud no alargada del resorte; tenemos

$$\begin{aligned} V &= V_g + V_e \\ &= -Wy + \frac{1}{2}ky^2 \end{aligned} \quad (11-8)$$

Si el bloque se mueve desde y_1 hasta una posición más baja y_2 , entonces el trabajo de W y F_s es

$$U_{1-2} = V(y_1) - V(y_2) = -W[y_1 - y_2] + \frac{1}{2}ky_1^2 - \frac{1}{2}ky_2^2$$

*11.6 Criterio de la

Sistema con un grado de libertad. Cuando el desplazamiento de un sistema conectado sin fricción es *infinitesimal*, es decir, de q a $q + dq$, la ecuación 11-7 toma la forma

$$dU = V(q) - V(q + dq)$$

o bien,

$$dU = -dV$$

Además, si el sistema sufre un *desplazamiento virtual* δq , en vez de un desplazamiento real dq , entonces $\delta U = -\delta V$. Por equilibrio, el principio del trabajo virtual requiere que $\delta U = 0$, y por tanto, siempre que se conozca la función potencial del sistema, también será necesario que $\delta V = 0$. Este requisito podemos expresarlo igualmente como

$$\frac{dV}{dq} = 0 \quad (11-9)$$

Por consiguiente, *cuando un sistema de cuerpos rígidos conectado sin fricción está en equilibrio, la primera variación o cambio en V es cero*. Este cambio es determinado tomando la *primera derivada* de la función potencial y haciéndola igual a cero. Por ejemplo, usando la ecuación 11-8 para determinar la posición de equilibrio para el resorte y el bloque mostrados en la figura 11-13a, tenemos

$$\frac{dV}{dy} = -W + ky = 0$$

Por tanto, la posición de equilibrio $y = y_{\text{eq}}$ es

$$y_{\text{eq}} = \frac{W}{k}$$

Por supuesto, se obtiene el *mismo resultado* aplicando $\Sigma F_y = 0$ a las fuerzas que actúan en el diagrama de cuerpo libre del bloque, figura 11-13b.

Sistema con n grados de libertad. Cuando el sistema de cuerpos conectados tiene n grados de libertad, la energía potencial total almacenada en el sistema será una función de n coordenadas independientes q_n , es decir, $V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$. Para aplicar el criterio de equilibrio $\delta V = 0$, es necesario determinar el cambio en la energía potencial δV usando la “regla de la cadena” del cálculo diferencial; esto es,

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_n} \delta q_n = 0$$

Como los desplazamientos virtuales $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ son independientes uno de otro, la ecuación es satisfecha siempre que

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0$$

Por tanto, *es posible escribir n ecuaciones independientes para un sistema con n grados de libertad*.

*11.7 Estabil

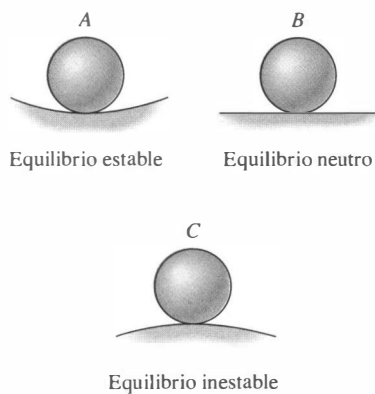


Fig. 11-14



En presencia de fuertes vientos o cuando se desplazan por una curva, estas carretas con caña de azúcar pueden volverse inestables y volcarse puesto que sus centros de gravedad se ubican muy arriba y fuera del camino cuando están cargadas al máximo.

Una vez definida la configuración de equilibrio para un cuerpo o sistema de cuerpos conectados, a veces es importante investigar el “tipo” de equilibrio o la estabilidad de la configuración. Por ejemplo, considere la posición de una bola que descansa en un punto sobre cada una de las tres sendas mostradas en la figura 11-14. Cada situación representa un estado de equilibrio para la bola. Cuando la bola se encuentra en *A*, se dice que está en *equilibrio estable* porque si se le imprime un pequeño desplazamiento hacia arriba de la senda, siempre *retornará* a su posición original, más baja. En *A*, su energía potencial total es un *mínimo*. Cuando la bola está en *B*, tiene *equilibrio neutro*. Un pequeño desplazamiento hacia la izquierda o hacia la derecha de *B* no alterará esta condición. La bola *permanece* en equilibrio en la posición desplazada, y por tanto, su energía potencial es *constante*. Cuando la bola se encuentra en *C*, está en *equilibrio inestable*. Aquí, un pequeño desplazamiento ocasionará que la energía potencial de la bola *disminuya*, por lo que rodará *alejándose* de su posición original más alta. En *C*, la energía potencial de la bola es un *máximo*.

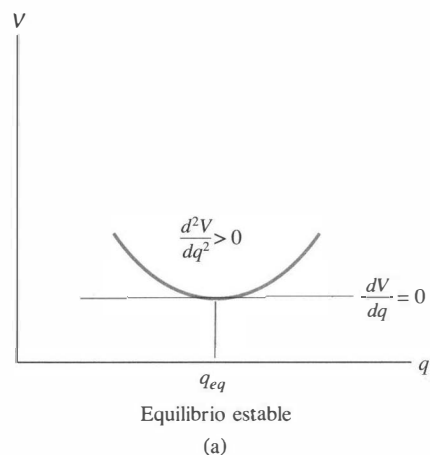
Tipos de equilibrio. El ejemplo recién presentado ilustra que uno de tres tipos de posición de equilibrio puede ser especificado para un cuerpo o sistema de cuerpos conectados.

1. El *equilibrio estable* ocurre cuando un pequeño desplazamiento del sistema ocasiona que el sistema retorne a su posición original. En este caso la energía potencial original del sistema es un mínimo.
2. El *equilibrio neutro* ocurre cuando un pequeño desplazamiento del sistema ocasiona que el sistema permanezca en su estado desplazado. En este caso la energía potencial del sistema permanece constante.
3. El *equilibrio inestable* ocurre cuando un pequeño desplazamiento del sistema ocasiona que el sistema se aleje aún más de su posición original. En este caso la energía potencial original del sistema es un máximo.

Sistema con un grado de libertad. Por *equilibrio* de un sistema con un solo grado de libertad, definido mediante la coordenada independiente q , se ha mostrado que la primera derivada de la función potencial del sistema debe ser igual a cero; es decir, $dV/dq = 0$. Si la función potencial $V = V(q)$ es graficada, figura 11-15, la primera derivada (posición de equilibrio) se representa como la pendiente dV/dq , que es cero cuando la función es un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.

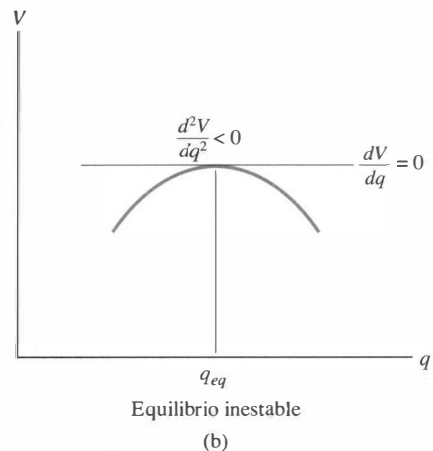
Si la *estabilidad* de un cuerpo debe ser investigada, es necesario determinar la *segunda derivada* de V y evaluarla en la posición de equilibrio $q = q_{eq}$. Como se muestra en la figura 11-15a, si $V = V(q)$ es un *mínimo*, entonces

$$\frac{dV}{dq} = 0, \quad \frac{d^2V}{dq^2} > 0 \quad \text{equilibrio estable} \quad (11-10)$$



Si $V = V(q)$ es un *máximo*, figura 11-15b, entonces

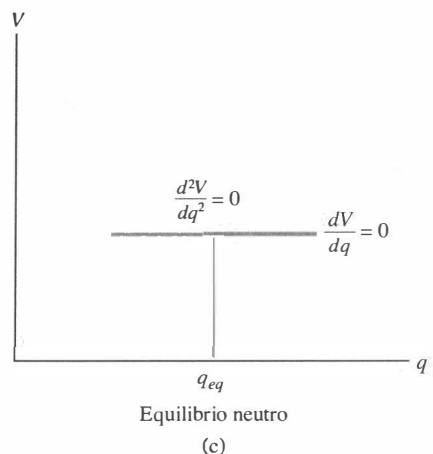
$$\frac{dV}{dq} = 0, \quad \frac{d^2V}{dq^2} < 0 \quad \text{equilibrio inestable} \quad (11-11)$$



Si la segunda derivada es cero, será necesario investigar derivadas de *orden superior* para determinar la estabilidad. En particular, ocurrirá equilibrio estable si el orden de la derivada restante más baja no nula es *par* y el signo de esta derivada no nula es positivo cuando es evaluada en $q = q_{eq}$; de otra manera, el equilibrio es inestable.

Si el sistema está en equilibrio neutro, figura 11-15c, se requiere que

$$\frac{dV}{dq} = \frac{d^2V}{dq^2} = \frac{d^3V}{dq^3} = \dots = 0 \quad \text{equilibrio neutro} \quad (11-12)$$



ya que V debe ser constante en y alrededor de la “vecindad” de q_{eq} .

Sistema con dos grados de libertad. Un criterio para investigar la estabilidad resulta cada vez más complejo conforme aumenta el número de grados de libertad para el sistema. Para un sistema con dos grados de libertad, definidos por coordenadas independientes (q_1, q_2) , se puede verificar (usando el cálculo de funciones de dos variables) que el equilibrio y la estabilidad ocurren en un punto (q_{1eq}, q_{2eq}) cuando

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \right) \right] < 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} > 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} > 0$$

Fig. 11-15

Tanto el equilibrio como la inestabilidad ocurren cuando

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \right) \right] < 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} < 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} < 0$$

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Usando los métodos de energía potencial, las posiciones de equilibrio y la estabilidad de un cuerpo o de un sistema de cuerpos conectados, y que tienen un solo grado de libertad, se pueden obtener aplicando el siguiente procedimiento.

Función potencial.

- Esboce el sistema de modo que quede ubicado en alguna *posición arbitraria* especificada por la coordenada independiente q .
- Establezca una referencia horizontal a través de un *punto fijo** y exprese la *energía potencial gravitatoria* V_g en términos del peso W de cada miembro y de su distancia vertical y desde la referencia, $V_g = Wy$.
- Exprese la energía potencial elástica V_e del sistema en términos del alargamiento o la compresión s de cualquier resorte conectado y de la rigidez k del resorte, $V_e = \frac{1}{2}ks^2$.
- Formule la función potencial $V = V_g + V_e$ y exprese las *coordenadas de posición* y s en términos de la coordenada independiente q .

Posición de equilibrio.

- La posición de equilibrio se determina tomando la primera derivada de V y haciéndola igual a cero, $\delta V = 0$.

Estabilidad.

- La estabilidad en la posición de equilibrio es determinada evaluando la segunda o la de mayor orden derivadas de V .
- Si la segunda derivada es mayor que cero, el cuerpo es estable; si todas las derivadas son iguales a cero el cuerpo está en equilibrio neutro, y si la segunda derivada es menor que cero, el cuerpo es inestable.

*La ubicación de la referencia es *arbitraria* ya que sólo los *cambios* o diferencias de V son requeridos para investigar la posición de equilibrio y su estabilidad.

EJEMPLO 11.5

El eslabón uniforme mostrado en la figura 11-16a tiene una masa de 10 kg. El resorte no está alargado cuando $\theta = 0^\circ$. Determine el ángulo θ por equilibrio e investigue la estabilidad en la posición de equilibrio.

Solución

Función potencial. La referencia es establecido en la parte superior del eslabón cuando el resorte no está estirado, figura 11-16b. Cuando el eslabón se ubica en la posición arbitraria θ , el resorte aumenta su energía potencial al alargarse y el peso disminuye su energía potencial. Por tanto,

$$V = V_e + V_g = \frac{1}{2}ks^2 - W\left(s + \frac{l}{2} \cos \theta\right)$$

Como $l = s + l \cos \theta$ o $s = l(1 - \cos \theta)$, entonces

$$V = \frac{1}{2}kl^2(1 - \cos \theta)^2 - \frac{Wl}{2}(2 - \cos \theta)$$

Posición de equilibrio. La primera derivada de V resulta en

$$\frac{dV}{d\theta} = kl^2(1 - \cos \theta)\text{sen } \theta - \frac{Wl}{2} \text{sen } \theta = 0$$

o bien,

$$l\left[kl(1 - \cos \theta) - \frac{W}{2}\right] \text{sen } \theta = 0$$

Esta ecuación es satisfecha si

$$\text{sen } \theta = 0 \quad \theta = 0^\circ \quad \text{Resp.}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{W}{2kl}\right) = \cos^{-1}\left[1 - \frac{10(9.81)}{2(200)(0.6)}\right] = 53.8^\circ \quad \text{Resp.}$$

Estabilidad. Al determinar la segunda derivada de V resulta

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{d\theta^2} &= kl^2(1 - \cos \theta) \cos \theta + kl^2 \text{sen } \theta \text{sen } \theta - \frac{Wl}{2} \cos \theta \\ &= kl^2(\cos \theta - \cos 2\theta) - \frac{Wl}{2} \cos \theta \end{aligned}$$

Sustituyendo valores para las constantes, con $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 53.8^\circ$, obtenemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2V}{d\theta^2} \right|_{\theta=0^\circ} &= 200(0.6)^2(\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) - \frac{10(9.81)(0.6)}{2} \cos 0^\circ \\ &= -29.4 < 0 \quad (\text{equilibrio inestable en } \theta = 0^\circ) \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2V}{d\theta^2} \right|_{\theta=53.8^\circ} &= 200(0.6)^2(\cos 53.8^\circ - \cos 107.6^\circ) - \frac{10(9.81)(0.6)}{2} \cos 53.8^\circ \\ &= 46.9 > 0 \quad (\text{equilibrio estable en } \theta = 53.8^\circ) \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

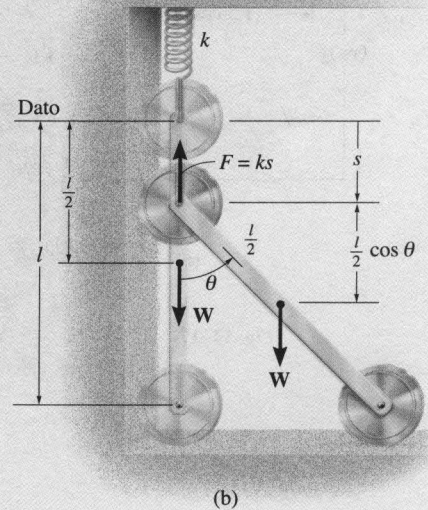
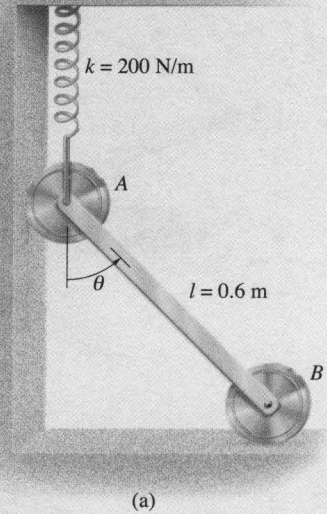


Fig. 11-16

EJEMPLO 11.6

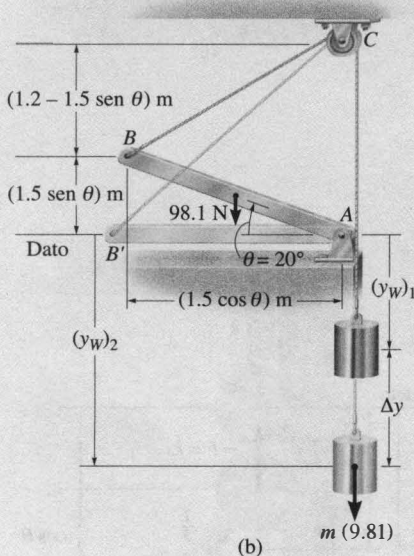
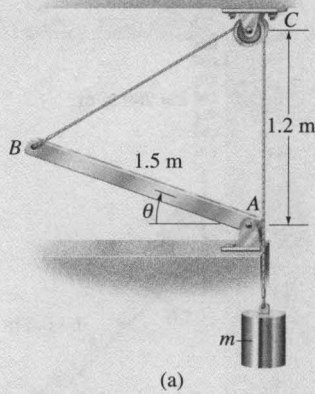


Fig. 11-17

Determine la masa m del bloque requerida por equilibrio de la barra uniforme de 10 kg mostrada en la figura 11-17a cuando $\theta = 20^\circ$. Investigue la estabilidad en la posición de equilibrio.

Solución

Función potencial. La referencia es establecido a través del punto A, figura 11-17b. Cuando $\theta = 0^\circ$, el bloque se supone suspendido $(y_w)_1$ por debajo de la referencia. Por tanto, en la posición θ ,

$$V = V_e + V_g = 98.1 \left(\frac{1.5 \sin \theta}{2} \right) - m(9.81)(\Delta y) \quad (1)$$

La distancia $\Delta y = (y_w)_2 - (y_w)_1$ puede ser relacionada con la coordenada independiente θ midiendo la diferencia en las longitudes de las cuerdas $B'C$ y BC . Como

$$B'C = \sqrt{(1.5)^2 + (1.2)^2} = 1.92$$

$$BC = \sqrt{(1.5 \cos \theta)^2 + (1.2 - 1.5 \sin \theta)^2} = \sqrt{3.69 - 3.60 \sin \theta}$$

entonces

$$\Delta y = B'C - BC = 1.92 - \sqrt{3.69 - 3.60 \sin \theta}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación 1 resulta

$$V = 98.1 \left(\frac{1.5 \sin \theta}{2} \right) - m(9.81)(1.92 - \sqrt{3.69 - 3.60 \sin \theta}) \quad (2)$$

Posición de equilibrio.

$$\frac{dV}{d\theta} = 73.6 \cos \theta - \left[\frac{m(9.81)}{2} \right] \left(\frac{3.60 \cos \theta}{\sqrt{3.69 - 3.60 \sin \theta}} \right) = 0$$

$$\frac{dV}{d\theta} \Big|_{\theta=20^\circ} = 69.14 - 10.58m = 0$$

$$m = \frac{69.14}{10.58} = 6.53 \text{ kg}$$

Resp.

Estabilidad. Tomando la segunda derivada de la ecuación 2, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{d\theta^2} &= -73.6 \sin \theta - \left[\frac{m(9.81)}{2} \right] \left(\frac{-1}{2} \right) \frac{-(3.60 \cos \theta)^2}{(3.69 - 3.60 \sin \theta)^{3/2}} \\ &\quad - \left[\frac{m(9.81)}{2} \right] \left(\frac{-3.60 \sin \theta}{\sqrt{3.69 - 3.60 \sin \theta}} \right) \end{aligned}$$

Para la posición de equilibrio $\theta = 20^\circ$, con $m = 6.53$ kg, entonces

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -47.6 < 0 \quad (\text{equilibrio inestable en } \theta = 20^\circ) \text{ Resp.}$$

EJEMPLO 11.7

El bloque homogéneo con masa m descansa sobre la superficie superior del cilindro, figura 11-18a. Demuestre que ésta es una condición de equilibrio inestable si $h > 2R$.

Solución

Función potencial. La referencia es establecido en la base del cilindro, figura 11-18b. Si el bloque es desplazado una cantidad θ desde la posición de equilibrio, la función potencial puede ser escrita en la forma

$$\begin{aligned} V &= V_e + V_g \\ &= 0 + mgy \end{aligned}$$

A partir de la figura 11-18b,

$$y = \left(R + \frac{h}{2}\right) \cos \theta + R\theta \sin \theta$$

En consecuencia,

$$V = mg \left[\left(R + \frac{h}{2}\right) \cos \theta + R\theta \sin \theta \right]$$

Posición de equilibrio.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} &= mg \left[-\left(R + \frac{h}{2}\right) \sin \theta + R \sin \theta + R\theta \cos \theta \right] = 0 \\ &= mg \left(-\frac{h}{2} \sin \theta + R\theta \cos \theta \right) = 0 \end{aligned}$$

Resulta evidente que $\theta = 0^\circ$ es la posición de equilibrio que satisface esta ecuación.

Estabilidad. Tomando la segunda derivada de V obtenemos

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mg \left(-\frac{h}{2} \cos \theta + R \cos \theta - R\theta \sin \theta \right)$$

En $\theta = 0^\circ$,

$$\left. \frac{d^2V}{d\theta^2} \right|_{\theta=0^\circ} = -mg \left(\frac{h}{2} - R \right)$$

Como todas las constantes son positivas, el bloque está en equilibrio inestable si $h > 2R$, ya que entonces $d^2V/d\theta^2 < 0$.

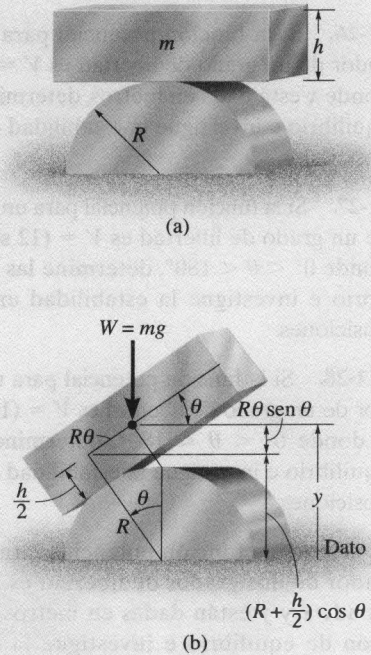


Fig. 11-18

PROBLEMAS

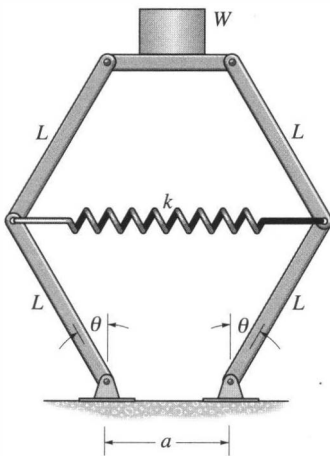
11-26. Si la función potencial para un sistema conservador de un grado de libertad es $V = (8x^3 - 2x^2 - 10) J$, donde x está dada en metros, determine las posiciones de equilibrio e investigue la estabilidad en cada una de esas posiciones.

11-27. Si la función potencial para un sistema conservador de un grado de libertad es $V = (12 \sin 2\theta + 15 \cos \theta) J$, donde $0^\circ < \theta < 180^\circ$, determine las posiciones de equilibrio e investigue la estabilidad en cada una de esas posiciones.

***11-28.** Si la función potencial para un sistema conservador de un grado de libertad es $V = (10 \cos 2\theta + 25 \sin \theta) J$, donde $0^\circ < \theta < 180^\circ$, determine las posiciones de equilibrio e investigue la estabilidad en cada una de esas posiciones.

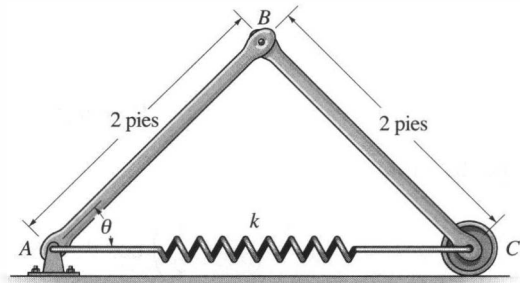
11-29. Si la función potencial para un sistema conservador de dos grados de libertad es $V = (9y^2 + 18x^2) J$, donde x y y están dadas en metros, determine la posición de equilibrio e investigue la estabilidad en esta posición.

11-30. El resorte de la balanza tiene una longitud no alargada de a . Determine el ángulo θ por equilibrio cuando un peso W es sostenido sobre la plataforma. Ignore el peso de los miembros. ¿Qué valor de W se requiere para mantener la balanza en equilibrio neutro cuando $\theta = 0^\circ$?



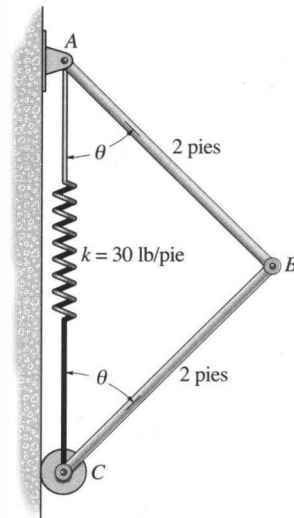
Prob. 11-30

11-31. Cada una de las dos barras tiene un peso de 8 lb. Determine la rigidez k requerida en el resorte para que las dos barras estén en equilibrio cuando $\theta = 30^\circ$. El resorte tiene una longitud no estirada de 1 pie.



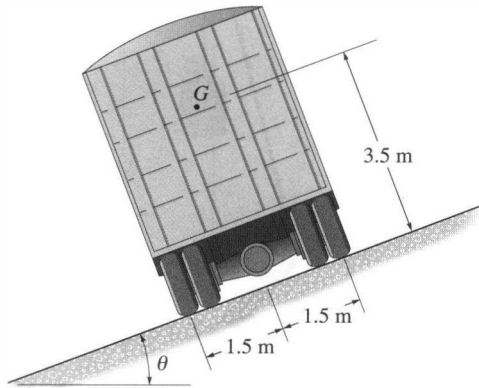
Prob. 11-31

***11-32.** Cada una de las dos barras tiene un peso de 8 lb. Determine el ángulo θ por equilibrio e investigue la estabilidad en la posición de equilibrio. El resorte tiene una longitud no estirada de 1 pie.



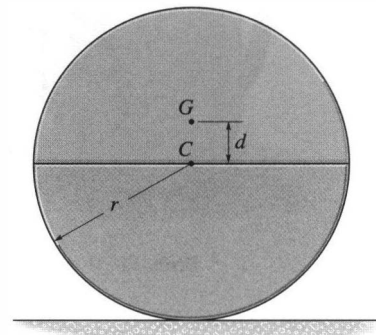
Prob. 11-32

11-33. El camión tiene una masa de 20 Mg y su centro de masa en G . Determine la pendiente máxima θ en la que puede estacionarse sin voltearse e investigue la estabilidad en esta posición.



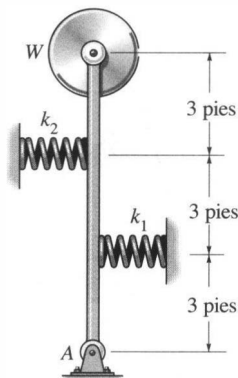
Prob. 11-33

11-35. El cilindro está hecho de dos materiales en tal forma que tiene una masa m y centro de gravedad en el punto G . Muestre que cuando G se encuentra por arriba del centroide C del cilindro, el equilibrio es inestable.



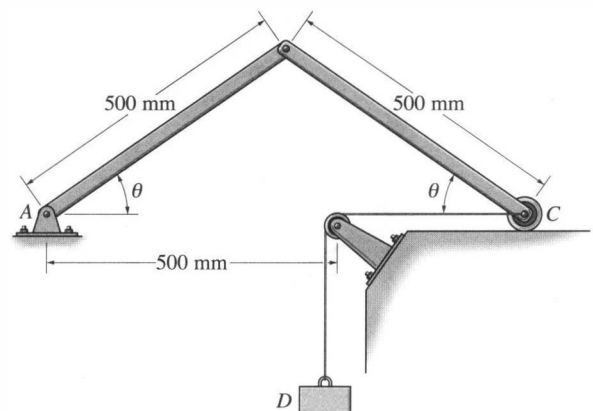
Prob. 11-35

11-34. La barra soporta un peso de $W = 500$ lb en su extremo. Si originalmente los resortes están sin estirar cuando la barra se encuentra en posición vertical, determine la rigidez $k_1 = k_2 = k$ requerida en los resortes de manera que la barra esté en equilibrio neutro cuando se encuentre en posición vertical.



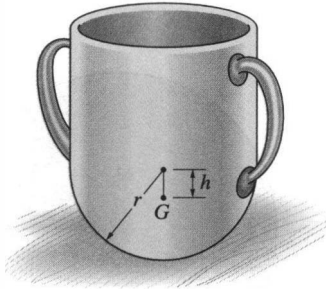
Prob. 11-34

***11-36.** Determine el ángulo θ por equilibrio e investigue la estabilidad en esta posición. Cada barra tiene una masa de 3 kg y el bloque suspendido D tiene una masa de 7 kg. La cuerda DC tiene una longitud total de 1 m.



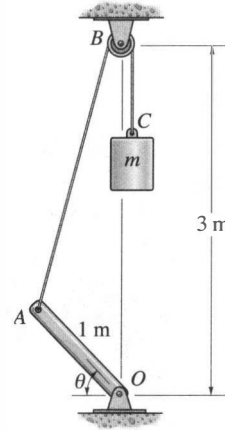
Prob. 11-36

11-37. La taza tiene un fondo semiesférico y masa m . Determine la posición h del centro de masa G de manera que la taza esté en equilibrio neutro.



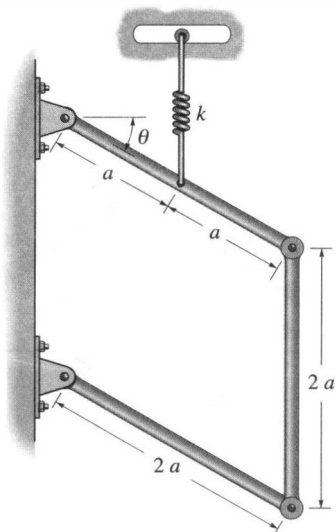
Prob. 11-37

11-39. Si la barra uniforme OA tiene una masa de 12 kg, determine la masa m que la mantendrá en equilibrio cuando $\theta = 30^\circ$. El punto C coincide con B cuando OA es horizontal. Ignore el tamaño de la polea situada en B .



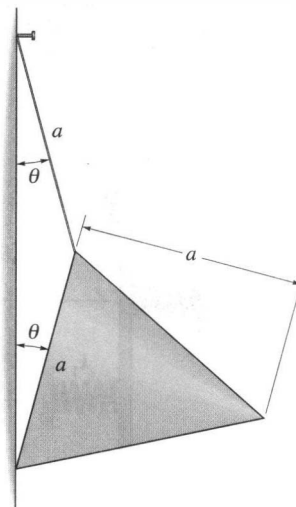
Prob. 11-39

11-38. Si cada uno de los tres eslabones del mecanismo tiene un peso W , determine el ángulo θ por equilibrio. El resorte, que siempre permanece vertical, no está alargado cuando $\theta = 0^\circ$.



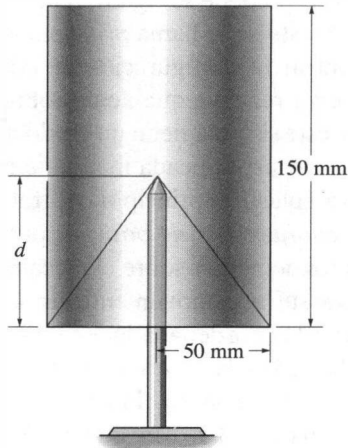
Prob. 11-38

*11-40. El cono circular recto uniforme con masa m está suspendido de la cuerda como se muestra. Determine el ángulo θ bajo el que cuelga de la pared por equilibrio. ¿Está el cono en equilibrio estable?



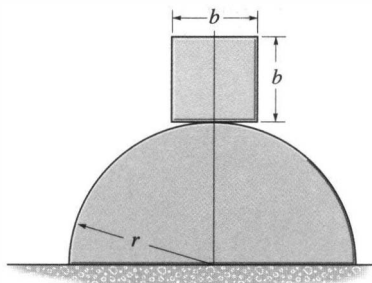
Prob. 11-40

11-41. El cilindro homogéneo tiene una cavidad cónica en su base como se muestra. Determine la profundidad d que es necesaria en la cavidad para que el cilindro se equilibre sobre el pivote y permanezca en equilibrio neutro.



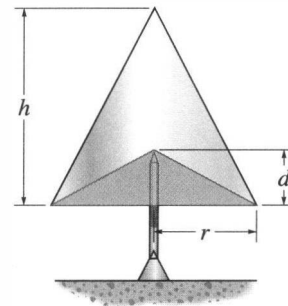
Prob. 11-41

11-42. Un bloque homogéneo descansa en la parte superior de la superficie cilíndrica. Derive la relación entre el radio r del cilindro y la dimensión b del bloque para obtener equilibrio estable. *Sugerencia:* Establezca la función de energía potencial para un ángulo θ pequeño, es decir, aproxime $\sin \theta \approx \theta$, y $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$.



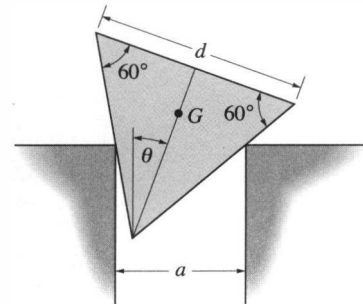
Prob. 11-42

11-43. El cono homogéneo tiene una cavidad cónica en su base como se muestra. Determine la profundidad d de la cavidad en términos de h de manera que el cono se equilibre sobre el pivote y permanezca en equilibrio neutro.



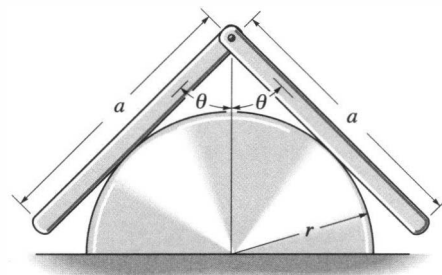
Prob. 11-43

***11-44.** El bloque triangular de peso W descansa sobre las esquinas lisas que están a una distancia a entre sí. Si el bloque tiene tres lados iguales de longitud d , determine el ángulo θ por equilibrio.



Prob. 11-44

11-45. Dos barras uniformes, cada una con peso W , están conectadas mediante un pasador en sus extremos. Si las barras se colocan sobre una superficie cilíndrica lisa, muestre que el ángulo θ por equilibrio debe satisfacer la ecuación $\cos \theta / \sin^3 \theta = a/2r$.



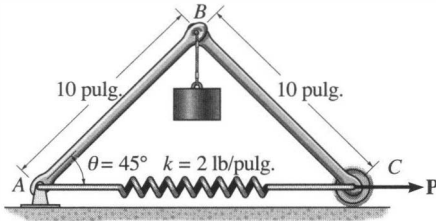
Prob. 11-45

REPASO DEL CAPÍTULO

- **Principio del trabajo virtual.** Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo efectuarán *trabajo virtual* cuando el cuerpo sufra un desplazamiento o una rotación diferencial *imaginarios*. Por razones de equilibrio, la suma del trabajo virtual efectuado por todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe ser igual a cero para cualquier desplazamiento virtual. A esto se le llama *principio del trabajo virtual*, y es útil para encontrar la configuración de equilibrio de un mecanismo o de una fuerza reactiva que actúe sobre una serie de miembros conectados. Si este sistema tiene un grado de libertad, entonces su posición puede ser especificada mediante una coordenada independiente q . Para aplicar el principio del trabajo virtual, es necesario usar primero *coordenadas de posición* para localizar todas las fuerzas y momentos actuantes sobre el mecanismo que efectuarán trabajo cuando éste sufra un movimiento virtual δq . Las coordenadas se relacionan con la coordenada independiente q , y luego esas expresiones son diferenciadas para relacionar los desplazamientos coordenados *virtuales* con δq . Finalmente, se escribe la ecuación del trabajo virtual para el mecanismo en términos del desplazamiento común δq y luego se iguala a cero. Factorizando δq fuera de la ecuación, es posible determinar entonces la fuerza o el momento de par desconocidos, o bien la posición de equilibrio q .
- **Criterio de la energía potencial para el equilibrio.** Cuando un sistema está sometido sólo a fuerzas conservadoras, como las fuerzas gravitatorias o las de un resorte, entonces la configuración de equilibrio puede ser determinada usando la *función de energía potencial* V para el sistema. Esta función se establece expresando la energía potencial del peso y del resorte para el sistema en términos de la coordenada independiente q . Una vez formulada, su primera derivada se establece como igual a cero, $dV/dq = 0$. La solución proporciona la posición de equilibrio q_{eq} del sistema. La estabilidad del sistema puede ser investigada tomando la segunda derivada de V . Si esta es evaluada en q_{eq} y $d^2V/dq^2 > 0$, se tiene un *equilibrio estable*. Si $d^2V/dq^2 < 0$, se tiene entonces un *equilibrio inestable*. Si todas las derivadas de orden superior son cero, entonces el sistema está en *equilibrio neutro*.

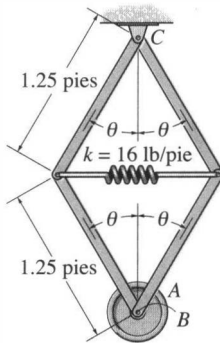
PROBLEMAS DE REPASO

11-46. Los eslabones uniformes AB y BC pesan cada uno 2 lb y el cilindro pesa 20 lb. Determine la fuerza horizontal P requerida para mantener el mecanismo en la posición cuando $\theta = 45^\circ$. El resorte tiene una longitud no alargada de 6 pulg.



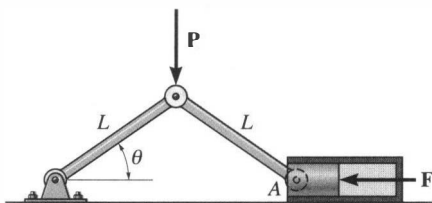
Prob. 11-46

11-47. El resorte unido al mecanismo tiene una longitud no alargada cuando $\theta = 90^\circ$. Determine la posición θ por equilibrio e investigue la estabilidad del mecanismo en esta posición. El disco A está conectado mediante un pasador al bastidor colocado en B y tiene un peso de 20 lb. Ignore el peso de las barras.



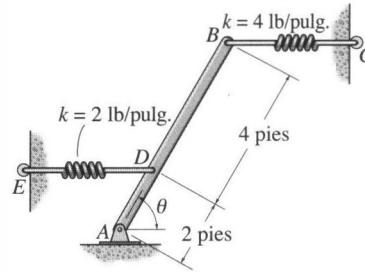
Prob. 11-47

***11-48.** La junta de codillo está sometida a la carga P . Determine la fuerza de compresión F que esta junta genera sobre el cilindro situado en A como una función de θ .



Prob. 11-48

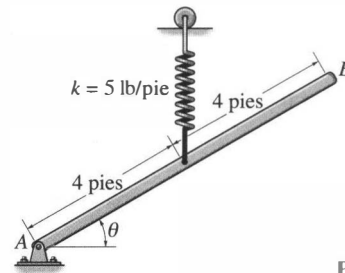
11-49. La viga uniforme AB pesa 100 lb. Si ambos resortes DE y BC no están alargados cuando $\theta = 90^\circ$, determine el ángulo θ por equilibrio usando el principio de la energía potencial. Investigue la estabilidad en la posición de equilibrio. Ambos resortes actúan siempre en la posición horizontal debido a las guías de rodillo colocadas en C y E .



Prob. 11-49

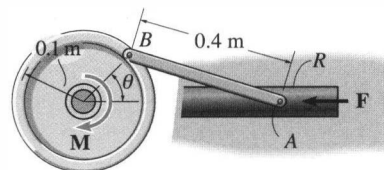
11-50. La barra uniforme AB pesa 10 lb. Si el resorte unido a ella no está alargado cuando $\theta = 90^\circ$, use el método del trabajo virtual y determine el ángulo θ por equilibrio. Observe que el resorte permanece siempre en posición vertical debido a la guía de rodillo.

11-51. Resuelva el problema 11-50 usando el principio de la energía potencial. Investigue la estabilidad de la barra cuando está en la posición de equilibrio.



Probs. 11-50/51

***11-52.** La punzonadora consiste en un pistón R , una biela AB y un volante. Si se aplica una torca de $M = 50 \text{ N} \cdot \text{m}$ al volante, determine la fuerza F aplicada en el pistón para mantener la biela en la posición $\theta = 60^\circ$.



Prob. 11-52

A

Fórmula cuadrática

Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Funciones hiperbólicas

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Identidades trigonométricas

$$\sin \theta = \frac{A}{C}, \quad \csc \theta = \frac{C}{A}$$

$$\cos \theta = \frac{B}{C}, \quad \sec \theta = \frac{C}{B}$$

$$\tan \theta = \frac{A}{B}, \quad \cot \theta = \frac{B}{A}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin(\theta \pm \phi) = \sin \theta \cos \phi \pm \cos \theta \sin \phi$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

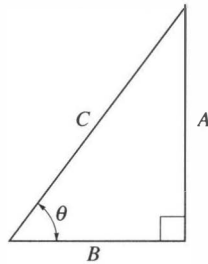
$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos \theta \cos \phi \mp \sin \theta \sin \phi$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}, \quad \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$



Desarrollos en series de potencias

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Derivadas

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx} \quad \frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad \frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \quad \frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \frac{du}{dx} \quad \frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \tan u \sec u \frac{du}{dx} \quad \frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

Integrales

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln(a+bx) + C$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ba}} \ln \left[\frac{a+x\sqrt{-ab}}{a-x\sqrt{-ab}} \right] + C, \\ ab < 0$$

$$\int \frac{x dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b} \ln(bx^2+a) + C$$

$$\int \frac{x^2 dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b\sqrt{ab}} \tan^{-1} \frac{x\sqrt{ab}}{a} + C, ab > 0$$

$$\int \sqrt{a+bx} dx = \frac{2}{3b} \sqrt{(a+bx)^3} + C$$

$$\int x\sqrt{a+bx} dx = \frac{-2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a+bx} dx = \\ \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3} + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right] + C, \\ a > 0$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2} dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(a^2-x^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2} dx = -\frac{x}{4} \sqrt{(a^2-x^2)^3} \\ + \frac{a^2}{8} \left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) + C, a > 0$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \\ \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) \right] + C$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{4} \sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} \\ \mp \frac{a^2}{8} x \sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b} + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left[\sqrt{a+bx+cx^2} + \\ x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}} \right] + C, c > 0 \\ = \frac{1}{\sqrt{-c}} \sin^{-1} \left(\frac{-2cx-b}{\sqrt{b^2-4ac}} \right) + C, c < 0$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a^2} \cos(ax) + \frac{x}{a} \sin(ax) + C$$

$$\int x^2 \cos(ax) dx = \frac{2x}{a^2} \cos(ax) + \frac{a^2x^2-2}{a^3} \sin(ax) + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax-1) + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

Análisis numérico y por computadora

La aplicación de las leyes de la mecánica conducirá, ocasionalmente, a un sistema de ecuaciones para las cuales una solución en forma cerrada es difícil o imposible de obtener. Confrontados con esta situación, los ingenieros usan a menudo un método numérico que en la mayoría de los casos puede ser programado en una microcomputadora o en una calculadora de bolsillo “programable”. Aquí presentaremos brevemente un programa de computadora muy útil en la resolución de conjuntos de ecuaciones lineales algebraicas, y tres métodos numéricos que se pueden usar para resolver una ecuación algebraica o trascendental, evaluar una integral definida, y resolver una ecuación diferencial ordinaria. La aplicación de cada método será explicada por medio de un ejemplo, y se proporciona un programa de computadora asociado escrito en Microsoft BASIC, el cual está diseñado para correr en la mayoría de las computadoras personales.* Para efectuar un análisis adicional relativo a la revisión de la exactitud de cada método y de los errores inherentes que pueden generarse a partir de sus aplicaciones, deberá consultarse un texto especializado en análisis numérico.

B.1 Ecuaciones al

La aplicación de las ecuaciones de equilibrio estático o de las ecuaciones de movimiento demanda algunas veces resolver un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales. El programa de computadora que aparece en la figura B-1 se puede usar con este fin. Este programa se basa en el método de eliminación de Gauss y puede resolver un máximo de 10 ecuaciones

*Tipos similares de programas para calculadoras de bolsillo programables pueden ser escritos o comprados.

```

1 PRINT"Linear system of equations":PRINT
2 DIM A(10,11)
3 INPUT"Input number of equations : ",N
4 PRINT
5 PRINT"A coefficients"
6 FOR I = 1 TO N
7 FOR J = 1 TO N
8 PRINT "A(";I;";";J;
9 INPUT")=",A(I,J)
10 NEXT J
11 NEXT I
12 PRINT
13 PRINT"B coefficients"
14 FOR I = 1 TO N
15 PRINT "B(";I;";";
16 INPUT")=",A(I,N+1)
17 NEXT I
18 GOSUB 25
19 PRINT
20 PRINT"Unknowns"
21 FOR I = 1 TO N
22 PRINT "X(";I;";")=";A(I,N+1)
23 NEXT I
24 END
25 REM Subroutine Gaussian
26 FOR M=1 TO N
27 NP=M
28 BG=ABS(A(M,M))
29 FOR I = M TO N
30 IF ABS(A(I,M))<=BG THEN 33
31 BG=ABS(A(I,M))
32 NP=I
33 NEXT I
34 IF NP=M THEN 40
35 FOR I = M TO N+1
36 TE=A(M,I)
37 A(M,I)=A(NP,I)
38 A(NP,I)=TE
39 NEXT I
40 FOR I = M+1 TO N
41 FC=A(I,M)/A(M,M)
42 FOR J = M+1 TO N+1
43 A(I,J)=A(I,J)-FC*A(M,J)
44 NEXT J
45 NEXT I
46 NEXT M
47 A(N,N+1)=A(N,N+1)/A(N,N)
48 FOR I = N-1 TO 1 STEP -1
49 SM=0
50 FOR J=I+1 TO N
51 SM=SM+A(I,J)*A(J,N+1)
52 NEXT J
53 A(I,N+1)=(A(I,N+1)-SM)/A(I,I)
54 NEXT I
55 RETURN

```

Fig. B-1

con 10 incógnitas. Para usarlo, las ecuaciones deben escribirse primero en el siguiente formato general:

$$\begin{aligned}
 A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= B_1 \\
 A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= B_2 \\
 &\vdots \\
 A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \cdots + A_{nn}x_n &= B_n
 \end{aligned}$$

Los coeficientes “A” y “B” son “pedidos” al correr el programa. La salida presenta las incógnitas x_1, \dots, x_n .

EJEMPLO B.1

Resuelva las dos ecuaciones

$$3x_1 + x_2 = 4$$

$$2x_1 - x_2 = 10$$

Solución

Cuando el programa empieza a correr, pide el número de ecuaciones (2); luego los coeficientes A en la secuencia $A_{11} = 3, A_{12} = 1, A_{21} = 2, A_{22} = -1$, y finalmente los coeficientes B, $B_1 = 4, B_2 = 10$. La salida aparece como

Incógnitas

$$X(1) = 2.8$$

$$X(2) = -4.4$$

Resp.

Resp.

B.2 Regl

La regla de Simpson es un método numérico que puede usarse para determinar el área bajo una curva dada como una gráfica o como una función explícita $y = f(x)$. También puede usarse para calcular el valor de una integral definida que implique la función $y = f(x)$. Para aplicar la regla de Simpson, el área debe ser subdividida en un *número par* de franjas o intervalos con un ancho h . La curva entre tres ordenadas consecutivas es aproximada mediante una parábola, y el área entera o la integral definida se determina entonces con la fórmula

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n] \quad (\text{B-1})$$

El programa de computadora para esta ecuación está dado en la figura B-2. Para su uso, primero debemos especificar la función (línea 6 del programa). Los límites superior e inferior de la integral y el número de intervalos son pedidos cuando se ejecuta el programa. El valor de la integral es dado entonces como salida.

```

1 PRINT"Simpson's rule":PRINT
2 PRINT" To execute this program :":PRINT
3 PRINT" 1- Modify right-hand side of the equation given below,
4 PRINT"    then press RETURN key"
5 PRINT" 2- Type RUN 6":PRINT:EDIT 6
6 DEF FNF(X)=LOG(X)
7 PRINT:INPUT" Enter Lower Limit = ",A
8 INPUT" Enter Upper Limit = ",B
9 INPUT" Enter Number (even) of Intervals = ",N%
10 H=(B-A)/N%:AR=FNF(A):X=A+H
11 FOR J%=2 TO N%
12 K=2*(2-J%+2*INT(.J%/2))
13 AR=AR+K*FNF(X)
14 X=X+H:NEXT J%
15 AR=H*(AR+FNF(B))/3
16 PRINT" Integral = ",AR
17 END

```

Fig. B-2

EJEMPLO B.2

Evalúe la integral definida

$$\int_2^5 \ln x \, dx$$

Solución

El intervalo $x_0 = 2$ a $x_6 = 5$ será dividido en seis partes iguales ($n = 6$), cada parte con un ancho $h = (5 - 2)/6 = 0.5$. Luego calculamos $y = f(x) = \ln x$ en cada punto de la subdivisión.

n	x_n	y_n
0	2	0.693
1	2.5	0.916
2	3	1.099
3	3.5	1.253
4	4	1.386
5	4.5	1.504
6	5	1.609

Entonces la ecuación B-1 toma la forma

$$\begin{aligned} \int_2^5 \ln x \, dx &\approx \frac{0.5}{3} [0.693 + 4(0.916 + 1.253 + 1.504) \\ &\quad + 2(1.099 + 1.386) + 1.609] \\ &\approx 3.66 \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

Esta respuesta es equivalente a la respuesta exacta con tres cifras significativas. Resulta evidente que puede obtenerse una mayor exactitud con un mayor número de cifras significativas seleccionando un intervalo h menor (o mayor n).

Usando el programa de computadora, primero especificamos la función $\ln x$, línea 6 en la figura B-2. Durante la ejecución, la entrada del programa requiere los límites superior e inferior 2 y 5, y el número de intervalos $n = 6$. La salida aparece como

$$\text{Integral} = 3.66082 \quad \text{Resp.}$$

B.3 El

El método de la secante se usa para encontrar las raíces reales de una ecuación algebraica o trascendental $f(x) = 0$. Este método deriva su nombre del hecho de que la fórmula usada es establecida a partir de la pendiente de la línea secante a la gráfica $y = f(x)$. Esta pendiente es $[f(x_n) - f(x_{n-1})]/(x_n - x_{n-1})$, y la fórmula de la secante es

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right] \quad (\text{B-2})$$

Para su aplicación, es necesario proporcionar dos conjeturas iniciales, x_0 y x_1 , y evaluar con ellas x_2 a partir de la ecuación B-2 ($n = 1$). Luego se procede a reaplicar la ecuación B-2 con x_1 y el valor calculado de x_2 y obtener x_3 ($n = 2$), etc., hasta el valor $x_{n+1} \approx x_n$. Puede verse que esto ocurrirá si x_n se aproxima a la raíz de la función $f(x) = 0$, ya que el término correctivo a la derecha de la ecuación B-2 tenderá a cero. En particular, entre más grande sea la pendiente, menor será la corrección a x_n , y la raíz se encontrará más rápidamente. Por otra parte, si la pendiente es muy pequeña en la vecindad de la raíz, el método conduce a grandes correcciones para x_n , y la convergencia a la raíz es lenta y puede incluso fallar al encontrarla. En tales casos deben usarse otros procedimientos numéricos para hallar la solución.

Un programa de computadora basado en la ecuación B-2 está dado en la figura B-3. Primero debemos especificar la función en la línea 7 del programa. Cuando el programa es ejecutado, deben introducirse dos conjeturas iniciales, x_0 y x_1 , para aproximar la solución. La salida especifica el valor de la raíz. Si éste no puede ser determinado, el programa lo indica.

```

1 PRINT"Secant method":PRINT
2 PRINT" To execute this program :":PRINT
3 PRINT"      1) Modify right hand side of the equation given below,"
4 PRINT"      then press RETURN key."
5 PRINT"      2) Type RUN 7"
6 PRINT:EDIT 7
7 DEF FNF(X)=.5*SIN(X)-2*COS(X)+1.3
8 INPUT"Enter point #1 =",X
9 INPUT"Enter point #2 =",X1
10 IF X=X1 THEN 14
11 EP=.00001:TL=2E-20
12 FP=(FNF(X1)-FNF(X))/(X1-X)
13 IF ABS(FP)>TL THEN 15
14 PRINT"Root can not be found.":END
15 DX=FNF(X1)/FP
16 IF ABS(DX)>EP THEN 19
17 PRINT "Root = ";X1;"      Function evaluated at this root = ";FNF(X1)
18 END
19 X=X1:X1=X1-DX
20 GOTO 12

```

Fig. B-3

EJEMPLO B.3

Determine la raíz de la ecuación

$$f(x) = 0.5 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{cos} x + 1.30 = 0$$

Solución

Las conjeturas de las raíces iniciales serán $x_0 = 45^\circ$ y $x_1 = 30^\circ$. Aplicando la ecuación B-2,

$$x_2 = 30^\circ - (-0.1821) \frac{(30^\circ - 45^\circ)}{(-0.1821 - 0.2393)} = 36.48^\circ$$

Usando este valor en la ecuación B-2, junto con $x_1 = 30^\circ$, tenemos

$$x_3 = 36.48^\circ - (-0.0108) \frac{36.48^\circ - 30^\circ}{(-0.0108 + 0.1821)} = 36.89^\circ$$

Al repetir el proceso con este valor y $x_2 = 36.48^\circ$ resulta

$$x_4 = 36.89^\circ - (0.0005) \left[\frac{36.89^\circ - 36.48^\circ}{(0.0005 + 0.0108)} \right] = 36.87^\circ$$

Así $x = 36.9^\circ$, con tres cifras significativas.

Si el problema es resuelto usando el programa de computadora, primero especificamos la función, línea 7 en la figura B-3. Durante la ejecución, la primera y segunda conjetura deben introducirse en radianes. Al seleccionar éstas como 0.8 rad y 0.5 rad, el resultado aparece como

Raíz = 0.6435022

Función evaluada en esta raíz = 1.66893E-06

Este resultado convertido de radianes a grados es

$$x = 36.9^\circ$$

Resp.

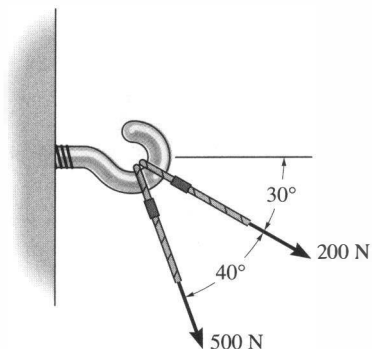
Repaso para un examen de los fundamentos de ingeniería

En Estados Unidos, el National Council of Engineering Examiners (NCEE) aplica el examen Fundamentals of Engineering (FE) dos veces al año, y aprobarlo es uno de los requisitos indispensables para obtener la licencia de ingeniero profesional. Una porción de este examen contiene problemas de estática, y el presente apéndice ofrece un repaso de los temas considerados más a menudo en ese examen. Antes de resolver cualquiera de los problemas, el lector deberá repasar las secciones indicadas en cada capítulo para familiarizarse con las definiciones que aparecen en negritas y con los procedimientos usados al resolver los distintos tipos de problemas. Repase también los problemas de ejemplo presentados en esas secciones.

Los siguientes problemas están arreglados en la misma secuencia que los temas tratados en cada capítulo. Además de ayudar en la preparación para el examen FE, esos problemas también proporcionan ejemplos adicionales para la práctica general de la materia. Las soluciones para *todos los problemas* están dadas al final del apéndice.

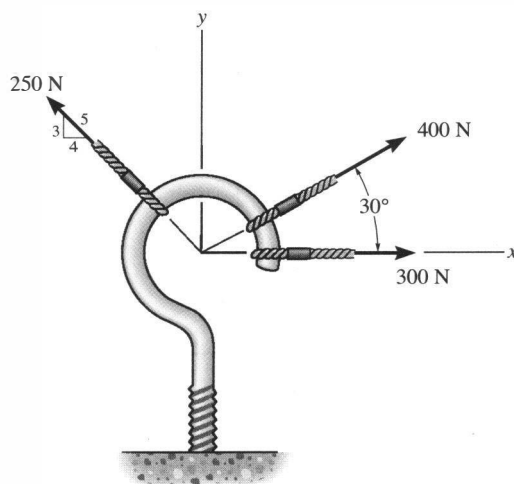
Capítulo 2. Repaso de todas las secciones

C-1. Dos fuerzas actúan sobre el gancho. Determine la magnitud de la fuerza resultante.



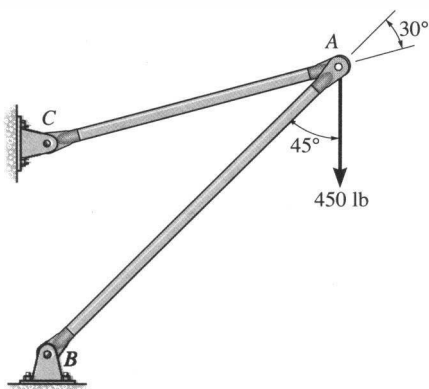
Prob. C-1

C-3. Determine magnitud y dirección de la fuerza resultante.



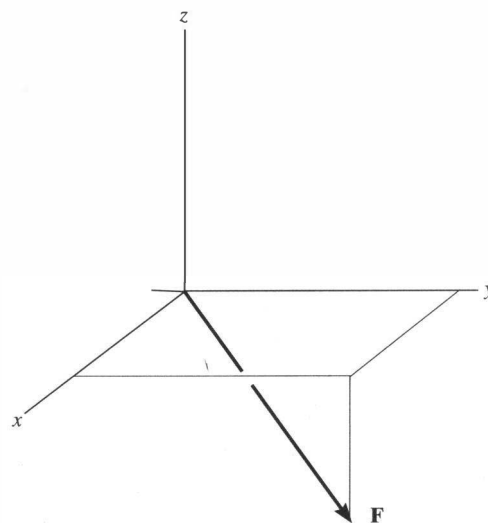
Prob. C-3

C-2. La fuerza $F = 450 \text{ lb}$ actúa sobre el bastidor. Resuelva esta fuerza en componentes actuando a lo largo de los miembros AB y AC , y determine la magnitud de cada componente.



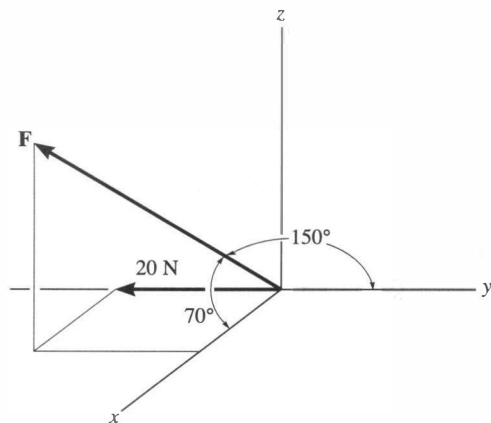
Prob. C-2

C-4. Si $\mathbf{F} = [30\mathbf{i} + 50\mathbf{j} - 45\mathbf{k}] \text{ N}$, determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de la fuerza.



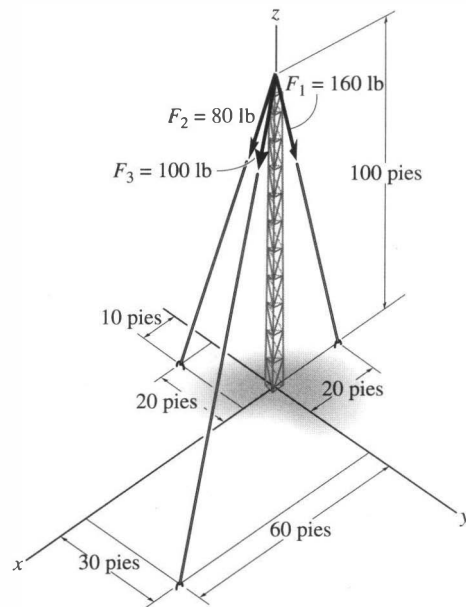
Prob. C-4

C-5. La fuerza tiene una componente de 20 N dirigida a lo largo del eje $-y$ como se muestra. Represente la fuerza \mathbf{F} como un vector cartesiano.



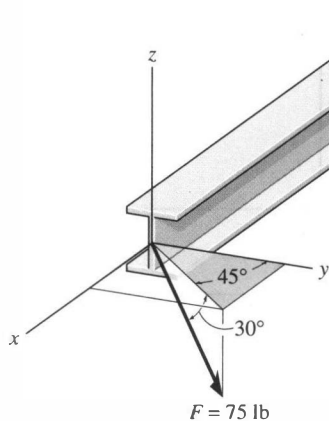
Prob. C-5

C-7. Los cables que soportan la antena están sometidos a las fuerzas mostradas. Represente cada fuerza como un vector cartesiano.



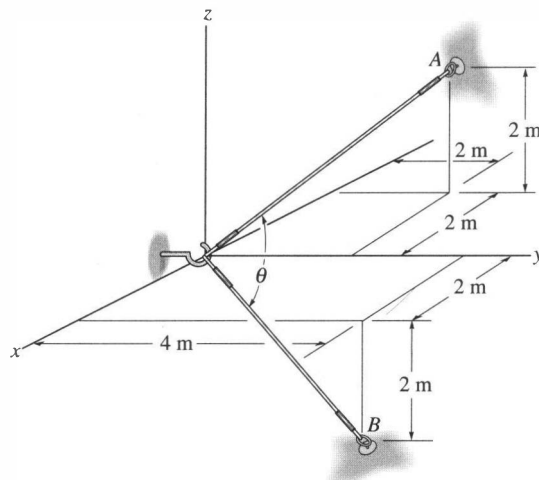
Prob. C-7

C-6. La fuerza actúa sobre la viga como se muestra. Determine sus ángulos coordenados de dirección.



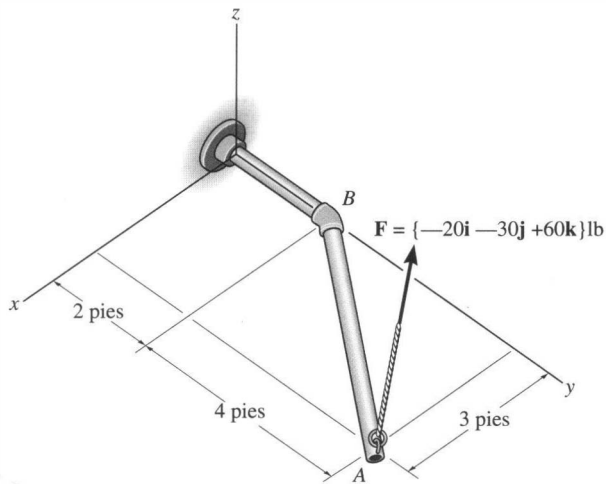
Prob. C-6

C-8. Determine el ángulo θ entre las dos cuerdas.



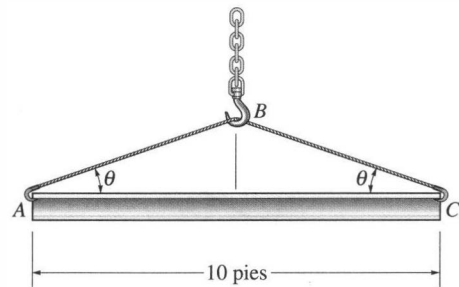
Prob. C-8

C-9. Determine la componente de la proyección de la fuerza F a lo largo del tubo AB .



Prob. C-9

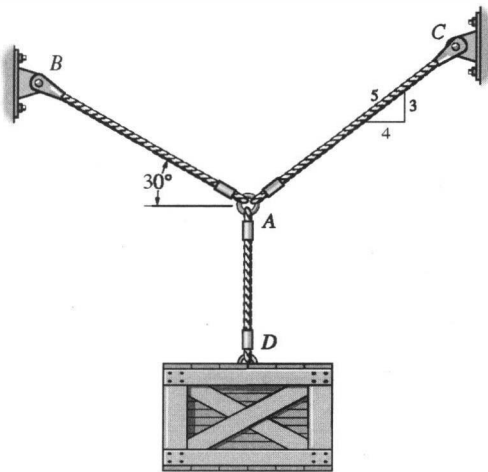
C-11. La viga tiene un peso de 700 lb. Determine el cable ABC más corto que puede ser usado para levantar la viga si la máxima fuerza que el cable puede resistir es de 1500 lb.



Prob. C-11

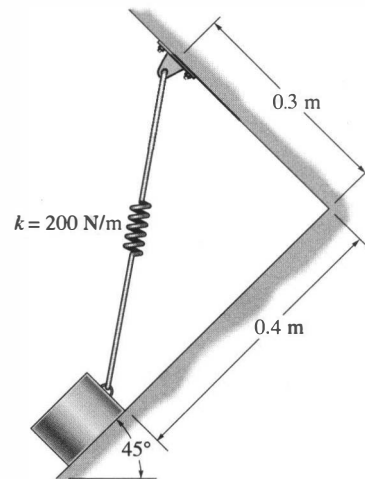
Capítulo 3. Repaso de las secciones 3.1, 3.2 y 3.3

C-10. La caja en D tiene un peso de 550 lb. Determine la fuerza en cada uno de los cables de soporte.



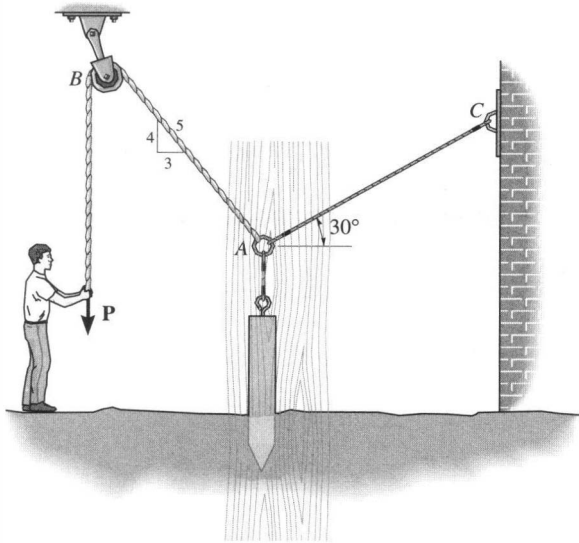
Prob. C-10

C-12. El bloque tiene una masa de 5 kg y descansa sobre el plano liso. Determine la longitud no alargada del resorte.



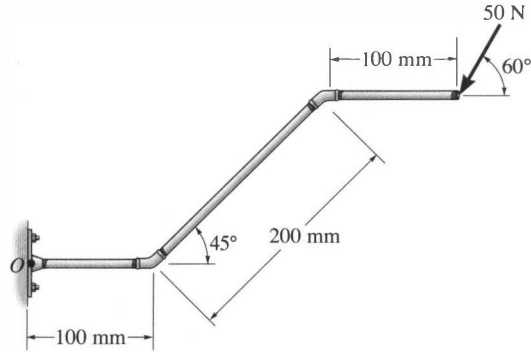
Prob. C-12

C-13. El poste puede ser extraído mediante una fuerza vertical de 400 lb. Determine la fuerza P que debe ser aplicada a la cuerda para sacar el poste del terreno.



Prob. C-13

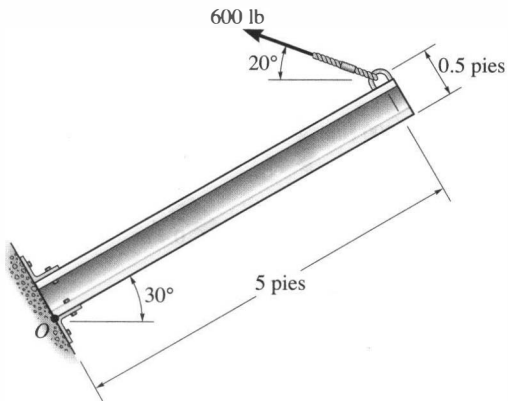
C-15. Determine el momento de la fuerza con respecto al punto O . Ignore el espesor del miembro.



Prob. C-15

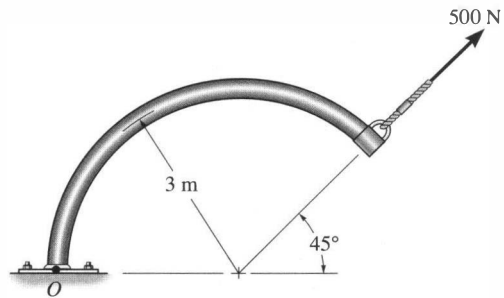
Capítulo 4. Repaso de todas las secciones

C-14. Determine el momento de la fuerza con respecto al punto O .



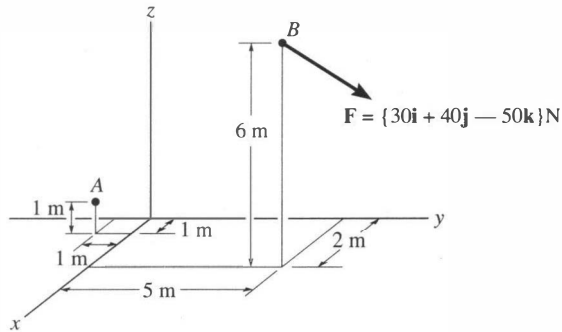
Prob. C-14

C-16. Determine el momento de la fuerza con respecto al punto O .



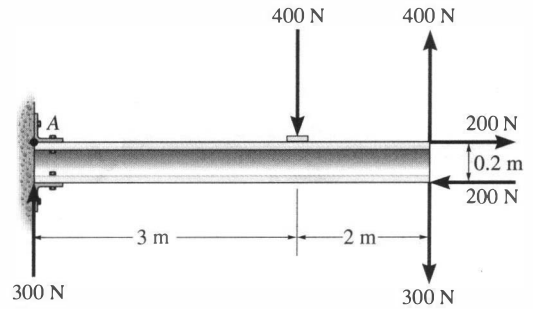
Prob. C-16

C-17. Determine el momento de la fuerza con respecto al punto *A*. Exprese el resultado como un vector cartesiano.



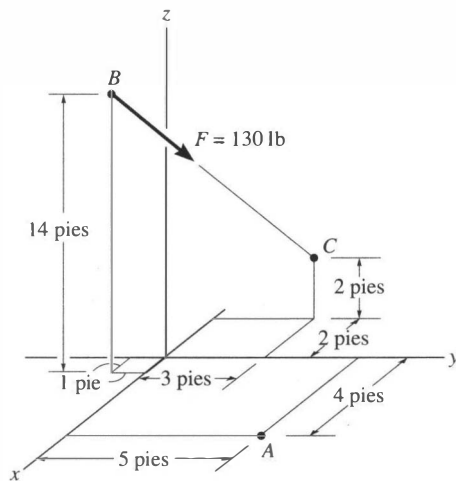
Prob. C-17

C-19. Determine el momento de par resultante que actúa sobre la viga.



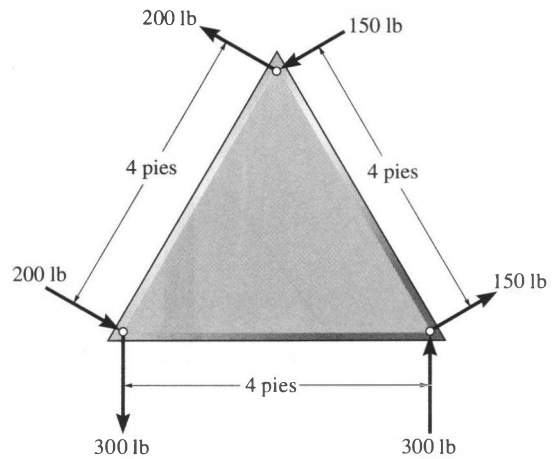
Prob. C-19

C-18. Determine el momento de la fuerza con respecto al punto *A*. Exprese el resultado como un vector cartesiano.



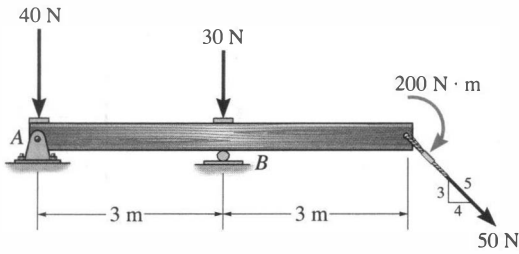
Prob. C-18

C-20. Determine el momento de par resultante que actúa sobre la placa triangular.



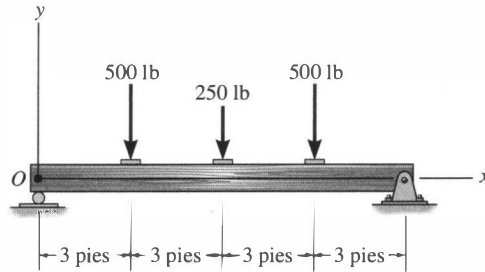
Prob. C-20

C-21. Reemplace la carga mostrada por un sistema equivalente de fuerza y momento de par resultantes en el punto A.



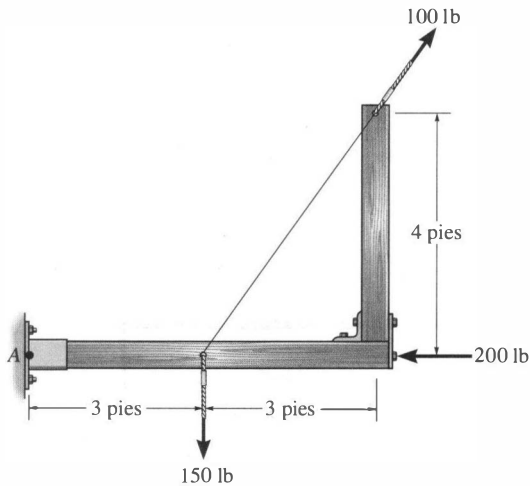
Prob. C-21

C-23. Reemplace la carga mostrada por una sola fuerza resultante equivalente y especifique dónde actúa la fuerza, medida desde el punto O.



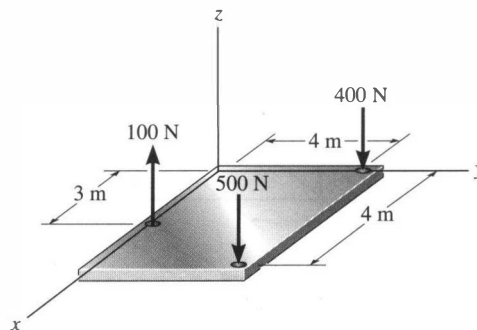
Prob. C-23

C-22. Reemplace la carga mostrada por un sistema equivalente de fuerza y momento de par resultantes en el punto A.



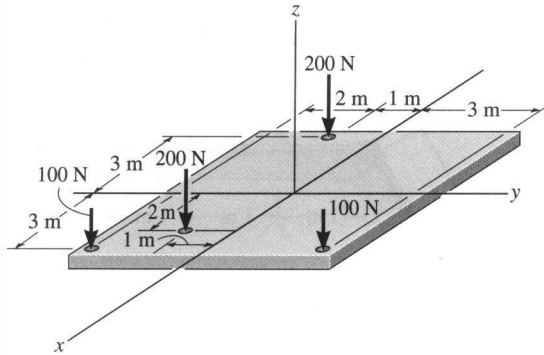
Prob. C-22

C-24. Reemplace la carga mostrada por una sola fuerza resultante equivalente y especifique las coordenadas x y y de su línea de acción.



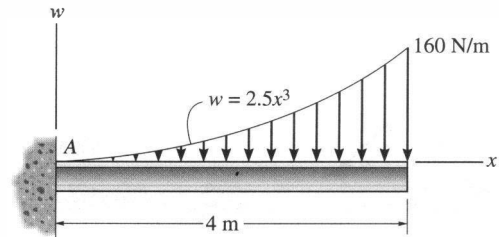
Prob. C-24

C-25. Reemplace la carga mostrada por una sola fuerza resultante equivalente y especifique las coordenadas x y y de su línea de acción.



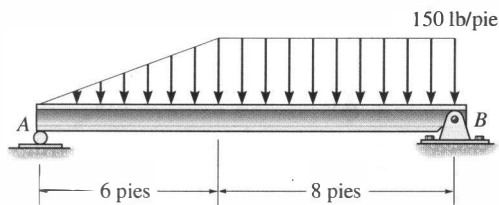
Prob. C-25

C-27. Determine la fuerza resultante y especifique dónde actúa sobre la viga, mida la fuerza desde A .



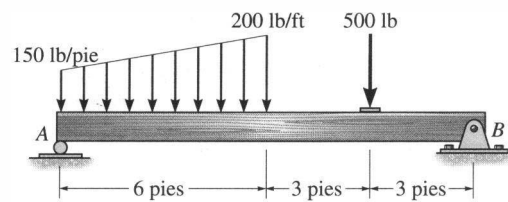
Prob. C-27

C-26. Determine la fuerza resultante y especifique dónde actúa sobre la viga, mida la fuerza desde A .



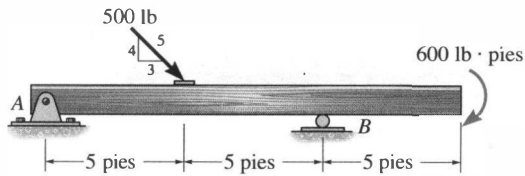
Prob. C-26

C-28. Determine la fuerza resultante y especifique dónde actúa sobre la viga, mida la fuerza desde A .



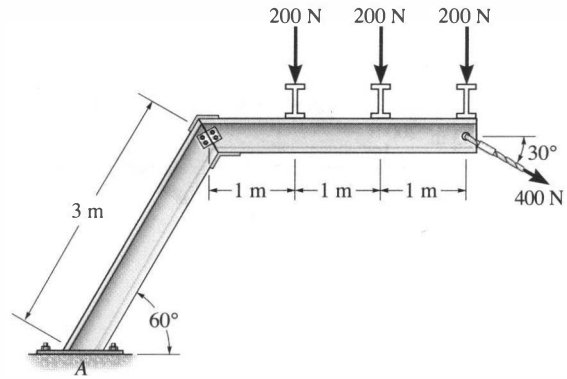
Prob. C-28

Capítulo 5. Repaso de las secciones 5.1 a la 5.6
C-29. Determine las componentes de reacción horizontal y vertical en los soportes. Ignore el espesor de la viga.



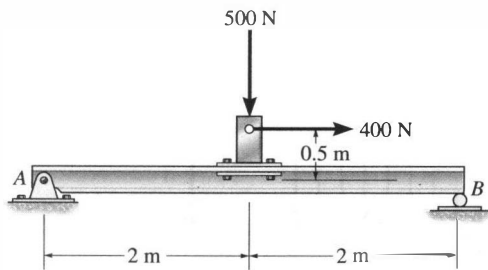
Prob. C-29

C-31. Determine las componentes de reacción en el empotramiento A. Ignore el espesor de la viga.



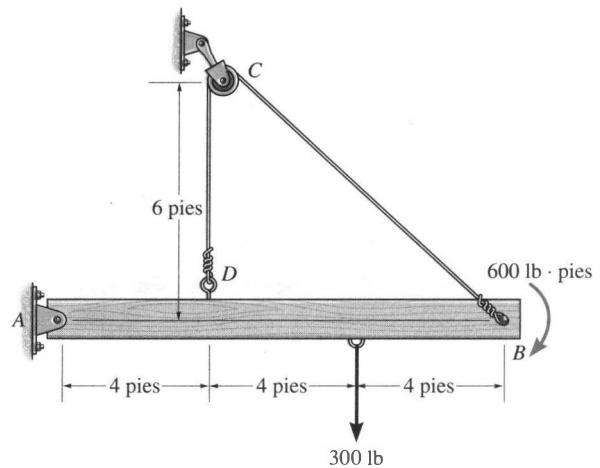
Prob. C-31

C-30. Determine las componentes de reacción horizontal y vertical en los soportes.



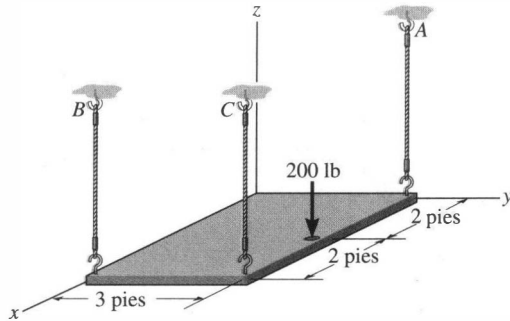
Prob. C-30

C-32. Determine la tensión en el cable y las componentes de reacción horizontal y vertical en el pasador A. Ignore el tamaño de la polea.



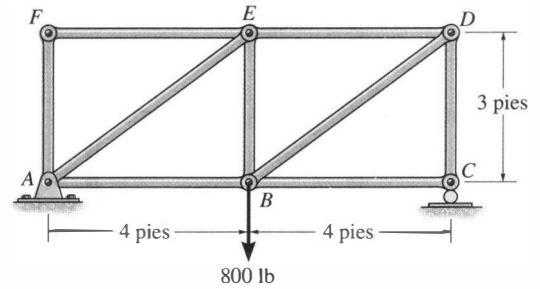
Prob. C-32

C-33. La placa uniforme tiene un peso de 500 lb. Determine la tensión en cada uno de los cables de soporte.



Prob. C-33

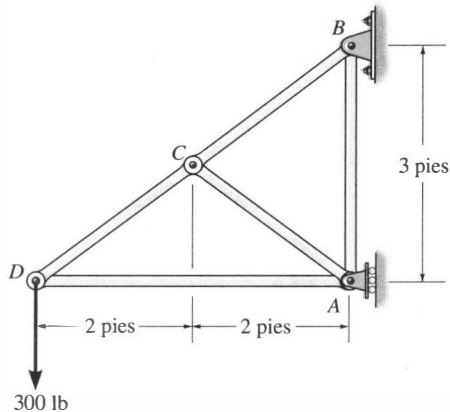
C-35. Determine la fuerza en los miembros AE y DC . Establezca si los miembros están en tensión o en compresión.



Prob. C-35

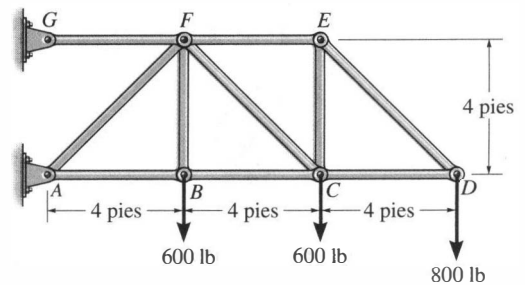
Capítulo 6. Repaso de las secciones 6.1 a la 6.4, y 6.6

C-34. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura. Establezca si los miembros están en tensión o en compresión.



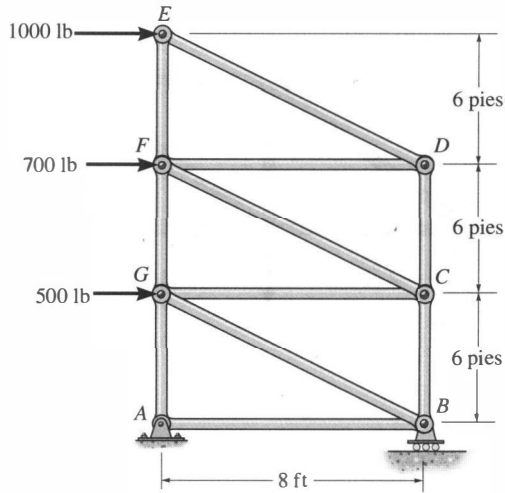
Prob. C-34

C-36. Determine la fuerza en los miembros BC , CF y FE . Establezca si los miembros están en tensión o en compresión.



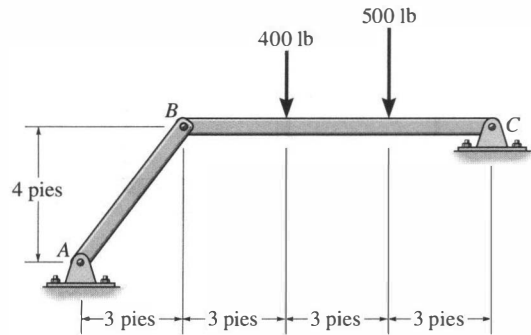
Prob. C-36

C-37. Determine la fuerza en los miembros GF , FC y CD . Establezca si los miembros están en tensión o en compresión.



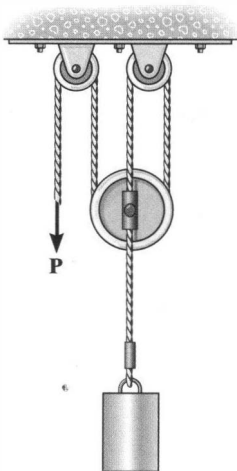
Prob. C-37

C-39. Determine las componentes de reacción horizontal y vertical en el pasador C .



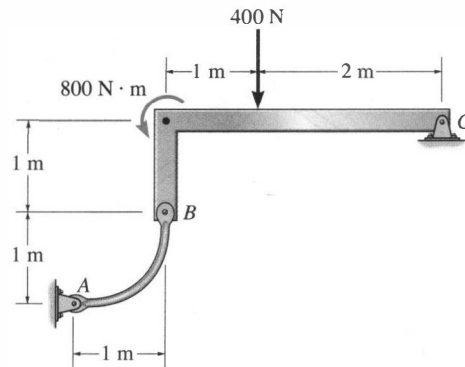
Prob. C-39

C-38. Determine la fuerza P necesaria para mantener en equilibrio el peso de 60 lb.



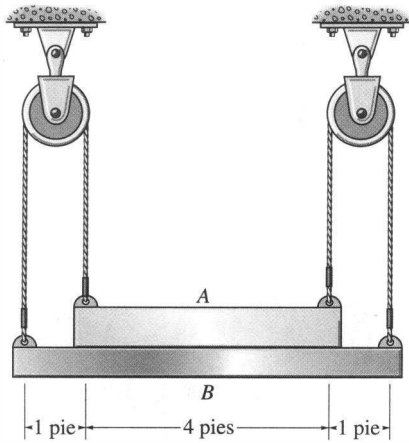
Prob. C-38

C-40. Determine las componentes de reacción horizontal y vertical en el pasador C .



Prob. C-40

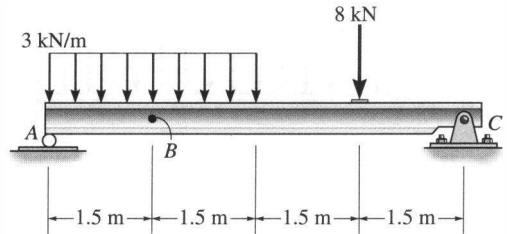
C-41. Determine la fuerza normal que la placa *A* de 100 lb ejerce sobre la placa *B* de 30 lb.



Prob. C-41

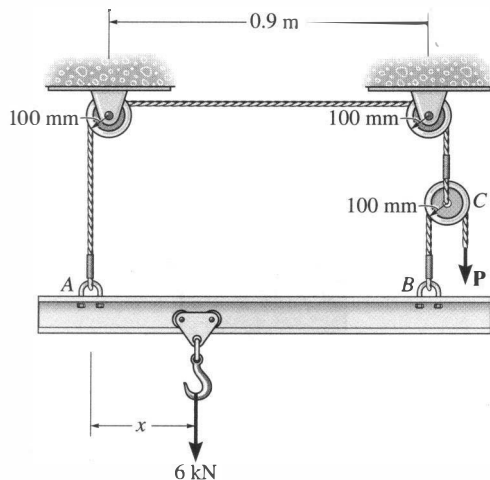
Capítulo 7. Repaso de la sección 7.1

C-43. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan en el punto *B* de la viga.



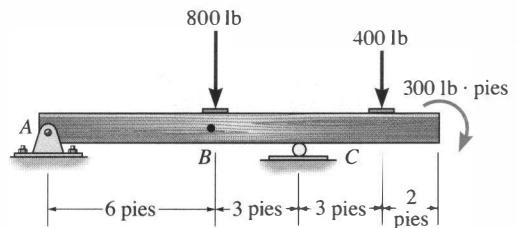
Prob. C-43

C-42. Determine la fuerza *P* necesaria para levantar la carga. Determine también, por equilibrio, la posición *x* del gancho. Ignore el peso de la viga.



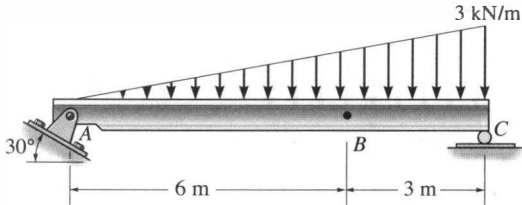
Prob. C-42

C-44. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan en el punto *B* de la viga, el cual está ubicado justo a la izquierda de la fuerza de 800 lb.



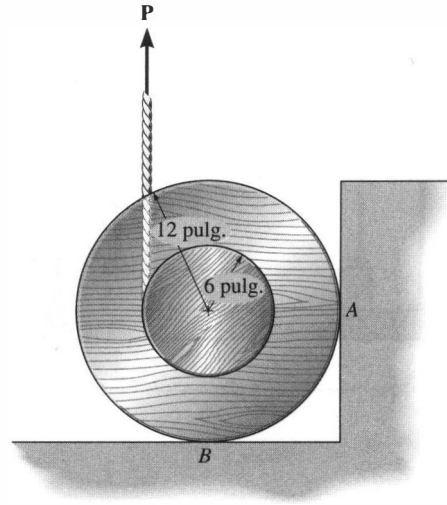
Prob. C-44

C-45. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan en el punto B de la viga.



Prob. C-45

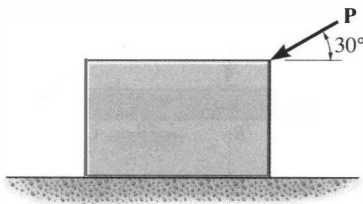
C-47. Determine la fuerza vertical P necesaria para hacer girar el carrete de 200 lb. El coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es $\mu_s = 0.4$.



Prob. C-47

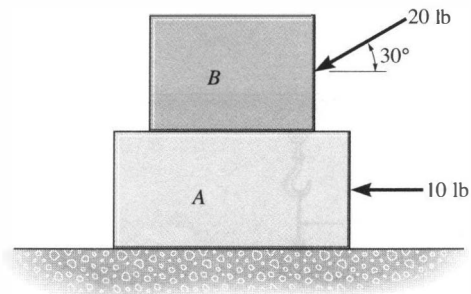
Capítulo 8. Repaso de las secciones 8.1 y 8.2

C-46. Determine la fuerza P necesaria para mover el bloque de 100 lb. El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$, y el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.25$. Ignore el volteo.



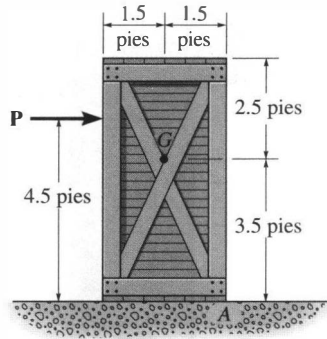
Prob. C-46

C-48. El bloque A pesa 30 lb y el bloque B 50 lb. Si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.4$ entre todas las superficies en contacto, determine la fuerza de fricción en cada superficie.



Prob. C-48

C-49. Determine la fuerza P necesaria para mover la caja de 250 lb que tiene su centro de gravedad en G . El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.4$.

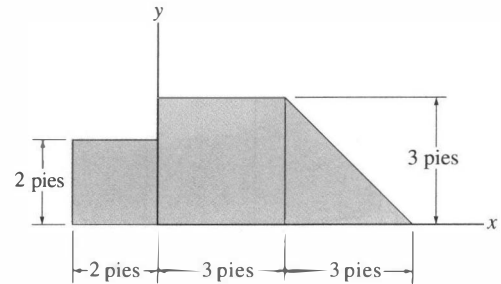


Prob. C-49

Capítulo 9. Repaso de las secciones 9.1, 9.2 y 9.3

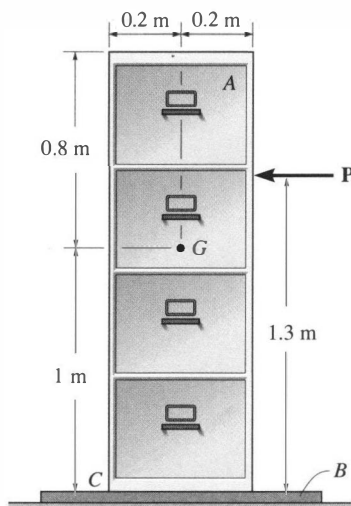
(La integración se cubre en la porción matemática del examen.)

C-51. Determine la ubicación (\bar{x}, \bar{y}) del centroide del área.



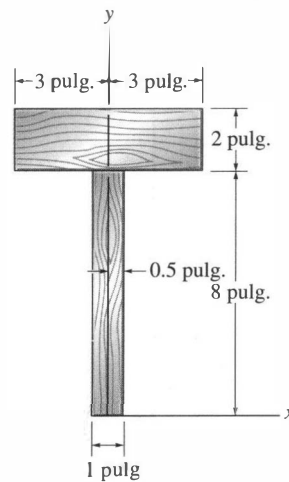
Prob. C-51

C-50. El archivero A tiene una masa de 60 kg y centro de masa en G . Descansa sobre una tabla de 10 kg. Determine la fuerza P más pequeña necesaria para moverlo. El coeficiente de fricción estática entre el archivero A y la tabla B es $\mu_s = 0.4$, y entre la tabla y el piso es $\mu_s = 0.3$.



Prob. C-50

C-52. Determine la ubicación (\bar{x}, \bar{y}) del centroide del área.

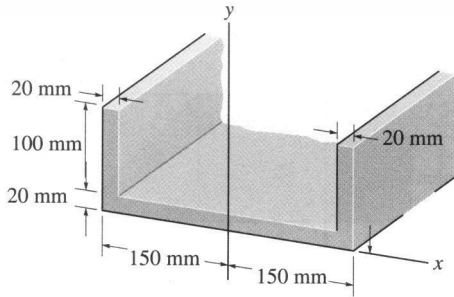


Prob. C-52

Capítulo 10. Repaso de las secciones 10.1 a la 10.5

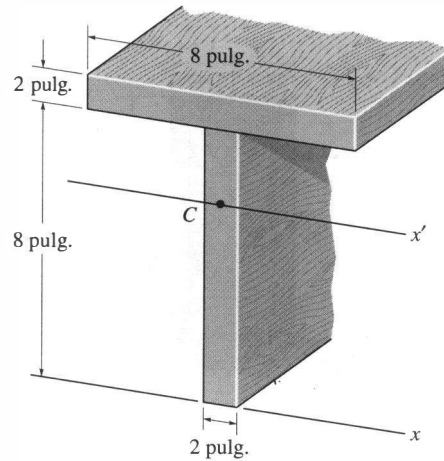
(La integración se cubre en la porción matemática del examen.)

C-53. Determine el momento de inercia del área de la canaleta con respecto al eje y .



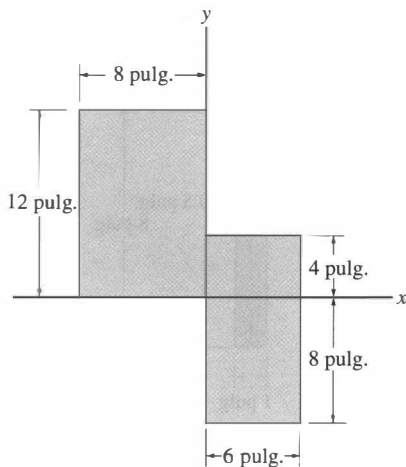
Prob. C-53

C-55. Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga T con respecto al eje x' que pasa por el centroide de la sección transversal.



Prob. C-55

C-54. Determine el momento de inercia del área con respecto al eje x .



Prob. C-54

Soluciones parciales y respuestas

$$\text{C-1. } F_R = \sqrt{200^2 + 500^2 - 2(200)(500) \cos 140^\circ} \\ = 666 \text{ N Resp.}$$

$$\text{C-2. } \frac{F_{AB}}{\sin 105^\circ} = \frac{450}{\sin 30^\circ} \\ = 869 \text{ lb Resp.}$$

$$\frac{F_{AC}}{\sin 45^\circ} = \frac{450}{\sin 30^\circ} \\ F_{AC} = 636 \text{ lb Resp.}$$

$$\text{C-3. } F_{Rx} = 300 + 400 \cos 30^\circ - 250 \left(\frac{4}{5} \right) = 446.4 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = 400 \sin 30^\circ + 250 \left(\frac{3}{5} \right) = 350 \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{(446.4)^2 + 350^2} = 567 \text{ N Resp.}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{350}{446.4} = 38.1^\circ \angle \text{ Resp.}$$

$$\text{C-4. } F = \sqrt{30^2 + 50^2 + (-45)^2} = 73.7 \text{ N Resp.}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{30}{73.7} \right) = 66.0^\circ \text{ Resp.}$$

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{50}{73.7} \right) = 47.2^\circ \text{ Resp.}$$

$$\gamma = \cos^{-1} \left(\frac{-45}{73.7} \right) = 128^\circ \text{ Resp.}$$

$$\text{C-5. } F_y = -20$$

$$\frac{F_y}{|F|} = \cos \beta$$

$$|F| = \left| \frac{-20}{\cos 150^\circ} \right| = 23.09 \text{ N}$$

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 70^\circ - \cos^2 150^\circ}$$

$$\gamma = 68.61^\circ \text{ (a partir de la figura } \gamma < 90^\circ)$$

$$\mathbf{F} = 23.09 \cos 70^\circ \mathbf{i} + 23.09 \cos 150^\circ \mathbf{j} \\ + 23.09 \cos 68.61^\circ \mathbf{k} \\ = \{7.90\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 8.42\mathbf{k}\} \text{ N Resp.}$$

$$\text{C-6. } F_x = 75 \cos 30^\circ \sin 45^\circ = 45.93$$

$$F_y = 75 \cos 30^\circ \cos 45^\circ = 45.93$$

$$F_z = -75 \sin 30^\circ = -37.5$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{45.93}{75} \right) = 52.2^\circ \text{ Resp.}$$

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{45.93}{75} \right) = 52.2^\circ \text{ Resp.}$$

$$\gamma = \cos^{-1} \left(\frac{-37.5}{75} \right) = 120^\circ \text{ Resp.}$$

$$\text{C-7. } \mathbf{F}_1 = 160 \text{ lb} \left(-\frac{20}{102.0} \mathbf{i} - \frac{100}{102.0} \mathbf{k} \right) \\ = \{-31.4\mathbf{i} - 157\mathbf{k}\} \text{ lb Resp.}$$

$$\mathbf{F}_2 = 80 \text{ lb} \left(\frac{10}{102.5} \mathbf{i} - \frac{20}{102.5} \mathbf{j} - \frac{100}{102.5} \mathbf{k} \right) \\ = \{7.81\mathbf{i} - 15.6\mathbf{j} - 78.1\mathbf{k}\} \text{ lb Resp.}$$

$$\mathbf{F}_3 = 100 \text{ lb} \left(\frac{60}{120.4} \mathbf{i} + \frac{30}{120.4} \mathbf{j} - \frac{100}{120.4} \mathbf{k} \right) \\ = \{49.8\mathbf{i} + 24.9\mathbf{j} - 83.0\mathbf{k}\} \text{ lb Resp.}$$

$$\text{C-8. } \mathbf{r}_{OA} = \{-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\} \text{ m}$$

$$\mathbf{r}_{OB} = \{2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\} \text{ m}$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{r}_{OA} \cdot \mathbf{r}_{OB}}{|\mathbf{r}_{OA}| |\mathbf{r}_{OB}|}$$

$$\frac{(-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k})}{\sqrt{12} \sqrt{24}} = 0$$

$$\theta = 90^\circ \text{ Resp.}$$

$$\text{C-9. } |F_{AB}| = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_{AB}$$

$$= (-20\mathbf{i} - 30\mathbf{j} + 60\mathbf{k}) \cdot \left(-\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j} \right) = 36 \text{ lb Resp.}$$

$$\text{C-10. } \rightarrow \Sigma F_x = 0; \frac{4}{5} F_{AC} - F_{AB} \cos 30^\circ = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \frac{3}{5} F_{AC} + F_{AB} \sin 30^\circ - 550 = 0$$

$$F_{AB} = 478 \text{ lb Resp., } F_{AC} = 518 \text{ lb Resp.}$$

$$\text{C-11. } +\uparrow \Sigma F_y = 0; -2(1500) \sin \theta + 700 = 0$$

$$\theta = 13.5^\circ$$

$$L_{ABC} = 2 \left(\frac{5 \text{ pies}}{\cos 13.5^\circ} \right) = 10.3 \text{ pies}$$

$$\text{C-12. } +\nearrow \Sigma F_x = 0; \frac{4}{5} (F_{sp}) - 5(9.81) \sin 45^\circ = 0$$

$$F_{sp} = 43.35 \text{ N}$$

$$F_{sp} = k(l - l_0); 43.35 = 200(0.5 - l_0)$$

$$l_0 = 0.283 \text{ m Resp.}$$

$$\text{C-13. En A:}$$

$$\leftarrow \Sigma F_x = 0; \frac{3}{5} P - T_{AC} \cos 30^\circ = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \frac{4}{5} P + T_{AC} \sin 30^\circ - 400 = 0$$

$$P = 349 \text{ lb Resp., } T_{AC} = 242 \text{ lb Resp.}$$

$$\text{C-14. } \curvearrowleft + M_O = 600 \sin 50^\circ (5) + 600 \cos 50^\circ (0.5) \\ = 2.49 \text{ kip} \cdot \text{pie Resp.}$$

$$\begin{aligned} \text{C-15. } \uparrow + M_O &= 50 \sin 60^\circ (0.1 + 0.2 \cos 45^\circ + 0.1) \\ &\quad - 50 \cos 60^\circ (0.2 \sin 45^\circ) \\ &= 11.2 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C-16. } \downarrow + M_O &= 500 \sin 45^\circ (3 + 3 \cos 45^\circ) \\ &\quad - 500 \cos 45^\circ (3 \sin 45^\circ) \\ &= 1.06 \text{ kN} \cdot \text{m} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C-17. } \mathbf{M}_A &= \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 6 & 5 \\ 30 & 40 & -50 \end{vmatrix} \\ &= \{-500\mathbf{i} + 200\mathbf{j} - 140\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C-18. } \mathbf{F} &= 130 \text{ lb} \left(-\frac{3}{13}\mathbf{i} + \frac{4}{13}\mathbf{j} - \frac{12}{13}\mathbf{k} \right) \\ &= \{-30\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 120\mathbf{k}\} \text{ lb} \\ \mathbf{M}_A &= \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -6 & 14 \\ -30 & 40 & -120 \end{vmatrix} \\ &= \{160\mathbf{i} - 780\mathbf{j} - 300\mathbf{k}\} \text{ lb} \cdot \text{pie} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C-19. } \uparrow + M_{C_R} &= \Sigma M_A = 400(3) - 400(5) + 300(5) \\ &\quad + 200(0.2) = 740 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} \uparrow + M_{C_R} &= 300(5) - 400(2) + 200(0.2) \\ &= 740 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C-20. } \downarrow + M_{C_R} &= 300(4) + 200(4) + 150(4) \\ &= 2600 \text{ lb} \cdot \text{pie} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C-21. } \rightarrow F_{R_x} &= \Sigma F_x; \quad F_{R_x} = \frac{4}{5}(50) = 40 \text{ N} \\ +\downarrow F_{R_y} &= \Sigma F_y; \quad F_{R_y} = 40 + 30 + \frac{3}{5}(50) \\ &= 100 \text{ N} \\ F_R &= \sqrt{(40)^2 + (100)^2} = 108 \text{ N} \text{ Resp.} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{100}{40}\right) = 68.2^\circ \swarrow \text{ Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\downarrow M_{A_R} &= \Sigma M_A; \quad M_{A_R} = 30(3) + \frac{3}{5}(50)(6) + 200 \\ &= 470 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C-22. } \leftarrow F_{R_x} &= \Sigma F_x; \quad F_{R_x} = 200 - \frac{3}{5}(100) = 140 \text{ lb} \\ +\downarrow F_{R_y} &= \Sigma F_y; \quad F_{R_y} = 150 - \frac{4}{5}(100) = 70 \text{ lb} \\ F_R &= \sqrt{140^2 + 70^2} = 157 \text{ lb} \text{ Resp.} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{70}{140}\right) = 26.6^\circ \searrow \text{ Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\downarrow M_{A_R} &= \Sigma M_A; \quad M_{A_R} = \frac{3}{5}(100)(4) - \frac{4}{5}(100)(6) + 150(3) \\ M_{R_A} &= 210 \text{ lb} \cdot \text{pie} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C-23. } +\downarrow F_R &= \Sigma F_y; \quad F_R = 500 + 250 + 500 \\ &= 1250 \text{ lb} \text{ Resp.} \\ +\downarrow F_{R_x} &= \Sigma M_O; \quad 1250(x) = 500(3) + 250(6) + 500(9) \\ &\quad x = 6 \text{ pies} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C-24. } +\downarrow F_R &= \Sigma F_z; \quad F_R = 400 + 500 - 100 \\ &= 800 \text{ N} \text{ Resp.} \\ M_{R_x} &= \Sigma M_x; \quad -800y = -400(4) - 500(4) \\ &\quad y = 4.50 \text{ m} \text{ Resp.} \\ M_{R_y} &= \Sigma M_y; \quad 800x = 500(4) - 100(3) \\ &\quad x = 2.125 \text{ m} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C-25. } +\downarrow F_R &= \Sigma F_y; \quad F_R = 200 + 200 + 100 + 100 \\ &= 600 \text{ N} \text{ Resp.} \\ M_{R_x} &= \Sigma M_x; \quad -600y = 200(1) + 200(1) \\ &\quad + 100(3) - 100(3) \\ &\quad y = -0.667 \text{ m} \text{ Resp.} \\ M_{R_y} &= \Sigma M_y; \quad 600x = 100(3) + 100(3) \\ &\quad + 200(2) - 200(3) \\ &\quad x = 0.667 \text{ m} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C-26. } F_R &= \frac{1}{2}(6)(150) + 8(150) = 1650 \text{ lb} \text{ Resp.} \\ +\downarrow M_{A_R} &= \Sigma M_A; \\ 1650 d &= \left[\frac{1}{2}(6)(150) \right](4) + [8(150)](10) \\ &\quad d = 8.36 \text{ pies} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C-27. } F_R &= \int w(x) dx = \int_0^4 2.5x^3 dx = 160 \text{ N} \text{ Resp.} \\ +\downarrow M_{A_R} &= \Sigma M_A; \\ x &= \frac{\int xw(x) dx}{\int w(x) dx} = \frac{\int_0^4 2.5x^4 dx}{160} = 3.20 \text{ m} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C-28. } +\downarrow F_R &= \Sigma F_y; \quad F_R = \frac{1}{2}(50)(6) + 150(6) + 500 \\ &= 1550 \text{ lb} \text{ Resp.} \\ +\downarrow M_{A_R} &= \Sigma M_A; \\ 1550 d &= \left[\frac{1}{2}(50)(6) \right](4) + [150(6)](3) + 500(9) \\ &\quad d = 5.03 \text{ pies} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C-29. } \rightarrow \Sigma F_x &= 0; \quad -A_x + 500\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \\ &\quad A_x = 300 \text{ lb} \text{ Resp.} \\ +\uparrow \Sigma M_A &= 0; \quad B_y(10) - 500\left(\frac{4}{5}\right)(5) - 600 = 0 \\ &\quad B_y = 260 \text{ lb} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

- $+\uparrow \Sigma F_y = 0; A_y + 260 - 500\left(\frac{4}{5}\right) = 0$
 $A_y = 140 \text{ lb Resp.}$
- C-30.** $\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; -A_x + 400 = 0; A_x = 400 \text{ N Resp.}$
 $\downarrow + \Sigma M_A = 0; B_y(4) - 400(0.5) - 500(2) = 0$
 $B_y = 300 \text{ N Resp.}$
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0; A_y + 300 - 500 = 0$
 $A_y = 200 \text{ N Resp.}$
- C-31.** $\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; -A_x + 400 \cos 30^\circ = 0$
 $A_x = 346 \text{ N Resp.}$
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0; A_y - 200 - 200 - 200 - 400 \sin 30^\circ = 0$
 $A_y = 800 \text{ N Resp.}$
 $\downarrow + \Sigma M_A = 0; M_A - 200(2.5) - 200(3.5) - 200(4.5) - 400 \sin 30^\circ(4.5) - 400 \cos 30^\circ(3 \sin 60^\circ) = 0$
 $M_A = 3.90 \text{ kN} \cdot \text{m Resp.}$
- C-32.** $+\uparrow \Sigma M_A = 0; T(4) + \frac{3}{5}T(12) - 300(8) - 600 = 0$
 $T = 267.9 = 268 \text{ lb Resp.}$
 $\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; A_x - \left(\frac{4}{5}\right)(267.9) = 0$
 $A_x = 214 \text{ lb Resp.}$
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0; A_y + 267.9 + \left(\frac{3}{5}\right)(267.9) - 300 = 0$
 $A_y = -129 \text{ lb Resp.}$
- C-33.** $\Sigma F_z = 0; T_A + T_B + T_C - 200 - 500 = 0$
 $\Sigma M_x = 0; T_A(3) + T_C(3) - 500(1.5) - 200(3) = 0$
 $\Sigma M_y = 0; -T_B(4) - T_C(4) + 500(2) + 200(2) = 0$
 $T_A = 350 \text{ lb}, T_B = 250 \text{ lb}, T_C = 100 \text{ lb Resp.}$
- C-34.** Nudo D:
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0; \frac{3}{5}F_{CD} - 300 = 0; F_{CD} = 500 \text{ lb (T) Resp.}$
 $\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; -F_{AD} + \frac{4}{5}(500) = 0;$
 $F_{AD} = 400 \text{ lb (C) Resp.}$
 Nudo C:
 $+\searrow \Sigma F_y = 0; F_{CA} = 0 \text{ Resp.}$
 $+\nearrow \Sigma F_x = 0; F_{CB} - 500 = 0;$
 $F_{CB} = 500 \text{ lb (T) Resp.}$
 Nudo A:
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0; F_{AB} = 0 \text{ Resp.}$
- C-35.** $A_x = 0, A_y = C_y = 400 \text{ lb}$
 Nudo A:
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0; -\frac{3}{5}F_{AE} + 400 = 0; F_{AE} = 667 \text{ lb (C) Resp.}$
 Nudo C:
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0; -F_{DC} + 400 = 0; F_{DC} = 400 \text{ lb (C) Resp.}$
- C-36.** Seccione la armadura a través de FE, FC, BC . Use el segmento derecho.
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0; F_{CF} \sin 45^\circ - 600 - 800 = 0$
 $F_{CE} = 1980 \text{ lb (T) Resp.}$
 $+\uparrow \Sigma M_C = 0; F_{FE}(4) - 800(4) = 0$
 $F_{FE} = 800 \text{ lb (T) Resp.}$
 $\downarrow + \Sigma M_F = 0; F_{BC}(4) - 600(4) - 800(8) = 0$
 $F_{BC} = 2200 \text{ lb (C) Resp.}$
- C-37.** Seccione la armadura a través de GF, FC, DC . Use el segmento superior.
 $+\uparrow \Sigma M_C = 0; F_{GF}(8) - 700(6) - 1000(12) = 0$
 $F_{GF} = 2025 \text{ lb (T) Resp.}$
 $\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; -\frac{4}{5}F_{FC} + 700 + 1000 = 0$
 $F_{FC} = 2125 \text{ lb (C) Resp.}$
 $\downarrow + \Sigma M_F = 0; F_{CD}(8) - 1000(6) = 0$
 $F_{CD} = 750 \text{ lb (C) Resp.}$
- C-38.** $+\uparrow \Sigma F_y = 0; 3P - 60 = 0$
 $P = 20 \text{ lb Resp.}$
- C-39.** $+\uparrow \Sigma M_C = 0; -\left(\frac{4}{5}\right)(F_{AB})(9) + 400(6) + 500(3) = 0$
 $F_{AB} = 541.67 \text{ lb}$
 $\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; -C_x + \frac{3}{5}(541.67) = 0$
 $C_x = 325 \text{ lb Resp.}$
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0; C_y + \frac{4}{5}(541.67) - 400 - 500 = 0$
 $C_y = 467 \text{ lb Resp.}$
- C-40.** $+\uparrow \Sigma M_C = 0; F_{AB} \cos 45^\circ(1) - F_{AB} \sin 45^\circ(3) + 800 + 400(2) = 0$
 $F_{AB} = 1131.37 \text{ N}$
 $\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; -C_x + 1131.37 \cos 45^\circ = 0$
 $C_x = 800 \text{ N Resp.}$
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0; -C_y + 1131.37 \sin 45^\circ - 400 = 0$
 $C_y = 400 \text{ N Resp.}$
- C-41.** Placa A:
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0; 2T + N_{AB} - 100 = 0$
 Placa B:
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0; 2T - N_{AB} - 30 = 0$
 $T = 32.5 \text{ lb}, N_{AB} = 35 \text{ lb Resp.}$
- C-42.** Polea C:
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0; T - 2P = 0; T = 2P$
 Viga:
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0; 2P + P - 6 = 0$
 $P = 2 \text{ kN Resp.}$
 $+\uparrow \Sigma M_A = 0; 2(1) - 6(x) = 0$
 $x = 0.333 \text{ m Resp.}$

C-43. $A_y = 8.75$ kN. Use el segmento AB:

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & N_B &= 0 \text{ Resp.} \\ +\uparrow \Sigma F_y &= 0; & 8.75 - 3(1.5) - V_B &= 0 \\ & & V_B &= 4.25 \text{ kN Resp.} \\ +\curvearrowright \Sigma M_B &= 0; & M_B + 3(1.5)(0.75) - 8.75(1.5) &= 0 \\ & & M_B &= 9.75 \text{ kN}\cdot\text{m Resp.} \end{aligned}$$

C-44. $A_y = 0$, $A_y = 100$ lb. Use el segmento AB.

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & N_B &= 0 \text{ Resp.} \\ +\uparrow \Sigma F_y &= 0; & 100 - V_B &= 0 \\ & & V_B &= 100 \text{ lb Resp.} \\ +\curvearrowright \Sigma M_B &= 0; & M_B - 100(6) &= 0 \\ & & M_B &= 600 \text{ lb}\cdot\text{pies Resp.} \end{aligned}$$

C-45. $A_x = 0$, $A_y = 4.5$ kN, $w_B = 2$ kN/m. Use el segmento AB.

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & N_B &= 0 \text{ Resp.} \\ +\uparrow \Sigma F_y &= 0; & 4.5 - \frac{1}{2}(6)(2) + V_B &= 0 \\ & & V_B &= 1.5 \text{ kN Resp.} \\ +\curvearrowright \Sigma M_B &= 0; & M_B + \left[\frac{1}{2}(6)(2) \right](2) - 4.5(6) &= 0 \\ & & M_B &= 15 \text{ kN}\cdot\text{m Resp.} \end{aligned}$$

C-46. $+\uparrow \Sigma F_y = 0$; $N_b - P \sin 30^\circ - 100 = 0$

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & -P \cos 30^\circ + 0.3 N_b &= 0 \\ & & P &= 41.9 \text{ lb Resp.} \end{aligned}$$

C-47. $\rightarrow \Sigma F_x = 0$; $0.4N_B - N_A = 0$

$$\begin{aligned} +\curvearrowright \Sigma M_B &= 0; & 0.4N_A(12) + N_A(12) - P(6) &= 0 \\ +\uparrow \Sigma F_y &= 0; & P + 0.4N_A + N_B - 200 &= 0 \\ & & P &= 98.2 \text{ lb Resp.} \end{aligned}$$

C-48. Bloque B:

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y &= 0; & N_B - 20 \sin 30^\circ - 50 &= 0 \\ & & N_B &= 60 \text{ lb} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & F_B - 20 \cos 30^\circ &= 0 \\ & & F_B &= 17.3 \text{ lb } (< 0.4(60 \text{ lb})) \text{ Resp.} \end{aligned}$$

Bloques A y B:

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y &= 0; & N_A - 30 - 50 - 20 \sin 30^\circ &= 0 \\ & & N_A &= 90 \text{ lb} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & F_A - 20 \cos 30^\circ - 10 &= 0 \\ & & F_A &= 27.3 \text{ lb } (< 0.4(90 \text{ lb})) \text{ Resp.} \end{aligned}$$

C-49. Si ocurre deslizamiento

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y &= 0; & N_C - 250 \text{ lb} &= 0 \\ & & N_C &= 250 \text{ lb} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & P - 0.4(250) &= 0 \\ & & P &= 100 \text{ lb} \end{aligned}$$

Si ocurre volteo:

$$\begin{aligned} \curvearrowleft + \Sigma M_A &= 0; & -P(4.5) + 250(1.5) &= 0 \\ & & P &= 83.3 \text{ lb Resp.} \end{aligned}$$

C-50. P para que A se deslice sobre B :

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y &= 0; & N_A - 60(9.81) &= 0 \\ & & N_A &= 588.6 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & 0.4(588.6) - P &= 0 \\ & & P &= 235 \text{ N} \end{aligned}$$

P para que B se deslice:

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y &= 0; & N_B - 60(9.81) - 10(9.81) &= 0 \\ & & N_B &= 686.7 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & 0.3(686.7) - P &= 0 \\ & & P &= 206 \text{ N} \end{aligned}$$

P para voltear a A :

$$\begin{aligned} \curvearrowleft + \Sigma M_C &= 0; & P(1.3) - 60(9.81)(0.2) &= 0 \\ & & P &= 90.6 \text{ N Resp.} \end{aligned}$$

C-51. $\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}A}{\Sigma A} =$

$$\frac{(-1)(2)(2) + 1.5(3)(3) + 4\left(\frac{1}{2}\right)(3)(3)}{2(2) + 3(3) + \frac{1}{2}(3)(3)} = 1.57 \text{ pies Resp.}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}A}{\Sigma A} =$$

$$\frac{1(2)(2) + 1.5(3)(3) + 1\left(\frac{1}{2}\right)(3)(3)}{2(2) + 3(3) + \frac{1}{2}(3)(3)} = 1.26 \text{ pies Resp.}$$

C-52. $\bar{x} = 0$ (simetría) Resp.

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}A}{\Sigma A} = \frac{4(1(8)) + 9(6)(2)}{1(8) + 6(2)} = 7 \text{ pulg. Resp.}$$

C-53. $I_y = \frac{1}{12}(120)(300)^3 - \frac{1}{12}(100)(260)^3$
 $= 124 (10^6) \text{ mm}^4 \text{ Resp.}$

C-54. $I = \Sigma(\bar{I} + Ad^2) = \left[\frac{1}{12}(8)(12)^3 + (8)(12)(6)^2 \right]$
 $+ \left[\frac{1}{12}(6)(12)^3 + (6)(12)(-2)^2 \right] = 5760 \text{ pulg.}^4 \text{ Resp.}$

C-55. $\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}A}{\Sigma A} = \frac{4(8)(2) + 9(2)(8)}{8(2) + 2(8)} = 6.5 \text{ pulg.}$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{x'} &= \Sigma(\bar{I} + Ad^2) = \left[\frac{1}{12}(2)(8)^3 + (8)(2)(6.5 - 4)^2 \right] \\ &+ \left[\frac{1}{12}(8)(2)^3 + 2(8)(9 - 6.5)^2 \right] = 291 \text{ pulg.}^4 \text{ Resp.} \end{aligned}$$

Respuestas a problemas seleccionados

Capítulo 1

- 1-1. **a)** 4.66 m, **b)** 55.6 s, **c)** 4.56 kN, **d)** 2.77 Mg
1-2. $4.70 \text{ slug/pie}^3 = 2.42 \text{ Mg/m}^3$
1-3. **a)** $0.000431 \text{ kg} = 0.431 \text{ g}$,
b) $35.3(10^3) \text{ N} = 35.3 \text{ kN}$,
c) $0.00532 \text{ km} = 5.32 \text{ m}$
1-5. $55 \text{ mi/h} = 88.5 \text{ km/h}$, $88.5 \text{ km/h} = 24.6 \text{ m/s}$
1-6. **a)** $(430 \text{ kg})^2 = 0.185 \text{ Mg}^2$,
b) $(0.002 \text{ mg})^2 = 4 \mu\text{g}^2$,
c) $(230 \text{ m})^3 = 0.0122 \text{ km}^3$
1-7. **a)** $250(10^3) \text{ slugs} = 3.65 \text{ Gg}$,
b) $W_e = mg = 35.8 \text{ MN}$,
c) $W_m = mg_m = 5.89 \text{ MN}$,
d) $m_m = m_e = 3.65 \text{ Gg}$
1-9. $1 \text{ Pa} = 20.9(10^{-3}) \text{ lb/pie}^2$, $1 \text{ ATM} = 101 \text{ kPa}$
1-10. **a)** $W = 98.1 \text{ N}$,
b) $W = 4.90 \text{ mN}$,
c) $W = 44.1 \text{ kN}$
1-11. **a)** $(354 \text{ mg})(45 \text{ km})/0.0356 \text{ kN} = 0.447 \text{ kg} \cdot \text{m/N}$,
b) $(0.00453 \text{ Mg})(201 \text{ ms}) = 0.911 \text{ kg} \cdot \text{s}$,
c) $435 \text{ MN}/23.2 \text{ mm} = 18.8 \text{ GN/m}$
1-13. **a)** $20 \text{ lb} \cdot \text{pie} = 27.1 \text{ N} \cdot \text{m}$,
b) $450 \text{ lb/pie}^3 = 70.7 \text{ kN/m}^3$,
c) $15 \text{ pie/h} = 1.27 \text{ mm/s}$
1-14. $40 \text{ slugs} = 584 \text{ kg}$
1-15. $\rho_w = 1.00 \text{ Mg/m}^3$
1-17. **a)** $m = 2.04 \text{ g}$,
b) $m = 15.3 \text{ Mg}$,
c) $m = 6.12 \text{ Gg}$
1-18. **a)** $m = 4.81 \text{ slug}$, **b)** $m = 70.2 \text{ kg}$, **c)** $W = 689 \text{ N}$,
d) $W = 25.5 \text{ lb}$, **e)** $m = 70.2 \text{ kg}$
1-19. $F = 7.41(10^{-6}) \text{ N} = 7.41 \mu\text{N}$

Capítulo 2

- 2-1. $F_R = 867 \text{ N}$, $\phi = 108^\circ$
2-2. **a)** $F_R = 111 \text{ N}$, **b)** $F_R' = 143 \text{ N}$
2-3. $F_R = 393 \text{ lb}$, $\phi = 353^\circ$
2-5. $F_{1u} = 205 \text{ N}$, $F_{1v} = 160 \text{ N}$
2-6. $F_{2u} = 376 \text{ N}$, $F_{2v} = 482 \text{ N}$

- 2-7. $F_R = 10.8 \text{ kN}$, $\phi = 3.16^\circ$
2-9. $F_{AB} = 448 \text{ N}$, $F_{AC} = 366 \text{ N}$
2-10. $F_{AB} = 314 \text{ lb}$, $F_{AC} = 256 \text{ lb}$
2-11. $F_a = 30.6 \text{ lb}$, $F_b = 26.9 \text{ lb}$
2-13. $F_{AB} = 485 \text{ lb}$, $\theta = 24.6^\circ$
2-14. $T = 744 \text{ lb}$, $\theta = 23.8^\circ$
2-15. $\theta = 53.5^\circ$, $F_{AB} = 621 \text{ lb}$
2-17. **a)** $F_y = 16.3 \text{ lb}$, $F_n = -22.3 \text{ lb}$,
b) $F_t = 5.98 \text{ lb}$, $F_x = 16.3 \text{ lb}$
2-18. $\theta = 18.6^\circ$, $F = 319 \text{ N}$
2-19. $\phi = \theta = 70.5^\circ$
2-21. $F_B = 325 \text{ N}$, $F_A = 893 \text{ N}$, $\theta = 70.0^\circ$
2-22. $F_R = 19.2 \text{ N}$, $\theta = 2.37^\circ \swarrow \phi$
2-23. $F_R = 19.2 \text{ N}$, $\theta = 2.37^\circ \swarrow \phi$
2-25. $F_A = 3.66 \text{ kN}$, $F_B = 7.07 \text{ kN}$
2-26. $F_B = 5.00 \text{ kN}$, $F_A = 8.66 \text{ kN}$, $\theta = 60.0^\circ$
2-27. $F_A = 439 \text{ N}$, $F_B = 311 \text{ N}$
2-29. $\theta = 10.9^\circ$, $F_{\min} = 235 \text{ lb}$
2-30. $F = 97.4 \text{ lb}$, $\theta = 16.2^\circ$
2-31. $F_x = 514 \text{ lb}$, $F_y = -613 \text{ lb}$
2-33. $F = 11.3 \text{ kN}$
2-34. $F_R = 546 \text{ N}$, $\theta = 253^\circ$
2-35. $\theta = 37.0^\circ$, $F_1 = 889 \text{ N}$
2-37. $\theta = 29.1^\circ$, $F_1 = 275 \text{ N}$
2-38. $F_R = 1.03 \text{ kN}$, $\theta = 87.9^\circ$
2-39. $\mathbf{F}_1 = \{-15.0\mathbf{i} - 26.0\mathbf{j}\} \text{ kN}$,
 $\mathbf{F}_2 = \{-10.0\mathbf{i} + 24.0\mathbf{j}\} \text{ kN}$
2-41. $F_R = 867 \text{ N}$, $\theta = 108^\circ$
2-42. $F_R = 19.2 \text{ N}$, $\theta = 2.37^\circ \swarrow \phi$
2-43. $\theta = 68.6^\circ$, $F_B = 960 \text{ N}$
2-45. $F_{1x} = 141 \text{ N}$, $F_{1y} = 141 \text{ N}$, $F_{2x} = -130 \text{ N}$,
 $F_{2y} = 75 \text{ N}$
2-46. $F_R = 217 \text{ N}$, $\theta = 87.0^\circ$
2-47. $F_{1x} = -200 \text{ lb}$, $F_{1y} = 0$, $F_{2x} = 320 \text{ lb}$,
 $F_{2y} = -240 \text{ lb}$, $F_{3x} = 180 \text{ lb}$, $F_{3y} = 240 \text{ lb}$,
 $F_{4x} = -300 \text{ lb}$, $F_{4y} = 0$
2-49. $\theta = 54.3^\circ$, $F_A = 686 \text{ N}$
2-50. $F_R = 1.23 \text{ kN}$, $\theta = 6.08^\circ$
2-51. $\mathbf{F}_1 = \{90\mathbf{i} - 120\mathbf{j}\} \text{ lb}$,
 $\mathbf{F}_2 = \{-275\mathbf{j}\} \text{ lb}$, $\mathbf{F}_3 = \{-37.5\mathbf{i} - 65.0\mathbf{j}\} \text{ lb}$,
 $F_R = 463 \text{ lb}$
2-53. $F = 5.96 \text{ kN}$, $F_R = 2.33 \text{ kN}$

- 2-54. $\mathbf{F}_1 = \{F_1 \cos\theta \mathbf{i} + F_1 \sin\theta \mathbf{j}\}$ N,
 $\mathbf{F}_2 = \{350\mathbf{i}\}$ N, $\mathbf{F}_3 = \{-100\mathbf{j}\}$ N,
 $\theta = 67.0^\circ$, $F_1 = 434$ N
- 2-55. $\theta = 117^\circ$, $F_3 = 1.12 F_1$
- 2-57. $F_R = 161$ lb, $\theta = 38.3^\circ$
- 2-58. $F = 2.03$ kN, $F_R = 7.87$ kN,
- 2-59. $F_1 = 87.7$ N, $\alpha_1 = 46.9^\circ$, $\beta_1 = 125^\circ$, $\gamma_1 = 62.9^\circ$,
 $F_2 = 98.6$ N, $\alpha_2 = 114^\circ$, $\beta_2 = 150^\circ$, $\gamma_2 = 72.3^\circ$
- 2-61. $F = 50$ N, $\alpha = 74.1^\circ$, $\beta = 41.3^\circ$, $\gamma = 53.1^\circ$
- 2-62. $F_R = 39.4$ lb, $\alpha = 52.8^\circ$, $\beta = 141^\circ$, $\gamma = 99.5^\circ$
- 2-63. $\beta = 90^\circ$, $\mathbf{F} = \{-30\mathbf{i} - 52.0\mathbf{k}\}$ N
- 2-65. $\mathbf{F}_1 = \{53.1\mathbf{i} - 44.5\mathbf{j} + 40\mathbf{k}\}$ lb, $\alpha_1 = 48.4^\circ$,
 $\beta_1 = 124^\circ$, $\gamma_1 = 60^\circ$, $\mathbf{F}_2 = \{-130\mathbf{k}\}$ lb,
 $\alpha_2 = 90^\circ$, $\beta_2 = 90^\circ$, $\gamma_2 = 180^\circ$
- 2-66. $\alpha_1 = 45.6^\circ$, $\beta_1 = 53.1^\circ$, $\gamma_1 = 66.4^\circ$
- 2-67. $\alpha_1 = 90^\circ$, $\beta_1 = 53.1^\circ$, $\gamma_1 = 66.4^\circ$
- 2-69. $\mathbf{F}_1 = \{176\mathbf{j} - 605\mathbf{k}\}$ lb,
 $\mathbf{F}_2 = \{125\mathbf{i} - 177\mathbf{j} + 125\mathbf{k}\}$ lb,
 $\mathbf{F}_R = \{125\mathbf{i} - 0.377\mathbf{j} - 480\mathbf{k}\}$ lb,
 $F_R = 496$ lb; $\alpha = 75.4^\circ$, $\beta = 90.0^\circ$, $\gamma = 165^\circ$
- 2-70. $F_R = 369$ N, $\alpha = 19.5^\circ$, $\beta = 78.3^\circ$, $\gamma = 105^\circ$
- 2-71. $F_2 = 66.4$ lb, $\alpha = 59.8^\circ$, $\beta = 107^\circ$, $\gamma = 144^\circ$
- 2-73. $\mathbf{F}_1 = \{86.5\mathbf{i} + 186\mathbf{j} - 143\mathbf{k}\}$ N,
 $\mathbf{F}_2 = \{-200\mathbf{i} + 283\mathbf{j} + 200\mathbf{k}\}$ N,
 $\mathbf{F}_R = \{-113\mathbf{i} + 468\mathbf{j} + 56.6\mathbf{k}\}$ N,
 $F_R = 485$ N, $\alpha = 104^\circ$, $\beta = 15.1^\circ$, $\gamma = 83.3^\circ$
- 2-74. $F_x = 1.28$ kN, $F_y = 2.60$ kN, $F_z = 0.776$ kN
- 2-75. $F = 2.02$ kN, $F_y = 0.523$ kN
- 2-77. $F_3 = 166$ N, $\alpha = 97.5^\circ$, $\beta = 63.7^\circ$, $\gamma = 27.5^\circ$
- 2-78. $\alpha_{F_1} = 36.9^\circ$, $\beta_{F_1} = 90.0^\circ$, $\gamma_{F_1} = 53.1^\circ$,
 $\alpha_R = 69.3^\circ$, $\beta_R = 52.2^\circ$, $\gamma_R = 45.0^\circ$
- 2-79. $F_x = 40$ N, $F_y = 40$ N, $F_z = 56.6$ N
- 2-81. $r = 31.5$ m, $\alpha = 69.6^\circ$, $\beta = 116^\circ$, $\gamma = 34.4^\circ$
- 2-82. $\mathbf{r}_{AB} = \{2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\}$ ft, $r_{AB} = 8.83$ pies,
 $\alpha = 76.9^\circ$, $\beta = 142^\circ$, $\gamma = 124^\circ$
- 2-83. $\alpha = 73.4^\circ$, $\beta = 64.6^\circ$, $\gamma = 31.0^\circ$
- 2-85. $\mathbf{r} = \{-2.35\mathbf{i} + 3.93\mathbf{j} + 3.71\mathbf{k}\}$ pies, $r = 5.89$ pies,
 $\alpha = 113^\circ$, $\beta = 48.2^\circ$, $\gamma = 51.0^\circ$
- 2-86. $\mathbf{F} = \{404\mathbf{i} + 276\mathbf{j} - 101\mathbf{k}\}$ lb,
 $\alpha = 36.0^\circ$, $\beta = 56.5^\circ$, $\gamma = 102^\circ$
- 2-87. $r_{AB} = 2.11$ m
- 2-89. $r_{AB} = 17.0$ pies, $\mathbf{F} = \{-160\mathbf{i} - 180\mathbf{j} + 240\mathbf{k}\}$ lb
- 2-90. $r_{AB} = 467$ mm
- 2-91. $r_{AD} = 1.50$ m, $r_{BD} = 1.50$ m, $r_{CD} = 1.73$ m
- 2-93. $\mathbf{F} = \{452\mathbf{i} + 370\mathbf{j} - 136\mathbf{k}\}$ lb, $\alpha = 41.1^\circ$,
 $\beta = 51.9^\circ$, $\gamma = 103^\circ$
- 2-94. $F_R = 316$ N, $\alpha = 60.1^\circ$, $\beta = 74.6^\circ$, $\gamma = 146^\circ$
- 2-95. $\mathbf{F}_A = \{285\mathbf{j} - 93.0\mathbf{k}\}$ N,
 $\mathbf{F}_C = \{159\mathbf{i} + 183\mathbf{j} - 59.7\mathbf{k}\}$ N
- 2-97. $\mathbf{F}_{AB} = \{75.5\mathbf{i} - 43.6\mathbf{j} - 122\mathbf{k}\}$ lb,
 $\mathbf{F}_{BC} = \{26.8\mathbf{i} + 33.5\mathbf{j} - 90.4\mathbf{k}\}$ lb,
 $F_R = 236$ lb, $\alpha = 64.3^\circ$, $\beta = 92.5^\circ$, $\gamma = 154^\circ$
- 2-98. $\mathbf{F}_A = \{-43.5\mathbf{i} + 174\mathbf{j} - 174\mathbf{k}\}$ N,
 $\mathbf{F}_B = \{53.2\mathbf{i} - 79.8\mathbf{j} - 146\mathbf{k}\}$ N
- 2-99. $\mathbf{F}_1 = \{-26.2\mathbf{i} - 41.9\mathbf{j} + 62.9\mathbf{k}\}$ lb,
 $\mathbf{F}_2 = \{13.4\mathbf{i} - 26.7\mathbf{j} - 40.1\mathbf{k}\}$ lb,
 $F_R = 73.5$ lb, $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 159^\circ$, $\gamma = 71.9^\circ$
- 2-101. $\mathbf{F} = \{13.4\mathbf{i} + 23.2\mathbf{j} + 53.7\mathbf{k}\}$ lb
- 2-102. $\mathbf{F} = \{-6.61\mathbf{i} - 3.73\mathbf{j} + 9.29\mathbf{k}\}$ lb
- 2-103. $x = 7.65$ pies, $y = 4.24$ pies, $z = 3.76$ pies
- 2-105. $\mathbf{F}_{EA} = \{12\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}\}$ kN,
 $\mathbf{F}_{EB} = \{12\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}\}$ kN,
 $\mathbf{F}_{EC} = \{-12\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}\}$ kN,
 $\mathbf{F}_{ED} = \{-12\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}\}$ kN, $\mathbf{F}_R = \{-96\mathbf{k}\}$ kN
- 2-106. $F_R = 1.50$ kN, $\alpha = 77.6^\circ$, $\beta = 90.6^\circ$, $\gamma = 168^\circ$
- 2-107. $\mathbf{F} = \{143\mathbf{i} + 248\mathbf{j} - 201\mathbf{k}\}$ lb
- 2-109. La componente de $(\mathbf{B} + \mathbf{D})$ en la dirección \mathbf{A} es igual a la suma de las componentes de \mathbf{B} y \mathbf{D} en la dirección \mathbf{A} .
- 2-110. $\theta = 121^\circ$
- 2-111. $\theta = 109^\circ$
- 2-113. $\theta = 70.5^\circ$
- 2-114. $F_1 = 19.4$ N, $F_2 = 53.4$ N
- 2-115. $\theta = 74.2^\circ$
- 2-117. $F_{\parallel} = 99.1$ N, $F_{\perp} = 592$ N
- 2-118. $F_{\parallel} = 82.4$ N, $F_{\perp} = 594$ N
- 2-119. $F_1 = 333$ N, $F_2 = 373$ N
- 2-121. $\text{Proy. } F = 31.1$ N
- 2-122. $\theta = 70.5^\circ$
- 2-123. $\phi = 65.8^\circ$
- 2-125. $(F_1)_{F_2} = 5.44$ lb
- 2-126. $\theta = 100^\circ$
- 2-127. $\theta = 34.2^\circ$
- 2-129. $\theta = 82.0^\circ$

- 2-130. $(F_1)_{F_2} = 50.6 \text{ N}$
 2-131. $\theta = 97.3^\circ$
 2-133. $F_3 = 428 \text{ lb}$, $\alpha = 88.3^\circ$, $\beta = 20.6^\circ$, $\gamma = 69.5^\circ$
 2-134. $F_3 = 250 \text{ lb}$, $\alpha = 87.0^\circ$, $\beta = 143^\circ$, $\gamma = 53.1^\circ$
 2-135. $F_{BA} = 215 \text{ lb}$, $\theta = 52.7^\circ$
 2-137. $\phi = \frac{\theta}{2}$, $F_R = 2F \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$
 2-138. $\theta = 74.0^\circ$, $\phi = 33.9^\circ$
 2-139. $\text{Proy. } F_{AB} = 70.5 \text{ N}$, $\text{Proy. } F_{AC} = 65.1 \text{ N}$
 2-141. $\theta = 60^\circ$, $P = 40 \text{ lb}$, $T = 69.3 \text{ lb}$

Capítulo 3

- 3-1. $F_1 = 435 \text{ lb}$, $F_2 = 171 \text{ lb}$
 3-2. $\theta = 31.8^\circ$, $F = 4.94 \text{ kN}$
 3-3. $\theta = 12.9^\circ$, $F_1 = 552 \text{ N}$
 3-5. $F_1 = 1.83 \text{ kN}$, $F_2 = 9.60 \text{ kN}$
 3-6. $\theta = 4.69^\circ$, $F_1 = 4.31 \text{ kN}$
 3-7. $F_{BC} = 2.99 \text{ kN}$, $F_{AB} = 3.78 \text{ kN}$
 3-9. $\theta = 34.2^\circ$
 3-10. $\theta = 11.5^\circ$
 3-11. $F = 1.13 \text{ mN}$
 3-13. $x_{AC} = 0.793 \text{ m}$, $x_{AB} = 0.467 \text{ m}$
 3-14. $m = 12.8 \text{ kg}$
 3-15. $F = 158 \text{ N}$
 3-17. $W = 76.6 \text{ lb}$
 3-18. $\theta = 78.7^\circ$, $F_{CD} = 127 \text{ lb}$
 3-19. $\theta = 78.7^\circ$, $W = 51.0 \text{ lb}$
 3-21. $d = 2.42 \text{ m}$
 3-22. $\theta = 60^\circ$, $T_{AB} = 34.6 \text{ lb}$
 3-23. $\theta = 60^\circ$, $W = 46.2 \text{ lb}$
 3-25. $s = 5.33 \text{ pies}$
 3-26. $W = 6 \text{ lb}$
 3-27. $F_{AC} = F_{AB} = F = \{2.45 \csc \theta\} \text{ kN}$, $l = 1.72 \text{ m}$
 3-29. $l = 19.1 \text{ pulg.}$
 3-30. En C y D , $T = 106 \text{ lb}$
 3-31. $\theta = 35.0^\circ$
 3-33. $W_E = 18.3 \text{ lb}$
 3-34. $l = 2.65 \text{ pies}$
 3-35. $F_{BD} = 171 \text{ N}$, $F_{BC} = 145 \text{ N}$
 3-37. $\theta = 43.0^\circ$

- 3-38. $y = 6.59 \text{ m}$
 3-39. $m_B = 3.58 \text{ kg}$, $N = 19.7 \text{ N}$
 3-41. $F_1 = 608 \text{ N}$, $\alpha = 79.2^\circ$, $\beta = 16.4^\circ$, $\gamma = 77.8^\circ$
 3-42. $F_1 = 800 \text{ N}$, $F_2 = 147 \text{ N}$, $F_3 = 564 \text{ N}$
 3-43. $F_1 = 5.60 \text{ kN}$, $F_2 = 8.55 \text{ kN}$, $F_3 = 9.44 \text{ kN}$
 3-45. $F_{AD} = 1.20 \text{ kN}$, $F_{AC} = 0.40 \text{ kN}$, $F_{AB} = 0.80 \text{ kN}$
 3-46. $F_{AC} = 130 \text{ N}$, $F_{AD} = 510 \text{ N}$, $F = 1.06 \text{ kN}$
 3-47. $s_{OB} = 327 \text{ mm}$, $s_{OA} = 218 \text{ mm}$
 3-49. $F_{AB} = 0.980 \text{ kN}$, $F_{AC} = 0.463 \text{ kN}$, $F_{AD} = 1.55 \text{ kN}$
 3-50. $F_{AO} = 319 \text{ N}$, $F_{AB} = 110 \text{ N}$, $F_{AC} = 85.8 \text{ N}$
 3-51. $W = 138 \text{ N}$
 3-53. $F_{AE} = F_{AD} = 1.42 \text{ kN}$, $F_{AB} = 1.32 \text{ kN}$
 3-54. $F_{AB} = F_{AC} = 16.6 \text{ kN}$, $F_{AD} = 55.2 \text{ kN}$
 3-55. $F_B = 19.2 \text{ kN}$, $F_C = 10.4 \text{ kN}$, $F_D = 6.32 \text{ kN}$
 3-57. $F_{AB} = 520 \text{ N}$, $F_{AC} = F_{AD} = 260 \text{ N}$, $d = 3.61 \text{ m}$
 3-58. $F_{AB} = 35.9 \text{ lb}$, $F_{AC} = F_{AD} = 25.4 \text{ lb}$
 3-59. $W = 267 \text{ lb}$
 3-61. $F_{AB} = 469 \text{ lb}$, $F_{AC} = F_{AD} = 331 \text{ lb}$
 3-62. $x = 0.190 \text{ m}$, $y = 0.0123 \text{ m}$
 3-63. $F_{AD} = 1.42 \text{ kip}$, $F_{AC} = 0.914 \text{ kip}$, $F_{AB} = 1.47 \text{ kip}$
 3-65. $F_{OB} = 120 \text{ N}$, $F_{OC} = 150 \text{ N}$, $F_{OD} = 480 \text{ N}$
 3-66. $F_A = 34.6 \text{ lb}$, $F_B = 57.3 \text{ lb}$
 3-67. $F = 40.8 \text{ lb}$
 3-69. Romeo puede subir por la cuerda.
 Romeo y Julieta pueden bajar por la cuerda.
 3-70. $F_1 = 8.26 \text{ kN}$, $F_2 = 3.84 \text{ kN}$, $F_3 = 12.2 \text{ kN}$
 3-71. $\theta = 90^\circ$, $F_{AC} = 160 \text{ lb}$, $\theta = 120^\circ$, $F_{AB} = 160 \text{ lb}$
 3-73. $W = 240 \text{ lb}$
 3-74. $F_{CD} = 625 \text{ lb}$, $F_{CA} = F_{CB} = 198 \text{ lb}$
 3-75. $F_1 = 0$, $F_2 = 311 \text{ lb}$, $F_3 = 238 \text{ lb}$

Capítulo 4

- 4-3. Si $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0$, entonces el volumen es igual a cero, por lo que \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} son coplanares.
 4-5. $M_P = 2.37 \text{ kN} \cdot \text{m} \uparrow$
 4-6. $M_O = 2.88 \text{ kN} \cdot \text{m} \downarrow$
 4-7. $M_P = 3.15 \text{ kN} \cdot \text{m} \downarrow$
 4-9. $M_P = 3.15 \text{ kN} \cdot \text{m} \uparrow$
 4-10. $(M_{F_1})_O = 24.1 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$,
 $(M_{F_2})_O = 14.5 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$
 4-11. $M_O = 2.42 \text{ kip} \cdot \text{pie} \downarrow$

- 4-13. $(M_{F_1})_B = 4.125 \text{ kip} \cdot \text{pie} \downarrow$,
 $(M_{F_2})_B = 2.00 \text{ kip} \cdot \text{pie} \downarrow$,
 $(M_{F_3})_B = 40.0 \text{ lb} \cdot \text{pie} \downarrow$
- 4-14. $M_B = 90.6 \text{ lb} \cdot \text{pie} \uparrow$, $M_C = 141 \text{ lb} \cdot \text{pie} \uparrow$
- 4-15. $M_A = 195 \text{ lb} \cdot \text{pie} \uparrow$
- 4-17. $M_O = 28.1 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$, $\theta = 88.6^\circ$,
 $(M_O)_{\text{máx}} = 32.0 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$
- 4-18. a) $(M_A)_{\text{máx}} = 330 \text{ lb} \cdot \text{pie}$, $\theta = 76.0^\circ$,
b) $(M_A)_{\text{mín}} = 0$, $\theta = 166^\circ$
- 4-19. $-M_O = 120 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$, $+M_O = 520 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$
- 4-21. a) $M_A = 13.0 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$, b) $F = 35.2 \text{ N}$
- 4-22. $(M_{F_1})_A = 433 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$,
 $(M_{F_2})_A = 1.30 \text{ kN} \cdot \text{m} \downarrow$,
 $(M_{F_3})_A = 800 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$
- 4-23. $\theta = 7.48^\circ$
- 4-25. $F_A = 28.9 \text{ lb}$
- 4-26. $(M_O)_{\text{máx}} = 80 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $x = 24.0 \text{ m}$
- 4-27. $(M_O)_{\text{máx}} = 80.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $\theta = 33.6^\circ$
- 4-29. $M_A = 1200 \text{ sen } \theta + 800 \text{ cos } \theta \downarrow$
- 4-30. $M_A = 0.418 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$,
 $M_B = 4.92 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$
- 4-31. $M_A = \{1.18 \text{ cos } \theta(7.5 + x)\} \text{ kN} \cdot \text{m} \downarrow$,
 $(M_A)_{\text{máx}} = 14.7 \text{ kN} \cdot \text{m} \downarrow$
- 4-33. $F = 1.33 \text{ kip}$, $F' = 1.63 \text{ kip}$
- 4-34. $\mathbf{M}_O = \{260\mathbf{i} + 180\mathbf{j} + 510\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4-35. $\mathbf{M}_O = \{440\mathbf{i} + 220\mathbf{j} + 990\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4-37. $\mathbf{M}_P = \{-116\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 135\mathbf{k}\} \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4-38. $\mathbf{M}_O = \{-128\mathbf{i} + 128\mathbf{j} - 257\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4-39. $\mathbf{M}_B = \{-37.6\mathbf{i} + 90.7\mathbf{j} - 155\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4-41. $\mathbf{M}_C = \{-35.4\mathbf{i} - 128\mathbf{j} - 222\mathbf{k}\} \text{ lb} \cdot \text{pie}$
- 4-42. $\mathbf{M}_A = \{-16.0\mathbf{i} - 32.1\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4-43. $F_{AB} = 18.6 \text{ lb}$
- 4-45. $\mathbf{M}_B = \{10.6\mathbf{i} + 13.1\mathbf{j} + 29.2\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4-46. $\mathbf{M}_O = \{373\mathbf{i} - 99.9\mathbf{j} + 173\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4-47. $\mathbf{M}_R = \{-1.90\mathbf{i} + 6.00\mathbf{j}\} \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4-49. $y = 1 \text{ m}$, $z = 3 \text{ m}$, $d = 1.15 \text{ m}$
- 4-50. $M_A = \sqrt{12 \text{ 656.25 sen}^2 \theta + 22 \text{ 500}}$,
 $M_{\text{máx}}$ en $\theta = 90^\circ$, $M_{\text{mín}}$ en $\theta = 0^\circ, 180^\circ$
- 4-51. $(\mathbf{M}_{Oa})_P = \{218\mathbf{j} + 163\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4-53. $(\mathbf{M}_R)_{Oa} = \{26.1\mathbf{i} - 15.1\mathbf{j}\} \text{ lb} \cdot \text{pie}$
- 4-54. $(M_{AB})_1 = 72.0 \text{ N} \cdot \text{m}$, $(M_{AB})_2 = (M_{AB})_3 = 0$
- 4-55. $M_x = 44.4 \text{ lb} \cdot \text{pie}$
- 4-57. $M_y = 0.277 \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4-58. $\mathbf{M}_y = \{-78.4\mathbf{j}\} \text{ lb} \cdot \text{pie}$
- 4-59. $M_x = 15.0 \text{ lb} \cdot \text{pie}$, $M_y = 4.00 \text{ lb} \cdot \text{pie}$,
 $M_z = 36.0 \text{ lb} \cdot \text{pie}$
- 4-61. $M_x = 3.75 \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4-62. $M_z = 109 \text{ lb} \cdot \text{pulg.}$
- 4-63. $M_{CA} = 226 \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4-65. $P = 8.50 \text{ lb}$
- 4-66. $M_y = 282 \text{ lb} \cdot \text{pie}$
- 4-67. $\mathbf{M}_z = \{35.4\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$
- 4-69. $M_C = 18.3 \text{ kN} \cdot \text{m} \uparrow$
- 4-70. $M_C = 650 \text{ lb} \cdot \text{pie} \uparrow$
- 4-71. $M_C = 17.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \uparrow$
- 4-73. $F = 133 \text{ N}$, $P = 800 \text{ N}$
- 4-74. $T = 0.909 \text{ kip}$
- 4-75. $N = 26.0 \text{ N}$
- 4-77. $M = 900 \text{ lb} \cdot \text{pie}$, $R_B = 500 \text{ lb}$
- 4-78. $F = 139 \text{ lb}$
El par resultante puede actuar en cualquier parte.
- 4-79. $\mathbf{M}_C = \{-5\mathbf{i} + 8.75\mathbf{j}\} \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4-81. $d = 1.54 \text{ m}$
- 4-82. $F = 167 \text{ lb}$
El par resultante puede actuar en cualquier parte.
- 4-83. $d = 2.03 \text{ pies}$
- 4-85. $M_C = 126 \text{ lb} \cdot \text{pie}$
- 4-86. $\mathbf{M}_C = \{-360\mathbf{i} + 380\mathbf{j} + 320\mathbf{k}\} \text{ lb} \cdot \text{pie}$
- 4-87. $\mathbf{M}_C = \{-411\mathbf{i} - 257\mathbf{j} - 651\mathbf{k}\} \text{ lb} \cdot \text{pie}$
- 4-89. $(M_R)_{x'} = 4.84 \text{ kip} \cdot \text{pie}$, $(M_R)_{y'} = 29.8 \text{ kip} \cdot \text{pie}$
- 4-90. $\mathbf{M}_C = \{7.01\mathbf{i} + 42.1\mathbf{j}\} \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4-91. $F = 35.1 \text{ N}$
- 4-93. $\mathbf{M}_R = \{11.0\mathbf{i} - 49.0\mathbf{j} - 40.0\mathbf{k}\} \text{ lb} \cdot \text{pie}$,
 $M_R = 64.2 \text{ lb} \cdot \text{pie}$, $\alpha = 80.1^\circ$, $\beta = 140^\circ$, $\gamma = 129^\circ$
- 4-94. $M_R = 59.9 \text{ N} \cdot \text{m}$, $\alpha = 99.0^\circ$, $\beta = 106^\circ$, $\gamma = 18.3^\circ$
- 4-95. $M = 18.3 \text{ N} \cdot \text{m}$, $\alpha = 155^\circ$, $\beta = 115^\circ$, $\gamma = 90^\circ$
- 4-97. $d = 342 \text{ mm}$
- 4-98. $F_O = 375 \text{ N}$, $M_O = 100 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$
- 4-99. $F_P = 375 \text{ N}$, $M_P = 737 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$
- 4-101. $F_R = 178 \text{ N}$, $\theta = 73.0^\circ \nearrow$, $M_{R_p} = 2.68 \text{ kN} \cdot \text{m} \uparrow$
- 4-102. $F_R = 274 \text{ lb}$, $\theta = 5.24^\circ \searrow$, $M_O = 4.61 \text{ kip} \cdot \text{pie} \uparrow$
- 4-103. $F_R = 274 \text{ lb}$, $\theta = 5.24^\circ \searrow$, $M_P = 5.48 \text{ kip} \cdot \text{ft} \uparrow$
- 4-105. $F_R = 6.57 \text{ kN}$, $\theta = 57.4^\circ \swarrow$, $M_{R_p} = 31.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \uparrow$
- 4-106. $F_R = 2.10 \text{ kN}$, $\theta = 81.6^\circ \swarrow$, $M_O = 10.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \downarrow$

- 4-107. $F_R = 2.10 \text{ kN}$, $\theta = 81.6^\circ \nearrow$, $M_P = 16.8 \text{ kN} \cdot \text{m} \downarrow$
 4-109. $F_R = 375 \text{ lb} \uparrow$, $x = 2.47 \text{ pies}$
 4-110. $F_R = 5.93 \text{ kN}$, $\theta = 77.8^\circ \swarrow$,
 $M_{R_A} = 34.8 \text{ kN} \cdot \text{m} \downarrow$
 4-111. $F_R = 5.93 \text{ kN}$, $\theta = 77.8^\circ \swarrow$, $M_{R_B} = 11.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \uparrow$
 4-113. $F = 798 \text{ lb}$, $\theta = 67.9^\circ \searrow$, $x = 6.57 \text{ pies}$
 4-114. $F = 922 \text{ lb}$, $\theta = 77.5^\circ \searrow$, $x = 3.56 \text{ pies}$
 4-115. $F = 1302 \text{ N}$, $\theta = 84.5^\circ \searrow$, $x = 7.36 \text{ m}$
 4-117. $F_2 = 25.9 \text{ lb}$, $\theta = 18.1^\circ$, $F_1 = 68.1 \text{ lb}$
 4-118. $F_R = 10.75 \text{ kip} \downarrow$, $M_{R_A} = 99.5 \text{ kip} \cdot \text{pie} \uparrow$
 4-119. $F_R = 10.75 \text{ kip} \downarrow$, $d = 9.26 \text{ pies}$
 4-121. $F_R = 991 \text{ N}$, $\theta = 63.0^\circ \searrow$, $x = 2.64 \text{ m}$
 4-122. $F_R = 65.9 \text{ lb}$, $\theta = 49.8^\circ \swarrow$, $d = 2.10 \text{ pies}$
 4-123. $F_R = 65.9 \text{ lb}$, $\theta = 49.8^\circ \swarrow$, $d = 4.62 \text{ pies}$
 4-125. $\mathbf{F}_R = \{8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\} \text{ kN}$,
 $\mathbf{M}_{R_O} = \{-10\mathbf{i} + 18\mathbf{j} - 56\mathbf{k}\} \text{ kN} \cdot \text{m}$
 4-126. $\mathbf{F}_R = \{8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\} \text{ kN}$,
 $\mathbf{M}_{R_P} = \{-46\mathbf{i} + 66\mathbf{j} - 56\mathbf{k}\} \text{ kN} \cdot \text{m}$
 4-127. $\mathbf{F}_R = \{8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\} \text{ kN}$,
 $\mathbf{M}_{R_Q} = \{-10\mathbf{i} - 30\mathbf{j} - 20\mathbf{k}\} \text{ kN} \cdot \text{m}$
 4-129. $\mathbf{F}_R = \{-28.3\mathbf{j} - 68.3\mathbf{k}\} \text{ N}$,
 $\mathbf{M}_{R_A} = \{-20.5\mathbf{j} + 8.49\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$
 4-130. $\mathbf{F}_R = \{400\mathbf{i} + 300\mathbf{j} - 650\mathbf{k}\} \text{ N}$,
 $\mathbf{M}_{R_A} = \{-3100\mathbf{i} + 4800\mathbf{j}\} \text{ N} \cdot \text{m}$
 4-131. $\mathbf{F}_R = \{0.232\mathbf{i} + 5.06\mathbf{j} + 12.4\mathbf{k}\} \text{ kN}$,
 $\mathbf{M}_{R_O} = \{36.0\mathbf{i} - 26.1\mathbf{j} + 12.2\mathbf{k}\} \text{ kN} \cdot \text{m}$
 4-133. $F_R = 140 \text{ kN} \downarrow$, $y = 7.14 \text{ m}$, $x = 5.71 \text{ m}$
 4-134. $F_R = 140 \text{ kN} \downarrow$, $x = 6.43 \text{ m}$, $y = 7.29 \text{ m}$
 4-135. $\mathbf{F}_R = \{141\mathbf{i} + 100\mathbf{j} + 159\mathbf{k}\} \text{ N}$,
 $\mathbf{M}_{R_O} = \{122\mathbf{i} - 183\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$
 4-137. $F_R = 990 \text{ N}$, $M_R = 3.07 \text{ kN} \cdot \text{m}$,
 $x = 1.16 \text{ m}$, $y = 2.06 \text{ m}$
 4-138. $F_R = 108 \text{ lb}$, $M_R = -624 \text{ lb} \cdot \text{pie}$,
 $z = 8.69 \text{ pies}$, $y = 0.414 \text{ pies}$
 4-139. $F_{R_O} = 13.2 \text{ lb} \downarrow$, $x = 0.340 \text{ pies}$
 4-141. $F_R = 51.0 \text{ kN} \downarrow$, $M_{R_O} = 914 \text{ kN} \cdot \text{m} \downarrow$
 4-142. $F_R = 51.0 \text{ kN} \downarrow$, $d = 17.9 \text{ m}$
 4-143. $F_R = 3.25 \text{ kip}$, $\theta = 67.2^\circ \searrow$, $x = 3.86 \text{ pies}$
 4-145. $F_R = 18.0 \text{ kip} \downarrow$, $x = 11.7 \text{ pies}$
 4-146. $F_R = 1.10 \text{ kN} \downarrow$, $M_{R_O} = 3.10 \text{ kN} \cdot \text{m} \downarrow$
 4-147. $d = 1.50 \text{ m}$, $w = 175 \text{ N/m}$
 4-149. $F_R = 3.90 \text{ kip} \uparrow$, $d = 11.3 \text{ pies}$
 4-150. $b = 4.50 \text{ pies}$, $a = 9.75 \text{ pies}$
 4-151. $F_R = 10.6 \text{ kip} \downarrow$, $x = 0.479 \text{ pies}$
 4-153. $F_R = 1.35 \text{ kN}$, $\theta = 42.0^\circ \searrow$, $x = 0.556 \text{ m}$
 4-154. $F_R = 95.6 \text{ kN} \rightarrow$, $M_{R_O} = 349 \text{ kN} \cdot \text{m} \downarrow$
 4-155. $F_R = 107 \text{ kN} \leftarrow$, $h = 1.60 \text{ m}$
 4-157. $F_R = 3.60 \text{ kN} \downarrow$, $M_{R_O} = 19.4 \text{ kN} \cdot \text{m} \downarrow$
 4-158. $F_R = 80.6 \text{ kip} \uparrow$, $\bar{x} = 14.6 \text{ pies}$
 4-159. $F_R = 1.87 \text{ kip} \downarrow$, $\bar{x} = 3.66 \text{ pies}$
 4-161. $\alpha = 70.8^\circ$, $\beta = 39.8^\circ$, $\gamma = 56.7^\circ$ o
 $\alpha = 109^\circ$, $\beta = 140^\circ$, $\gamma = 123^\circ$
 4-162. $\mathbf{M}_O = \{298\mathbf{i} + 15.1\mathbf{j} - 200\mathbf{k}\} \text{ lb} \cdot \text{pulg.}$
 4-163. $P = 23.8 \text{ lb}$
 4-165. $\mathbf{M}_{a-a} = 59.7 \text{ N} \cdot \text{m}$
 4-166. $\mathbf{M}_{C_R} = \{63.6\mathbf{i} - 170\mathbf{j} + 264\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$
 4-167. $\mathbf{F}_R = \{14.3\mathbf{i} + 21.4\mathbf{j} - 42.9\mathbf{k}\} \text{ lb}$,
 $\mathbf{M}_A = \{-1.93\mathbf{i} + 0.429\mathbf{j} - 0.429\mathbf{k}\} \text{ kip} \cdot \text{pie}$
 4-169. $\mathbf{M}_O = \{1.06\mathbf{i} + 1.06\mathbf{j} - 4.03\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$,
 $\alpha = 75.7^\circ$, $\beta = 75.7^\circ$, $\gamma = 160^\circ$
 4-170. $\mathbf{F}_R = \{-70\mathbf{i} + 140\mathbf{j} - 408\mathbf{k}\} \text{ N}$,
 $\mathbf{M}_{R_P} = \{-26\mathbf{i} + 357\mathbf{j} + 127\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$

Capítulo 5

- 5-11. $N_B = 245 \text{ N}$, $N_A = 425 \text{ N}$
 5-13. $T_{AB} = 5.89 \text{ kN}$, $C_x = 5.11 \text{ kN}$, $C_y = 4.05 \text{ kN}$
 5-14. $T_{BC} = 11.1 \text{ kip}$, $A_x = 10.2 \text{ kip}$, $A_y = 6.15 \text{ kip}$
 5-15. $N_B = 2.14 \text{ kip}$, $A_x = 1.29 \text{ kip}$, $A_y = 1.49 \text{ kip}$
 5-17. $N_C = 493 \text{ N}$, $N_B = 554 \text{ N}$, $N_A = 247 \text{ N}$
 5-18. $B_y = 642 \text{ N}$, $A_x = 192 \text{ N}$, $A_y = 180 \text{ N}$
 5-19. $B_y = 586 \text{ N}$, $F_A = 413 \text{ N}$
 5-21. $F_A = 30 \text{ lb}$, $F_B = 36.2 \text{ lb}$, $F_C = 9.38 \text{ lb}$
 5-22. $F_H = 59.4 \text{ lb}$, $T_B = 67.4 \text{ lb}$
 5-23. $F_{CD} = 195 \text{ lb}$, $A_x = 97.4 \text{ lb}$, $A_y = 31.2 \text{ lb}$
 5-25. $(N_A)_r = 98.6 \text{ lb}$, $(N_A)_s = 100 \text{ lb}$
 5-26. $N_B = 10.5 \text{ N}$, $A_x = 42.0 \text{ N}$, $A_y = 10.5 \text{ N}$
 5-27. $W_B = 78.6 \text{ lb}$
 5-29. $F_B = 6.38 \text{ N}$, $A_x = 3.19 \text{ N}$, $A_y = 2.48 \text{ N}$
 5-30. $F_{BC} = 574 \text{ lb}$, $A_x = 1.08 \text{ kip}$, $A_y = 637 \text{ lb}$
 5-31. $A_x = 1462 \text{ lb}$, $F_B = 1.66 \text{ kip}$
 5-33. $D_x = 0$, $D_y = 1.65 \text{ kip}$, $M_D = 1.40 \text{ kip} \cdot \text{pie}$
 Retire la línea de 800 lb.

- 5-34. $x = 10$ pies, $A_x = 4.17$ kip, $A_y = 5.00$ kip
 $x = 4$ pies, $A_x = 1.67$ kip, $A_y = 5.00$ kip
- 5-35. $F_B = 105$ N
- 5-37. $F = 311$ kN, $A_x = 460$ kN, $A_y = 7.85$ kN
- 5-38. $h = 15.8$ pies
- 5-39. $N_A = 81.6$ lb, $F_B = 50.2$ lb
- 5-41. $B_x = 989$ N, $A_x = 989$ N, $B_y = 186$ N
- 5-42. $w_1 = 413$ kN/m, $w_2 = 407$ kN/m
- 5-43. $T = 5$ kN, $T_{BC} = 16.4$ kN, $F_A = 20.6$ kN
- 5-45. $R_A = 40.9$ kip, $R_B = 125$ kip
- 5-46. $C_x = 333$ lb, $C_y = 722$ lb
- 5-47. a) $N_A = 2.19$ kip, $N_B = 1.16$ kip,
 b) $W = 4.74$ kip
- 5-49. $F_2 = 724$ lb, $F_1 = 1.45$ kip, $F_A = 1.75$ kip
- 5-50. $d = \frac{3a}{4}$
- 5-51. $N_B = 2.11$ N, $F_A = 2.81$ N
- 5-53. $k = 11.2$ lb/pie
- 5-54. $R_A = 26.0$ lb, $R_B = 11.9$ lb, $R_C = 63.9$ lb
- 5-55. $\alpha = 1.02^\circ$
- 5-57. $d = \frac{a}{\cos^3 \theta}$
- 5-58. $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$
- 5-59. $\alpha = 10.4^\circ$
- 5-62. $\theta = 27.1^\circ$ o $\theta = 50.2^\circ$
- 5-63. $T = 1.84$ kN, $F = 6.18$ kN
- 5-65. $T_B = 2.75$ kip, $T_C = 1.375$ kip, $T_A = 1.375$ kip
- 5-66. $W = 750$ lb, $x = 5.20$ pies, $y = 5.27$ pies
- 5-67. $F_A = 663$ lb, $F_C = 569$ lb, $F_B = 449$ lb
- 5-69. $N_C = 289$ N, $N_A = 213$ N, $N_B = 332$ N
- 5-70. $A_x = 0$, $A_y = 1.50$ kip, $A_z = 750$ lb, $T = 919$ lb
- 5-71. $F = 1.31$ kip, $A_x = 0$, $A_y = 1.31$ kip, $A_z = 653$ lb
- 5-73. $P = 75$ lb, $A_y = 0$, $A_z = 75$ lb, $B_z = 75$ lb,
 $B_x = 112$ lb, $A_x = 37.5$ lb
- 5-74. $O_x = 0$, $O_y = -84.9$ lb, $O_z = 80.0$ lb,
 $(M_O)_x = 948$ lb·pie, $(M_O)_y = 0$, $(M_O)_z = 0$
- 5-75. $F_{BC} = 0$, $A_y = 0$, $A_z = 800$ lb,
 $(M_A)_x = 4.80$ kip·pie, $(M_A)_y = 0$, $(M_A)_z = 0$
- 5-77. $T = 58.0$ N, $C_z = 87.0$ N, $C_y = 28.8$ N,
 $D_x = 0$, $D_y = 79.2$ N, $D_z = 58.0$ N
- 5-78. $T = 58.0$ N, $C_z = 77.6$ N, $C_y = 24.9$ N,
 $D_x = 0$, $D_y = 68.5$ N, $D_z = 32.1$ N

- 5-79. $A_x = 633$ lb, $A_y = -141$ lb, $B_x = -721$ lb,
 $B_z = 895$ lb, $C_y = 200$ lb, $C_z = -506$ lb
- 5-81. $B_z = 1167$ lb, $C_z = 734$ lb, $A_z = 1600$ lb
- 5-82. $T_{DE} = 32.1$ lb, $T_{BC} = 42.9$ lb, $A_x = 3.57$ lb,
 $A_y = 50$ lb, $(M_A)_x = 0$, $(M_A)_y = -17.9$ lb·pie
- 5-83. $T_B = 16.7$ kN, $A_x = 0$, $A_y = 5.00$ kN,
 $A_z = 16.7$ kN
- 5-85. $T_B = 25$ lb, $A_x = 25$ lb, $A_y = -25$ lb,
 $A_z = 50$ lb, $B_y = 25$ lb
- 5-86. $B_z = 25.0$ lb, $P = 62.5$ lb, $B_x = 22.3$ lb,
 $A_x = 84.8$ lb, $B_y = 0$, $A_z = 25.0$ lb
- 5-87. $F_{AC} = F_{BC} = 6.13$ kN, $F_{DE} = 19.6$ kN
- 5-89. $A_x = 0$, $A_y = 0$, $A_z = 589$ lb
- 5-90. $F_{BC} = 205$ N, $F_{ED} = 629$ N
 $A_x = 32.4$ N, $A_y = 107$ N, $A_z = 1.28$ kN
- 5-91. $F_{CD} = 1.02$ kN, $A_z = -208$ N, $B_z = -139$ N,
 $A_y = 573$ N, $B_y = 382$ N
- 5-93. $F = 354$ N
- 5-94. $N_A = 8.00$ kN, $B_x = 5.20$ kN, $B_y = 5.00$ kN
- 5-95. $N_B = 400$ N, $F_A = 721$ N
- 5-97. $N_B = 957$ N, $A_y = 743$ N, $A_x = 0$
- 5-98. $A_x = 0$, $A_y = 0$, $A_z = B_z = C_z = 5.33$ lb
- 5-99. $A_x = 0$, $A_y = -200$ N, $A_z = 150$ N,
 $(M_A)_x = -100$ N·m, $(M_A)_y = 0$,
 $(M_A)_z = -500$ N·m

Capítulo 6

- 6-1. $F_{BA} = 286$ lb (T), $F_{BC} = 808$ lb (T),
 $F_{CA} = 571$ lb (C)
- 6-2. $F_{BA} = 286$ lb (T), $F_{BC} = 384$ lb (T),
 $F_{CA} = 271$ lb (C)
- 6-3. $F_{AD} = 849$ lb (C), $F_{AB} = 600$ lb (T),
 $F_{BD} = 400$ lb (C), $F_{BC} = 600$ lb (T),
 $F_{DC} = 1.41$ kip (T), $F_{DE} = 1.60$ kip (C)
- 6-5. $F_{AE} = 8.94$ kN (C), $F_{AB} = 8.00$ kN (T),
 $F_{BC} = 8.00$ kN (T), $F_{BE} = 8.00$ kN (C),
 $F_{EC} = 8.94$ kN (T), $F_{ED} = 17.9$ kN (C)
- 6-6. $F_{AE} = 372$ N (C), $F_{AB} = 332$ N (T),
 $F_{BC} = 332$ N (T), $F_{BE} = 196$ N (C),
 $F_{EC} = 558$ N (T), $F_{ED} = 929$ N (C),
 $F_{DC} = 582$ N (T)

- 6-7. $F_{BC} = 3 \text{ kN (C)}$, $F_{BA} = 8 \text{ kN (C)}$,
 $F_{AC} = 1.46 \text{ kN (C)}$, $F_{AF} = 4.17 \text{ kN (T)}$,
 $F_{CD} = 4.17 \text{ kN (C)}$, $F_{CF} = 3.12 \text{ kN (C)}$,
 $F_{EF} = 0$, $F_{ED} = 13.1 \text{ kN (C)}$,
 $F_{DF} = 5.21 \text{ kN (T)}$
- 6-9. $F_{CB} = 8.00 \text{ kN (T)}$, $F_{CD} = 6.93 \text{ kN (C)}$,
 $F_{DE} = 6.93 \text{ kN (C)}$, $F_{DB} = 4.00 \text{ kN (T)}$,
 $F_{BE} = 4.00 \text{ kN (C)}$, $F_{BA} = 12.0 \text{ kN (T)}$
- 6-10. $F_{AG} = 471 \text{ lb (C)}$, $F_{AB} = 333 \text{ lb (T)}$,
 $F_{BG} = 0$, $F_{BC} = 333 \text{ lb (T)}$,
 $F_{DE} = 943 \text{ lb (C)}$, $F_{DC} = 667 \text{ lb (T)}$,
 $F_{EC} = 667 \text{ lb (T)}$, $F_{EG} = 667 \text{ lb (C)}$,
 $F_{CG} = 471 \text{ lb (T)}$
- 6-11. $F_{AG} = 1179 \text{ lb (C)}$, $F_{AB} = 833 \text{ lb (T)}$,
 $F_{BC} = 833 \text{ lb (T)}$, $F_{BG} = 500 \text{ lb (T)}$,
 $F_{DE} = 1650 \text{ lb (C)}$, $F_{DC} = 1167 \text{ lb (T)}$,
 $F_{EC} = 1167 \text{ lb (T)}$, $F_{EG} = 1167 \text{ lb (C)}$,
 $F_{CG} = 471 \text{ lb (T)}$
- 6-13. $F_{GB} = 30 \text{ kN (T)}$, $F_{AF} = 20 \text{ kN (C)}$,
 $F_{AB} = 22.4 \text{ kN (C)}$, $F_{BF} = 20 \text{ kN (T)}$,
 $F_{BC} = 20 \text{ kN (T)}$, $F_{FC} = 28.3 \text{ kN (C)}$, $F_{FE} = 0$,
 $F_{ED} = 0$, $F_{EC} = 20.0 \text{ kN (T)}$, $F_{DC} = 0$
- 6-14. $F_{AB} = 330 \text{ lb (C)}$, $F_{AF} = 79.4 \text{ lb (T)}$,
 $F_{BF} = 233 \text{ lb (T)}$, $F_{BC} = 233 \text{ lb (C)}$,
 $F_{FC} = 47.1 \text{ lb (C)}$, $F_{FE} = 113 \text{ lb (T)}$,
 $F_{EC} = 300 \text{ lb (T)}$, $F_{ED} = 113 \text{ lb (T)}$,
 $F_{CD} = 377 \text{ lb (C)}$
- 6-15. $F_{AB} = 377 \text{ lb (C)}$, $F_{AF} = 190 \text{ lb (T)}$,
 $F_{BF} = 267 \text{ lb (T)}$, $F_{BC} = 267 \text{ lb (C)}$,
 $F_{FC} = 189 \text{ lb (T)}$, $F_{FE} = 56.7 \text{ lb (T)}$,
 $F_{ED} = 56.7 \text{ lb (T)}$, $F_{EC} = 0$,
 $F_{CD} = 189 \text{ lb (C)}$
- 6-17. $P = 5.20 \text{ kN}$
- 6-18. $F_{CB} = 400 \text{ lb (C)}$, $F_{CD} = 693 \text{ lb (C)}$,
 $F_{BD} = 667 \text{ lb (T)}$, $F_{BA} = 1.13 \text{ kip (C)}$
- 6-19. $F_{CD} = 3.61 \text{ kN (C)}$, $F_{CB} = 3 \text{ kN (T)}$,
 $F_{BA} = 3 \text{ kN (T)}$, $F_{BD} = 3 \text{ kN (C)}$,
 $F_{DA} = 2.70 \text{ kN (T)}$, $F_{DE} = 6.31 \text{ kN (C)}$
- 6-21. $F_{BA} = P \csc 2\theta \text{ (C)}$, $F_{BC} = P \cot 2\theta \text{ (C)}$,
 $F_{CA} = (\cot \theta \cos \theta - \sin \theta + 2 \cos \theta)P \text{ (T)}$,
 $F_{CD} = (\cot 2\theta + 1)P \text{ (C)}$,
 $F_{DA} = (\cot 2\theta + 1)(\cos 2\theta)P \text{ (C)}$
- 6-22. $P_{\text{máx}} = 732 \text{ N}$
- 6-23. $F_{DE} = 16.3 \text{ kN (C)}$, $F_{DC} = 8.40 \text{ kN (T)}$,
 $F_{EA} = 8.85 \text{ kN (C)}$, $F_{EC} = 6.20 \text{ kN (C)}$,
 $F_{CF} = 8.77 \text{ kN (T)}$, $F_{CB} = 2.20 \text{ kN (T)}$,
 $F_{BA} = 3.11 \text{ kN (T)}$, $F_{BF} = 6.20 \text{ kN (C)}$,
 $F_{FA} = 6.20 \text{ kN (T)}$
- 6-25. $F_{AB} = 7.5 \text{ kN (T)}$, $F_{AE} = 4.5 \text{ kN (C)}$,
 $F_{ED} = 4.5 \text{ kN (C)}$, $F_{EB} = 8 \text{ kN (T)}$,
 $F_{BD} = 19.8 \text{ kN (C)}$, $F_{BC} = 18.5 \text{ kN (T)}$
- 6-26. $F_{AB} = 196 \text{ N (T)}$, $F_{AE} = 118 \text{ N (C)}$,
 $F_{ED} = 118 \text{ N (C)}$, $F_{EB} = 216 \text{ N (T)}$,
 $F_{BD} = 1.04 \text{ kN (C)}$, $F_{BC} = 857 \text{ N (T)}$
- 6-27. $F_{CB} = F_{CD} = 0$, $F_{AB} = 2.40P \text{ (C)}$,
 $F_{AF} = 2.00P \text{ (T)}$, $F_{BF} = 1.86P \text{ (T)}$,
 $F_{BD} = 0.373P \text{ (C)}$,
 $F_{FE} = 1.86P \text{ (T)}$, $F_{FD} = 0.333P \text{ (T)}$,
 $F_{DE} = 0.373P \text{ (C)}$
- 6-29. $127^\circ \leq \theta \leq 196^\circ$, $336^\circ \leq \theta \leq 347^\circ$
- 6-30. $F_{HG} = 29.0 \text{ kN (C)}$, $F_{BC} = 20.5 \text{ kN (T)}$,
 $F_{HC} = 12.0 \text{ kN (T)}$
- 6-31. $F_{GF} = 29.0 \text{ kN (C)}$, $F_{CD} = 23.5 \text{ kN (T)}$,
 $F_{CF} = 7.78 \text{ kN (T)}$
- 6-33. $F_{KJ} = 13.3 \text{ kN (T)}$, $F_{BC} = 14.9 \text{ kN (C)}$,
 $F_{CK} = 0$
- 6-34. $F_{KJ} = 11.2 \text{ kip (T)}$, $F_{CD} = 9.38 \text{ kip (C)}$,
 $F_{CJ} = 3.12 \text{ kip (C)}$, $F_{DJ} = 0$
- 6-35. $F_{JI} = 7.50 \text{ kip (T)}$, $F_{EI} = 2.50 \text{ kip (C)}$
- 6-37. $F_{FG} = 8.08 \text{ kN (T)}$, $F_{CD} = 8.47 \text{ kN (C)}$,
 $F_{CF} = 0.770 \text{ kN (T)}$
- 6-38. $F_{GF} = 671 \text{ lb (C)}$, $F_{GB} = 671 \text{ lb (T)}$
- 6-39. $F_{BG} = -200\sqrt{L^2 + 9}$,
 $F_{BC} = -200L$, $F_{HG} = 400L$
- 6-41. AB, BC, CD, DE, HI y GI son miembros de fuerza cero.
 $F_{JE} = 9.38 \text{ kN (C)}$, $F_{GF} = 5.625 \text{ kN (T)}$
- 6-42. $F_{BC} = 10.4 \text{ kN (C)}$, $F_{HG} = 9.16 \text{ kN (T)}$,
 $F_{HC} = 2.24 \text{ kN (T)}$
- 6-43. $F_{CD} = 11.2 \text{ kN (C)}$, $F_{CF} = 3.21 \text{ kN (T)}$,
 $F_{CG} = 6.80 \text{ kN (C)}$
- 6-45. $F_{GJ} = 2.00 \text{ kip (C)}$
- 6-46. $F_{GC} = 1.00 \text{ kip (T)}$
- 6-47. $F_{GF} = 1.78 \text{ kN (T)}$, $F_{CD} = 2.23 \text{ kN (C)}$,
 $F_{CF} = 0$
- 6-49. $F_{EF} = P \text{ (C)}$, $F_{CB} = 1.12P \text{ (T)}$, $F_{BE} = 0.5P \text{ (T)}$

- 6-50. $F_{AB} = P$ (T), $F_{EF} = P$ (C), $F_{BF} = 1.41P$ (C)
- 6-51. BN, NC, DO, OC, HJ, LE y JG son miembros de fuerza cero.
 $F_{CD} = 5.625$ kN (T), $F_{CM} = 2.00$ kN (T)
- 6-53. $F_{KJ} = 3.07$ kip (C), $F_{CD} = 3.07$ kip (T)
 $F_{ND} = 0.167$ kip (T), $F_{NJ} = 0.167$ kip (C)
- 6-54. $F_{JI} = 2.13$ kip (C), $F_{DE} = 2.13$ kip (T)
- 6-55. $F_{AD} = 300$ lb (C), $F_{BD} = 450$ lb (C),
 $F_{CD} = 568$ lb (C)
- 6-57. $F_{DC} = F_{DA} = 2.59$ kN (C), $F_{DB} = 3.85$ kN (C)
 $F_{BC} = F_{BA} = 0.890$ kN (T), $F_{AC} = 0.616$ kN (T)
- 6-58. $F_{BF} = 0$, $F_{BC} = 0$,
 $F_{BE} = 500$ lb (T), $F_{AB} = 300$ lb (C),
 $F_{AC} = 583$ lb (T), $F_{AD} = 333$ lb (T),
 $F_{AE} = 667$ lb (C), $F_{DE} = 0$,
 $F_{EF} = 300$ lb (C), $F_{CD} = 300$ lb (C),
 $F_{CF} = 300$ lb (C), $F_{DF} = 424$ lb (T)
- 6-59. $F_{BF} = 0$, $F_{BC} = 0$, $F_{BE} = 500$ lb (T),
 $F_{AB} = 300$ lb (C), $F_{AC} = 972$ lb (T), $F_{AD} = 0$,
 $F_{AE} = 367$ lb (C), $F_{DE} = 0$, $F_{EF} = 300$ lb (C),
 $F_{CD} = 500$ lb (C), $F_{CF} = 300$ lb (C),
 $F_{DF} = 424$ lb (T)
- 6-61. $F_{BC} = F_{BD} = 1.34$ kN (C),
 $F_{AB} = 2.4$ kN (C), $F_{AG} = F_{AE} = 1.01$ kN (T),
 $F_{BG} = 1.80$ kN (T), $F_{BE} = 1.80$ kN (T)
- 6-62. $F_{BC} = 1.15$ kN (C), $F_{DF} = 4.16$ kN (C),
 $F_{BE} = 4.16$ kN (T)
- 6-63. $F_{CF} = 0$, $F_{CD} = 2.31$ kN (T),
 $F_{ED} = 3.46$ kN (T), $F_{AB} = 3.46$ kN (C)
- 6-65. $F_{BC} = 0$, $F_{CD} = 0$, $F_{CF} = 8$ kN (C),
 $F_{BD} = 0$, $F_{BA} = 6$ kN (C),
 $F_{AD} = 0$, $F_{DF} = 0$, $F_{DE} = 9$ kN (C),
 $F_{EF} = 0$, $F_{EA} = 0$, $F_{AF} = 0$
- 6-66. a) $P = 25.0$ lb, b) $P = 33.3$ lb, c) $P = 11.1$ lb
- 6-67. $F_B = 61.9$ lb, $F_A = 854$ lb
- 6-69. $R_E = 177$ lb, $R_A = 128$ lb
- 6-70. $P = 40.0$ N, $x = 240$ mm
- 6-71. $P = 21.8$ N, $R_A = 43.6$ N,
 $R_B = 43.6$ N, $R_C = 131$ N
- 6-73. $A_y = 9.59$ kip, $B_y = 8.54$ kip,
 $C_y = 2.93$ kip, $C_x = 9.20$ kip
- 6-74. $P = 743$ N
- 6-75. $A_y = 300$ N, $A_x = 300$ N, $C_x = 300$ N, $C_y = 300$ N
- 6-77. $B_y = 1.33$ kN, $B_x = 5.00$ kN,
 $A_x = C_x = 5.00$ kN, $A_y = C_y = 6.67$ kN
 $M_D = 10.0$ kN·m, $D_y = 8.00$ kN, $D_x = 0$
- 6-78. $C_x = 75$ lb, $C_y = 100$ lb
- 6-79. $A_x = 4.20$ kN, $B_x = 4.20$ kN, $A_y = 4.00$ kN,
 $B_y = 3.20$ kN, $C_x = 3.40$ kN, $C_y = 4.00$ kN
- 6-81. $T = 100$ lb, $\theta = 14.6^\circ$
- 6-82. $x = 9.43$ pies
- 6-83. $T = 350$ lb, $A_y = 700$ lb, $A_x = 1.88$ kip,
 $D_x = 1.70$ kip, $D_y = 1.70$ kip
- 6-85. $A_x = 80$ lb, $A_y = 80$ lb, $B_y = 133$ lb,
 $B_x = 333$ lb, $C_x = 413$ lb, $C_y = 53.3$ lb
- 6-86. $F_{AB} = 9.23$ kN, $C_x = 2.17$ kN, $C_y = 7.01$ kN,
 $D_x = 0$, $D_y = 1.96$ kN, $M_D = 2.66$ kN·m
- 6-87. $C_y = 34.4$ lb, $C_x = 16.7$ lb,
 $B_x = 66.7$ lb, $B_y = 15.6$ lb
- 6-89. $C_x = D_x = 160$ lb, $C_y = D_y = 107$ lb,
 $B_y = 26.7$ lb, $B_x = 80.0$ lb, $E_x = 0$,
 $E_y = 26.7$ lb, $A_x = 160$ lb
- 6-90. $F_E = 3.64F$
- 6-91. $A_y = 657$ N, $C_y = 229$ N, $C_x = 0$,
 $B_x = 0$, $B_y = 429$ N
- 6-93. $m = 366$ kg, $F_A = 2.93$ kN
- 6-94. $M = 314$ lb·pie
- 6-95. $P = 46.9$ lb
- 6-97. $A_y = 34.0$ N, $A_x = 0$,
 $C_y = 6.54$ N, $C_x = 0$,
 $x = 292$ mm, $B_y = 1.06$ N, $B_x = 0$
- 6-98. $F_{DE} = 1.07$ kN
- 6-99. $C_y = 1.33$ kN, $B_y = 549$ N,
 $C_x = 2.98$ kN, $A_y = 235$ N,
 $A_x = 2.98$ kN, $B_x = 2.98$ kN
- 6-101. $F = 9.42$ lb
- 6-102. $F_{AC} = 2.51$ kip, $F_{AB} = 3.08$ kip, $F_{AD} = 3.43$ kip
- 6-103. $W_C = 0.812W$
- 6-105. $B_y = 940$ lb, $A_y = 360$ lb,
 $M_C = 7.80$ kip·pie, $C_y = 900$ lb, $C_x = 250$ lb
- 6-106. $N_C = 20$ lb, $B_x = 34$ lb, $B_y = 62$ lb,
 $A_x = 34$ lb, $A_y = 12$ lb, $M_A = 336$ lb·pie
- 6-107. $E_x = 6.79$ kN, $E_y = 1.55$ kN,
 $D_x = 981$ N, $D_y = 981$ N

- 6-109. $\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{8W}{kL}\right)$
- 6-110. $1.75 \text{ pies} \leq x \leq 17.4 \text{ pies}$
- 6-111. $F_D = 20.8 \text{ lb}$, $F_F = 14.7 \text{ lb}$, $F_A = 24.5 \text{ lb}$
- 6-113. a) $F = 175 \text{ lb}$, $N_C = 350 \text{ lb}$
 b) $F = 87.5 \text{ lb}$, $N_C = 87.5 \text{ lb}$
- 6-114. a) $F = 205 \text{ lb}$, $N_C = 380 \text{ lb}$
 b) $F = 102 \text{ lb}$, $N_C = 72.5 \text{ lb}$
- 6-115. $M = 14.2 \text{ lb} \cdot \text{pie}$
- 6-117. $F_{AB} = 981 \text{ N}$, $F_E = 2.64 \text{ kN}$, $F_{CD} = 16.3 \text{ kN}$,
 $F_F = 14.0 \text{ kN}$
- 6-118. $x = 4.38 \text{ pulg.}$
- 6-119. $P = 3000 \text{ psi}$
- 6-121. $T_{AI} = 2.88 \text{ kip}$, $F_H = 3.99 \text{ kip}$
- 6-122. $F_{CA} = 12.9 \text{ kip}$, $F_{AB} = 11.9 \text{ kip}$, $F_{AD} = 2.39 \text{ kip}$
- 6-123. $W_1 = 3 \text{ lb}$, $W_2 = 21 \text{ lb}$, $W_3 = 75 \text{ lb}$
- 6-125. $P_{\text{máx}} = 471 \text{ N}$, $B_x = D_x = 283 \text{ N}$,
 $B_y = D_y = 283 \text{ N}$, $B_z = D_z = 0$
- 6-126. $F_{AB} = 1.56 \text{ kN}$, $M_{Ex} = 0.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_{Ey} = 0$,
 $E_y = 0$, $E_x = 0$,
 $F_{BE} = 1.53 \text{ kip}$, $F_{CD} = 350 \text{ lb}$
- 6-127. $M_{Cx} = 0$, $C_x = 0$, $F_{BA} = 1.54 \text{ kip}$,
 $C_z = -0.18 \text{ kip}$, $C_y = -1.17 \text{ kip}$,
 $M_{Cz} = -4.14 \text{ kip} \cdot \text{pie}$, $A_x = 0$,
 $A_y = 1.44 \text{ kip}$, $A_z = 0.540 \text{ kip}$
- 6-129. $\theta = 16.1^\circ$
- 6-130. $A_x = 1.40 \text{ kN}$, $A_y = 250 \text{ N}$,
 $C_x = 500 \text{ N}$, $C_y = 1.70 \text{ kN}$
- 6-131. $\theta = 21.7^\circ$
- 6-133. $B_x = B_y = 220 \text{ N}$, $A_x = 300 \text{ N}$, $A_y = 80.4 \text{ N}$
- 6-134. $A_x = 117 \text{ N}$, $A_y = 397 \text{ N}$,
 $B_x = 97.4 \text{ N}$, $B_y = 97.4 \text{ N}$
- 6-135. $P = \frac{kL}{2 \tan \theta \text{sen } \theta} (2 - \text{csc } \theta)$
- 6-137. $F_{AD} = 2.47 \text{ kip (T)}$, $F_{AC} = F_{AB} = 1.22 \text{ kip (C)}$
- 7-5. $M_C = -15.0 \text{ kip} \cdot \text{pie}$, $N_C = 0$, $V_C = 2.01 \text{ kip}$,
 $M_D = 3.77 \text{ kip} \cdot \text{pie}$, $N_D = 0$, $V_D = 1.11 \text{ kip}$
- 7-6. $N_C = 0$, $V_C = -1.00 \text{ kip}$, $M_C = 56.0 \text{ kip} \cdot \text{pie}$,
 $N_D = 0$, $V_D = -1.00 \text{ kip}$, $M_D = 48.0 \text{ kip} \cdot \text{pie}$
- 7-7. $N_C = 0$, $V_C = -386 \text{ lb}$, $M_C = -857 \text{ lb} \cdot \text{pie}$,
 $N_D = 0$, $V_D = 300 \text{ lb}$, $M_D = -600 \text{ lb} \cdot \text{pie}$
- 7-9. $N_D = -800 \text{ N}$, $V_D = 0$, $M_D = 1.20 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 7-10. $w = 100 \text{ N/m}$
- 7-11. $M_C = 48 \text{ kip} \cdot \text{pie}$, $V_C = 6 \text{ kip}$
- 7-13. $N_D = 0$, $V_D = 800 \text{ lb}$, $M_D = -1.60 \text{ kip} \cdot \text{pie}$,
 $N_C = 0$, $V_C = 0$, $M_C = 800 \text{ lb} \cdot \text{pie}$
- 7-14. $N_D = 1.92 \text{ kN}$, $V_D = 100 \text{ N}$, $M_D = 900 \text{ N} \cdot \text{m}$
- 7-15. $N_E = -1.92 \text{ kN}$, $V_E = 800 \text{ N}$, $M_E = 2.40 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 7-17. $N_C = -406 \text{ lb}$, $V_C = 903 \text{ lb}$, $M_C = 1.35 \text{ kip} \cdot \text{pie}$
- 7-18. $N_D = -464 \text{ lb}$, $V_D = -203 \text{ lb}$, $M_D = 2.61 \text{ kip} \cdot \text{pie}$
- 7-19. $N_C = -30 \text{ kN}$, $V_C = -8 \text{ kN}$, $M_C = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 7-21. $N_B = 0$, $V_B = 28.8 \text{ kip}$, $M_B = -115 \text{ kip} \cdot \text{pie}$
- 7-22. $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$
- 7-23. $N_C = 20.0 \text{ kN}$, $V_C = 70.6 \text{ kN}$, $M_C = -302 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 7-25. $M_C = -17.8 \text{ kip} \cdot \text{pie}$
- 7-26. $N_D = 0$, $V_D = 0.75 \text{ kip}$, $M_D = 13.5 \text{ kip} \cdot \text{pie}$,
 $N_E = 0$, $V_E = -9 \text{ kip}$, $M_E = -24.0 \text{ kip} \cdot \text{pie}$
- 7-27. $N_D = 2.40 \text{ kN}$, $V_D = 50 \text{ N}$, $M_D = 1.35 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 7-29. $V_C = 2.49 \text{ kN}$, $N_C = 2.49 \text{ kN}$, $M_C = 4.97 \text{ kN} \cdot \text{m}$,
 $N_D = 0$, $V_D = -2.49 \text{ kN}$, $M_D = 16.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 7-30. $N_B = 59.8 \text{ lb}$, $V_B = -496 \text{ lb}$, $M_B = -480 \text{ lb} \cdot \text{pie}$,
 $N_C = -495 \text{ lb}$, $V_C = 70.7 \text{ lb}$, $M_C = -1.59 \text{ kip} \cdot \text{pie}$
- 7-31. $N_A = 86.6 \text{ lb}$, $V_A = 150 \text{ lb}$, $M_A = 1800 \text{ lb} \cdot \text{pulg.}$
- 7-33. $N_D = 0$, $V_D = 0$, $M_D = 9.00 \text{ kN} \cdot \text{m}$,
 $N_E = 0$, $V_E = -7.00 \text{ kN}$, $M_E = -12.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 7-34. $V_E = 0$, $N_E = 894 \text{ N}$, $M_E = 0$, $V_F = 447 \text{ N}$,
 $N_F = 224 \text{ N}$, $M_F = 224 \text{ N} \cdot \text{m}$
- 7-35. $a = \frac{L}{3}$
- 7-37. $N = -0.866rw_0$, $V = -1.5rw_0$, $M = 1.23r^2w_0$
- 7-38. $C_x = -150 \text{ lb}$, $C_y = -350 \text{ lb}$, $C_z = 700 \text{ lb}$
 $M_{Cx} = 1.40 \text{ kip} \cdot \text{pie}$, $M_{Cy} = -1.20 \text{ kip} \cdot \text{pie}$,
 $M_{Cz} = -750 \text{ lb} \cdot \text{pie}$
- 7-39. $C_x = -170 \text{ lb}$, $C_y = -50 \text{ lb}$, $C_z = 500 \text{ lb}$
 $M_{Cx} = 1 \text{ kip} \cdot \text{pie}$, $M_{Cy} = -900 \text{ lb} \cdot \text{pie}$,
 $M_{Cz} = -260 \text{ lb} \cdot \text{pie}$

Capítulo 7

- 7-1. $V_A = 0$, $N_A = 12.0 \text{ kN}$, $M_A = 0$, $V_B = 0$,
 $N_B = 20.0 \text{ kN}$, $M_B = 1.20 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 7-2. $N_A = 550 \text{ lb}$, $N_B = 250 \text{ lb}$, $N_C = 950 \text{ lb}$
- 7-3. $N_A = 5.00 \text{ kN}$, $N_C = 4.00 \text{ kN}$, $N_B = 3.00 \text{ kN}$

7-41. $N_C = -350 \text{ lb}$, $(V_C)_y = 700 \text{ lb}$, $(V_C)_z = -150 \text{ lb}$,
 $(M_C)_x = -1.20 \text{ kip} \cdot \text{pie}$, $(M_C)_y = -750 \text{ lb} \cdot \text{pie}$,
 $(M_C)_z = 1.40 \text{ kip} \cdot \text{pie}$

7-42. Para $0 \leq x < a$: $V = \frac{Pb}{a+b}$, $M = \frac{Pb}{a+b}x$,

Para $a < x < a+b$: $V = -\frac{Pa}{a+b}$,

$M = Pa - \frac{Pa}{a+b}x$

7-43. Para $0 \leq x < 5 \text{ pies}$: $V = 100$, $M = 100x - 1800$
 Para $5 < x \leq 10 \text{ pies}$: $V = 100$, $M = 100x - 1000$

7-45. Para $0 \leq x < \frac{L}{3}$: $V = 0$, $M = 0$

Para $\frac{L}{3} < x < \frac{2L}{3}$: $V = 0$, $M = M_0$

Para $\frac{2L}{3} < x \leq L$: $V = 0$, $M = 0$

Para $0 \leq x < \frac{8}{3} \text{ m}$: $V = 0$, $M = 0$

Para $\frac{8}{3} \text{ m} < x < \frac{16}{3} \text{ m}$: $V = 0$, $M = 500 \text{ N} \cdot \text{m}$

Para $\frac{16}{3} \text{ m} < x \leq 8 \text{ m}$: $V = 0$, $M = 0$

7-46. $M_0 = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$

7-47. $w = 400 \text{ lb/pie}$

7-49. Para $0 \leq x < 20 \text{ pies}$: $V = \{490 - 50.0x\} \text{ lb}$,
 $M = \{490x - 25.0x^2\} \text{ lb} \cdot \text{pie}$, para 20 pies
 $< x \leq 30 \text{ pies}$: $V = 0$, $M = -200 \text{ lb} \cdot \text{pie}$

7-50. Para $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$: $V = \frac{wL}{8}$, $M = \frac{wL}{8}x$,

Para $\frac{L}{2} < x \leq L$: $V = \frac{w}{8}(5L - 8x)$,

$M = \frac{w}{8}(-L^2 + 5Lx - 4x^2)$

7-51. $V = 250(10 - x)$, $M = 25(100x - 5x^2 - 6)$

7-53. **Miembro AB:**

Para $0 \leq x < 12 \text{ pies}$:

$V = \{875 - 150x\} \text{ lb}$,

$M = \{875x - 75.0x^2\} \text{ lb} \cdot \text{pie}$,

Para $12 < x \leq 14 \text{ pies}$:

$V = \{2100 - 150x\} \text{ lb}$,

$M = \{-75.0x^2 + 2100x - 14700\} \text{ lb} \cdot \text{pie}$,

Miembro CD:

Para $0 \leq x < 2 \text{ pies}$: $V = 919 \text{ lb}$,

$M = 919x \text{ lb} \cdot \text{pie}$

Para $2 < x \leq 8 \text{ pies}$: $V = 306 \text{ lb}$,

$M = \{2450 - 306x\} \text{ lb} \cdot \text{pie}$

7-54. $V = \frac{w}{4}(3L - 4x)$, $M = \frac{w}{4}(3Lx - 2x^2 - L^2)$

7-55. Para $0 \leq x < L$: $V = \frac{w}{18}(7L - 18x)$,

$M = \frac{w}{18}(7Lx - 9x^2)$, Para $L < x < 2L$:

$V = \frac{w}{2}(3L - 2x)$, $M = \frac{w}{18}(27Lx - 20L^2 - 9x^2)$,

Para $2L < x \leq 3L$: $V = \frac{w}{18}(47L - 18x)$,

$M = \frac{w}{18}(47Lx - 9x^2 - 60L^2)$

7-57. $w = 22.2 \text{ lb/pie}$

7-58. $x = \frac{L}{2}$, $P = \frac{4M_{\text{máx}}}{L}$

7-59. Para $0 \leq x \leq 12 \text{ pies}$: $V = \left\{48.0 - \frac{x^2}{6}\right\} \text{ kip}$,

$M = \left\{48.0x - \frac{x^3}{18} - 576\right\} \text{ kip} \cdot \text{pie}$

Para $12 < x \leq 24 \text{ pies}$: $V = \left\{\frac{1}{6}(24 - x)^2\right\} \text{ kip}$,

$M = \left\{-\frac{1}{18}(24 - x)^3\right\} \text{ kip} \cdot \text{pie}$

7-61. $V = \frac{w}{12L}(4L^2 - 6Lx - 3x^2)$,

$M = \frac{w}{12L}(4L^2x - 3Lx^2 - x^3)$, $M_{\text{máx}} = 0.0940wL^2$

7-62. Para $0 \leq x < a$: $V = P$, $M = Px$,

para $a < x < L - a$: $V = 0$, $M = Pa$,

Para $L - a < x \leq L$: $V = -P$, $M = P(L - x)$

$V = 800 \text{ lb}$, $M = 800x \text{ lb} \cdot \text{pie}$, $V = 0$,

$M = 4000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$, $V = -800 \text{ lb}$,

$M = (9600 - 800x) \text{ lb} \cdot \text{pie}$

7-63. $V_x = 1.5 \text{ kip}$, $V_y = 0$, $V_z = 800(4 - y) \text{ lb}$,

$M_x = 400(4 - y)^2 \text{ lb} \cdot \text{pie}$, $M_y = -3 \text{ kip} \cdot \text{pie}$,

$M_z = -1500(4 - y) \text{ lb} \cdot \text{pie}$

7-65. $V_x = 0$, $V_z = \{24.0 - 4y\} \text{ lb}$,

$M_x = \{2y^2 - 24y + 64.0\} \text{ lb} \cdot \text{pie}$,

$M_y = 8.00 \text{ lb} \cdot \text{pie}$, $M_z = 0$

7-78. $w = 2 \text{ kip/pie}$

- 7-89. $F_{BC} = 46.7 \text{ lb}$, $F_{BA} = 83.0 \text{ lb}$, $F_{CD} = 88.1 \text{ lb}$,
 $l = 20.2 \text{ pies}$
- 7-90. $F_{DC} = 43.7 \text{ lb}$, $F_{DB} = 78.2 \text{ lb}$, $F_{CA} = 74.7 \text{ lb}$,
 $l = 15.7 \text{ pies}$
- 7-91. $y_B = 8.67 \text{ pies}$, $y_D = 7.04 \text{ pies}$
- 7-93. $x_B = 4.36 \text{ pies}$
- 7-94. $P = 71.4 \text{ lb}$
- 7-95. $P_1 = 2.50 \text{ kN}$, $P_2 = 6.25 \text{ kN}$, $F_{\text{máx}} = 12.5 \text{ kN}$
- 7-97. $w = 51.9 \text{ lb/pie}$
- 7-98. $T_{\text{máx}} = 14.4 \text{ kip}$, $T_{\text{mín}} = 13.0 \text{ kip}$
- 7-99. $y = (38.5x^2 + 577x)(10^{-3}) \text{ m}$, $T_{\text{máx}} = 5.20 \text{ kN}$
- 7-101. $y = 2.37(10^{-3})x^3$, $T_{\text{máx}} = 4.42 \text{ kip}$
- 7-102. $y = \frac{x^2}{7813} \left(75 - \frac{x^2}{200} \right) \text{ pies}$, $T_{\text{máx}} = 9.28 \text{ kip}$
- 7-103. $h = 7.09 \text{ m}$
- 7-105. $L = 302 \text{ pies}$
- 7-107. $\frac{h}{L} = 0.141$
- 7-109. $(T_{\text{máx}})_B = 2.73 \text{ kip}$, $(T_{\text{máx}})_C = 2.99 \text{ kip}$
- 7-110. $T_{\text{mín}} = 185 \text{ lb}$, $h = 50.3 \text{ pies}$
- 7-111. $T_{\text{máx}} = 170 \text{ lb}$, $L = 150 \text{ pies}$
- 7-113. Peso total = 4.00 kip , $T_{\text{máx}} = 2.01 \text{ kip}$
- 7-114. $h = 6.21 \text{ pies}$, $N_m = 306 \text{ lb}$
- 7-115. $l = 238 \text{ pies}$, $h = 93.75 \text{ pies}$
- 7-117. $a = 0.366L$
- 7-119. Para $0 \leq x < 3 \text{ m}$: $V = 1.50 \text{ kN}$,
 $M = 1.50x \text{ kN} \cdot \text{m}$, Para $3 < x \leq 6 \text{ m}$:
 $V = -4.50 \text{ kN}$, $M = \{27.0 - 4.50x\} \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 7-121. $N_C = 0$, $V_C = 9.00 \text{ kN}$,
 $M_C = -62.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$,
 $N_B = 0$, $V_B = 27.5 \text{ kN}$,
 $M_B = -184.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 7-122. $T_{\text{máx}} = 76.7 \text{ lb}$

Capítulo 8

- 8-1. En ambos casos, $N_A = 16.5 \text{ kN}$, $N_B = 42.3 \text{ kN}$.
 Cuando las ruedas en A están trabadas, el vagón se mueve.
 Cuando ambas ruedas en A y B están trabadas, el vagón no se mueve.
- 8-2. $F_C = 27.4 \text{ lb}$, $N_C = 309 \text{ lb}$
- 8-3. El poste permanecerá estacionario.
- 8-5. $P = 15 \text{ lb}$
- 8-6. $P = 1 \text{ lb}$
- 8-7. $N_C = 800 \text{ lb}$, $N_B = 961 \text{ lb}$
- 8-9. La escalera no se deslizará.
- 8-10. $P = \frac{M_0}{\mu_s r a} (b - \mu_s c)$
- 8-13. a) No, b) Sí
- 8-14. a) No, b) Sí
- 8-15. Es posible jalar la carga sin que haya deslizamiento o volteo.
- 8-17. $P = 83.3 \text{ lb}$
- 8-18. $P = 100 \text{ lb}$
- 8-19. $m = 54.9 \text{ kg}$
- 8-21. a) $W = 318 \text{ lb}$, b) $W = 360 \text{ lb}$
- 8-22. $F = 22.5 \text{ lb}$, $\mu_m = 0.15$
- 8-23. $F = 30.4 \text{ lb}$, $\mu_m = 0.195$
- 8-25. $d = 2.70 \text{ pulg.}$
- 8-26. $\theta = 16.7^\circ$, $\phi = 42.6^\circ$
- 8-27. El carro A no se moverá.
- 8-29. $\theta = 16.7^\circ$, $P = 0.287W$
- 8-30. Se presenta deslizamiento en A .
- 8-31. $\theta = 11.0^\circ$
- 8-33. $\mu_s = 0.268$
- 8-34. $L = 3.35 \text{ pies}$
- 8-35. $P = 100 \text{ lb}$, $d = 1.50 \text{ pies}$
- 8-37. $F_D = 36.9 \text{ lb}$, $A_y = 468 \text{ lb}$, $B_x = 34.6 \text{ lb}$,
 $B_y = 228 \text{ lb}$
- 8-38. $\theta = 10.6^\circ$, $x = 0.184 \text{ pies}$ (alargamiento)
- 8-39. $\theta = 8.53^\circ$, $F_A = 1.48 \text{ lb}$, $F_B = 0.890 \text{ lb}$
- 8-41. $P = 63.5 \text{ lb}$
- 8-42. $\mu = 0.176$
- 8-43. $P = 45.0 \text{ lb}$, $\mu_s' = 0.300$
- 8-45. $P = 13.3 \text{ lb}$
- 8-46. $M = 90.6 \text{ N} \cdot \text{m}$
- 8-47. $P = 355 \text{ N}$
- 8-50. $\phi = \theta = \tan^{-1} \mu$, $P = W \sin(\alpha + \phi)$
- 8-51. $P = 107 \text{ N}$
- 8-53. $P = 196 \text{ N}$
- 8-54. $P = 40.2 \text{ N}$
- 8-55. $P = \frac{1}{2} \mu_s W$

- 8-57. La mesa de trabajo empezará a deslizarse.
 8-58. La mesa de trabajo empezará a deslizarse.
 8-59. $M = 77.3 \text{ N} \cdot \text{m}$
 8-61. $P = 375 \text{ N}$
 8-62. $P = 2.39 \text{ kN}$
 8-63. $W = 66.6 \text{ lb}$
 8-65. $P = 34.5 \text{ N}$
 8-66. $P = 304 \text{ N}$
 8-67. $x = 32.9 \text{ mm}$
 8-69. $P = 69.4 \text{ lb}$
 8-70. $P = 5.53 \text{ kN}$
 La cuña será autobloqueante.
 8-71. $W = 7.19 \text{ kN}$
 8-73. $\mu_s = 0.0637$
 8-74. $F = 620 \text{ N}$
 8-75. $M = 5.69 \text{ lb} \cdot \text{pulg.}$
 8-77. $P = 1.98 \text{ kN}$
 8-78. $M = 0.202 \text{ N} \cdot \text{m}$
 8-79. $M = 48.3 \text{ N} \cdot \text{m}$
 8-81. $F_D = F_E = 72.7 \text{ N}$
 8-82. $A_x = 328.6 \text{ N}$, $B_y = C_y = 164 \text{ N}$
 8-83. $F_{AB} = 1.38 \text{ kN (T)}$, $F_{BD} = 828 \text{ N (C)}$,
 $F_{BC} = 1.10 \text{ kN (C)}$, $F_{AC} = 828 \text{ N (C)}$,
 $F_{AD} = 1.10 \text{ kN (C)}$, $F_{CD} = 1.38 \text{ kN (T)}$
 8-85. $n = 2$ vueltas
 8-86. Aproximadamente 2 vueltas (695°)
 8-87. $W = 86.0 \text{ lb}$, $W = 13.9 \text{ lb}$
 8-89. **a)** $F = 4.60 \text{ kN}$, **b)** $F = 16.2 \text{ kN}$
 8-90. $n = 3$ medias vueltas, $N_m = 6.74 \text{ lb}$
 8-91. $P = 42.3 \text{ N}$
 8-93. $W_D = 12.7 \text{ lb}$
 8-94. $F_C = 13.7 \text{ lb}$, $F_B = 38.5 \text{ lb}$
 8-97. $M = 3.37 \text{ N} \cdot \text{m}$
 8-98. $P = 17.1 \text{ lb}$
 8-99. $P = 78.7 \text{ lb}$
 8-101. $h = 8.28 \text{ pies}$
 8-102. $M = 50.0 \text{ N} \cdot \text{m}$, $x = 286 \text{ mm}$
 8-103. $P = 223 \text{ N}$
 8-105. $m = 25.6 \text{ kg}$
 8-106. $m = 7.82 \text{ kg}$
 8-107. $M = 15.8 \text{ lb} \cdot \text{pie}$
 8-109. $F_{sp} = 1.62 \text{ kip}$

- 8-110. $M = 36.3 \text{ lb} \cdot \text{pie}$
 8-111. $F = 10.7 \text{ lb}$
 8-113. $M = 43.9 \text{ lb} \cdot \text{pie}$
 8-114. $M = \frac{1}{2} \mu PR$
 8-115. $M = 0.521 P \mu R$
 8-117. $M = 17.0 \text{ N} \cdot \text{m}$
 8-118. $\theta = 68.2^\circ$, $M = 0.0455 \text{ N} \cdot \text{m}$
 8-119. $\mu = 0.215$, $F = 6 \text{ lb}$
 8-121. $T = 289 \text{ lb}$, $N = 479 \text{ lb}$, $F = 101 \text{ lb}$
 8-122. $\mu_s = 0.0407$
 8-123. $F = 18.9 \text{ N}$
 8-125. $P = 13.8 \text{ lb}$
 8-126. $P = 29.0 \text{ lb}$
 8-127. $(r_f)_A = 0.2 \text{ pulg.}$, $(r_f)_B = 0.075 \text{ pulg.}$
 8-129. $P \approx 78.8 \text{ lb}$
 8-130. $P = 245 \text{ N}$
 8-133. $F = 90.9 \text{ lb}$
 8-134. $s = 0.750 \text{ m}$
 8-135. **a)** $W = 6.97 \text{ kN}$, **b)** $W = 15.3 \text{ kN}$
 8-137. La leva no puede soportar la escoba.
 8-138. $P = 60 \text{ lb}$ para dos cajas.
 $P' = 90 \text{ lb}$ para tres cajas.
 8-139. $M = 2.50 \text{ kip} \cdot \text{pie}$

Capítulo 9

- 9-1. $\bar{x} = 0.546 \text{ m}$, $O_x = 0$, $O_y = 7.06 \text{ N}$,
 $M_O = 3.85 \text{ N} \cdot \text{m}$
 9-2. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 1.82 \text{ pies}$
 9-3. $\bar{x} = 124 \text{ mm}$, $\bar{y} = 0$
 9-5. $\bar{x} = 0.531 \text{ pies}$, $O_x = 0$,
 $O_y = 0.574 \text{ lb}$, $M_O = 0.305 \text{ lb} \cdot \text{pie}$
 9-6. $\bar{y} = 0.183 \text{ pies}$
 9-7. $\bar{x} = \frac{3}{8}b$, $\bar{y} = \frac{3}{5}h$
 9-9. $\bar{x} = \frac{3}{4}b$, $\bar{y} = \frac{3}{10}h$
 9-10. $\bar{x} = \frac{5a}{8}$
 9-11. $\bar{x} = \frac{n+1}{2(n+2)}a$

$$9-13. \quad \bar{x} = 3.20 \text{ pies}, \bar{y} = 3.20 \text{ pies}, T_A = 384 \text{ lb}, \\ T_C = 384 \text{ lb}, T_B = 1.15 \text{ kip}$$

$$9-14. \quad \bar{x} = \frac{(n+1)}{2(n+2)}a, \bar{y} = \frac{n+1}{2(2n+1)}h$$

$$9-15. \quad \bar{x} = \frac{n+1}{2(n+2)}a, \bar{y} = \frac{n}{2n+1}h$$

$$9-17. \quad \bar{y} = \frac{4b}{3\pi}, \bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$$

$$9-18. \quad \bar{x} = \frac{\pi}{2}a, \bar{y} = \frac{\pi}{8}a$$

$$9-19. \quad \bar{y} = 2.80 \text{ m}, \bar{x} = 6.00 \text{ m}$$

$$9-21. \quad \bar{y} = 2.04 \text{ pies}$$

$$9-22. \quad \bar{x} = 1.26 \text{ m}, \bar{y} = 0.143 \text{ m}, N_B = 47.9 \text{ kN}, \\ A_x = 33.9 \text{ kN}, A_y = 73.9 \text{ kN}$$

$$9-23. \quad \bar{x} = 0.4 \text{ pies}$$

$$9-25. \quad \bar{x} = 0.45 \text{ m}$$

$$9-26. \quad \bar{y} = 0.45 \text{ m}$$

$$9-27. \quad \bar{x} = 1.08 \text{ pulg.}$$

$$9-29. \quad \bar{x} = 1.61 \text{ pulg.}$$

$$9-30. \quad \bar{y} = 1.33 \text{ pulg.}$$

$$9-31. \quad \bar{r} = 0.833 a$$

$$9-33. \quad \bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = \frac{4}{3} \text{ m}$$

$$9-34. \quad \bar{z} = \frac{3}{8}a$$

$$9-35. \quad \bar{z} = \frac{5}{6}h$$

$$9-37. \quad \bar{x} = 0.4a$$

$$9-38. \quad \bar{z} = 2.50 \text{ pies}$$

$$9-39. \quad \bar{y} = 2.67 \text{ m}$$

$$9-41. \quad \bar{z} = \frac{R^2 + 3r^2 + 2rR}{4(R^2 + r^2 + rR)}h$$

$$9-42. \quad m = \frac{\pi kr^4}{4}, \bar{z} = \frac{8}{15}r$$

$$9-43. \quad \bar{z} = \frac{c}{4}$$

$$9-45. \quad \bar{x} = 1.30 \text{ m}, \bar{y} = 2.30 \text{ m}$$

$$9-46. \quad \bar{x} = 34.4 \text{ mm}, \bar{y} = 85.8 \text{ mm}$$

$$9-47. \quad \bar{x} = 179 \text{ mm}$$

$$9-49. \quad \bar{x} = 0, \bar{y} = 5.14 \text{ pulg.}$$

$$9-50. \quad \bar{x} = 0, \bar{y} = 58.3 \text{ mm}$$

$$9-51. \quad \bar{x} = 1.60 \text{ pies}, \bar{y} = 7.04 \text{ pies}, A_x = 0, \\ A_y = 149 \text{ lb}, M_A = 502 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

$$9-53. \quad \bar{y} = 85.9 \text{ mm}$$

$$9-54. \quad \bar{x} = 2.22 \text{ m}, \bar{y} = 1.41 \text{ m}$$

$$9-55. \quad \bar{y} = 53.0 \text{ mm}$$

$$9-57. \quad \bar{y} = 154 \text{ mm}$$

$$9-58. \quad \bar{x} = 4.62 \text{ pulg.}, \bar{y} = 1.00 \text{ pulg.}$$

$$9-59. \quad \bar{x} = 3.00 \text{ pulg.}, \bar{y} = 2.00 \text{ pulg.}$$

$$9-61. \quad \bar{y} = 11.9 \text{ pulg.}$$

$$9-62. \quad \bar{x} = \frac{\frac{2}{3}r \text{ sen}^3 \alpha}{\alpha - \frac{\text{sen} 2\alpha}{2}}$$

$$9-63. \quad \bar{y} = 2.00 \text{ pulg.}$$

$$9-65. \quad \bar{x} = 77.2 \text{ mm}, \bar{y} = 31.7 \text{ mm}$$

$$9-66. \quad \bar{y} = 135 \text{ mm}$$

$$9-67. \quad \bar{y} = 10.2 \text{ pulg.}$$

$$9-69. \quad h = 323 \text{ mm}$$

$$9-70. \quad \bar{z} = 128 \text{ mm}$$

$$9-71. \quad \bar{x} = -1.14 \text{ pulg.}, \bar{y} = 1.71 \text{ pulg.}, \bar{z} = -0.857 \text{ pulg.}$$

$$9-73. \quad \bar{x} = 4.74 \text{ pulg.}, \bar{y} = 2.99 \text{ pulg.}$$

$$9-74. \quad \bar{x} = 2.81 \text{ pies}, \bar{y} = 1.73 \text{ pies}, N_B = 72.1 \text{ lb}, \\ N_A = 86.9 \text{ lb}$$

$$9-75. \quad \bar{x} = 19.0 \text{ pies}, \bar{y} = 11.0 \text{ pies}$$

$$9-77. \quad \bar{z} = 0.70 \text{ pies}$$

$$9-78. \quad h = 2.00 \text{ pies}$$

$$9-79. \quad \bar{z} = 101 \text{ mm}$$

$$9-81. \quad \bar{z} = 1.625 \text{ pulg.}$$

$$9-82. \quad \bar{z} = 58.1 \text{ mm}$$

$$9-83. \quad \bar{x} = 8.22 \text{ pulg.}$$

$$9-85. \quad A = 118 \text{ pulg.}^2$$

$$9-86. \quad A = 3.33 \text{ pies}^2, \bar{y} = 1.2 \text{ pies}, V = 25.1 \text{ pies}^3$$

$$9-87. \quad m = 138 \text{ kg}$$

$$9-89. \quad V = 3.49 \text{ m}^3$$

$$9-90. \quad V = 4.25(10^6) \text{ mm}^3$$

$$9-91. \quad R = 29.3 \text{ kip}$$

$$9-93. \quad V = 1.40(10^3) \text{ pulg.}^3$$

$$9-94. \quad W = 3.12(10^6) \text{ lb}$$

$$9-95. \quad A = 3.56(10^3) \text{ pies}^2$$

$$9-97. \quad W = 84.7 \text{ kip}$$

$$9-98. \quad \text{Número de galones} = 2.75$$

$$9-99. \quad V = 207 \text{ m}^3, A = 188 \text{ m}^2$$

$$9-101. \quad V = 28.7 \text{ pulg.}^3$$

$$9-102. \quad W = 0.377 \text{ lb}$$

$$9-103. \quad h = 106 \text{ mm}$$

- 9-105. $A = 119(10^3) \text{ mm}^2$
 9-106. $F = 1.41 \text{ MN}$, $h = 4 \text{ m}$
 9-107. $F_{R_A} = 157 \text{ kN}$, $F_{R_A} = 235 \text{ kN}$, $d = 4.22 \text{ m}$
 9-109. $d = 2.68 \text{ m}$
 9-110. $F_{AB} = 486 \text{ kip}$
 9-111. $F = 391 \text{ kN/m}$
 9-113. $F_{R_v} = 260 \text{ kip}$, $F_{R_h} = 487.5 \text{ kip}$
 9-114. $A_y = 2.51 \text{ MN}$, $B_x = 2.20 \text{ MN}$, $B_y = 859 \text{ kN}$
 9-115. $F_R = 17.2 \text{ kip}$, $d = 5.22 \text{ pies}$, $F_R = 18.8 \text{ kip}$
 9-117. $F_R = 40.0 \text{ kip}$, $\bar{x} = 8.00 \text{ pies}$
 9-118. $F_{R_v} = 196 \text{ lb}$, $F_{R_h} = 125 \text{ lb}$
 9-119. $F = 678 \text{ lb}$, $\bar{x} = 0.948 \text{ pies}$, $\bar{y} = 1.50 \text{ pies}$
 9-121. $F_R = 4.00 \text{ kip}$, $\bar{y} = -6.49 \text{ pies}$
 9-122. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 2.40 \text{ m}$, $F_R = 42.7 \text{ kN}$,
 $B_y = C_y = 12.8 \text{ kN}$, $A_y = 17.1 \text{ kN}$
 9-123. $F_R = 6.93 \text{ kN}$, $\bar{y} = -0.125 \text{ m}$
 9-125. $A = 1.25 \text{ m}^2$
 9-126. $\bar{y} = 87.5 \text{ mm}$
 9-127. $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = \frac{2}{3}a$
 9-129. $\theta = 37.8^\circ$
 9-130. $\bar{y} = 0.600 \text{ pulg.}$
 9-131. $\bar{x} = 1.22 \text{ pies}$, $\bar{y} = 0.778 \text{ pies}$, $\bar{z} = 0.778 \text{ pies}$,
 $M_{A_x} = 16.0 \text{ lb} \cdot \text{pie}$, $M_{A_y} = 57.1 \text{ lb} \cdot \text{pie}$,
 $M_{A_z} = 0$, $A_x = 0$, $A_y = 0$, $A_z = 20.6 \text{ lb}$
 9-133. $F_R = 24.0 \text{ kN}$, $\bar{x} = 2.00 \text{ m}$, $\bar{y} = 1.33 \text{ m}$
 9-134. $F_R = 7.62 \text{ kN}$, $\bar{x} = 2.74 \text{ m}$, $\bar{y} = 3.00 \text{ m}$

Capítulo 10

- 10-1. $I_x = 39.0 \text{ m}^4$
 10-2. $I_y = 8.53 \text{ m}^4$
 10-3. $I_x = 23.8 \text{ pies}^4$,
 10-5. $I_y = 1.07 \text{ pulg.}^4$
 10-6. $I_x = \frac{2}{15}bh^3$
 10-7. $I_x = 1.54 \text{ pulg.}^4$
 10-9. $I_x = \frac{2}{7}bh^3$
 10-10. $I_y = \frac{2}{15}hb^3$
 10-11. $I_x = 10.7 \text{ pulg.}^4$
 10-13. $I_y = 2.44 \text{ m}^4$
 10-14. $I_x = 0.571 \text{ pulg.}^4$
 10-15. $I_y = 1.07 \text{ pulg.}^4$
 10-17. $I_x = 0.176 \text{ m}^4$
 10-18. $I_x = 9.05 \text{ pulg.}^4$
 10-19. $I_y = 30.9 \text{ pulg.}^4$
 10-21. $I_y = 10.7 \text{ pulg.}^4$
 10-22. $I_x = 3.20 \text{ m}^4$
 10-23. $I_y = 0.628 \text{ m}^4$
 10-25. $A = 2.44 \text{ pulg.}^2$
 10-26. $A = 11.1(10^3) \text{ mm}^2$
 10-27. $I_x = 3.35(10^3) \text{ pulg.}^4$
 10-29. $\bar{I}_{x'} = 162(10^6) \text{ mm}^4$
 10-30. $\bar{y} = 2.00 \text{ pulg.}$, $\bar{I}_{x'} = 64.0 \text{ pulg.}^4$
 10-31. $\bar{x} = 3.00 \text{ pulg.}$, $\bar{I}_{y'} = 136 \text{ pulg.}^4$
 10-33. $I_{x'} = 49.5(10^6) \text{ mm}^4$
 10-34. $I_x = 1.21(10^3) \text{ pulg.}^4$, $I_y = 364.8 \text{ pulg.}^4$
 10-35. $I_{x'} = 95.9(10^6) \text{ mm}^4$
 10-37. $\bar{y} = 80.7 \text{ mm}$, $\bar{I}_{x'} = 67.6(10^6) \text{ mm}^4$
 10-38. $\bar{x} = 61.6 \text{ mm}$, $\bar{I}_{y'} = 41.2(10^6) \text{ mm}^4$
 10-39. $\bar{y} = 0.181 \text{ m}$, $I_{x'} = 4.23(10^{-3}) \text{ m}^4$
 10-41. $\bar{y} = 22.5 \text{ mm}$, $I_{x'} = 34.4(10^6) \text{ mm}^4$
 10-42. $I_y = 122(10^6) \text{ mm}^4$
 10-43. $I_x = 648 \text{ pulg.}^4$
 10-45. $\bar{y} = 2 \text{ pulg.}$, $\bar{I}_{x'} = 128 \text{ pulg.}^4$
 10-46. $I_x = I_y = 503 \text{ pulg.}^4$
 10-47. $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}a^3b \text{ sen}^3 \theta$
 10-49. $\bar{y} = 53.0 \text{ mm}$, $I_{x'} = 3.67(10^6) \text{ mm}^4$
 10-50. $I_{x'} = 30.2(10^6) \text{ mm}^4$
 10-51. $\bar{y} = 91.7 \text{ mm}$, $I_{x'} = 216(10^6) \text{ mm}^4$
 10-53. $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$, $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{36}hb(b^2 - ab + a^2)$
 10-54. $I_{xy} = 0$
 10-55. $I_{xy} = 0.667 \text{ pulg.}^4$
 10-57. $I_{xy} = \frac{1}{6}a^2b^2$
 10-58. $I_{xy} = 48 \text{ pulg.}^4$
 10-59. $I_{xy} = 2.00 \text{ pulg.}^4$
 10-61. $I_{xy} = \frac{3}{16}b^2h^2$

$$10-62. I_{xy} = \frac{a^4}{280}$$

$$10-63. I_{xy} = \frac{a^2 b^2}{4(n+1)}$$

$$10-65. I_{xy} = 0.511 \text{ m}^4$$

$$10-66. I_{xy} = \frac{1}{6} l^3 t \sin 2\theta$$

$$10-67. I_{xy} = -28.1(10^3) \text{ mm}^4$$

$$10-69. I_{xy} = 36.0 \text{ pulg.}^4$$

$$10-70. I_{xy} = \frac{a^2 c \sin^2 \theta}{12} (4a \cos \theta + 3c)$$

$$10-71. I_{xy} = 98.4(10^6) \text{ mm}^4$$

$$10-73. I_{xy} = 0.740 \text{ pulg.}^4$$

$$10-74. I_{uv} = 135(10^6) \text{ mm}^4$$

$$10-75. I_u = 114(10^6) \text{ mm}^4, I_v = 56.5(10^6) \text{ mm}^4$$

$$10-77. I_u = 15.75 \text{ pulg.}^4, I_v = 25.75 \text{ pulg.}^4$$

$$10-78. \theta = -22.5^\circ, I_{\text{máx}} = 250 \text{ pulg.}^4, I_{\text{mín}} = 20.4 \text{ pulg.}^4$$

$$10-79. I_u = 3.47(10^3) \text{ pulg.}^4, I_v = 3.47(10^3) \text{ pulg.}^4, \\ I_{uv} = 2.05(10^3) \text{ pulg.}^4$$

$$10-81. I_{\text{máx}} = 64.1 \text{ pulg.}^4, I_{\text{mín}} = 5.33 \text{ pulg.}^4$$

$$10-82. I_{\text{máx}} = 4.92(10^6) \text{ mm}^4, I_{\text{mín}} = 1.36(10^6) \text{ mm}^4$$

$$10-83. I_{\text{máx}} = 1.74(10^3) \text{ pulg.}^4, I_{\text{mín}} = 435 \text{ pulg.}^4$$

$$10-85. I_{\text{máx}} = 250 \text{ pulg.}^4, I_{\text{mín}} = 20.4 \text{ pulg.}^4$$

$$10-86. I_{\text{máx}} = 64.1 \text{ pulg.}^4, I_{\text{mín}} = 5.33 \text{ pulg.}^4$$

$$10-87. I_{\text{máx}} = 4.92(10^6) \text{ mm}^4, I_{\text{mín}} = 1.36(10^6) \text{ mm}^4$$

$$10-89. I_{\text{máx}} = 1.74(10^3) \text{ pulg.}^4, I_{\text{mín}} = 435 \text{ pulg.}^4$$

$$10-90. I_y = \frac{1}{3} ml^2$$

$$10-91. I_z = mR^2$$

$$10-93. I_x = \frac{2}{5} mr^2$$

$$10-94. k_x = 57.7 \text{ mm}$$

$$10-95. I_x = \frac{2}{5} mb^2$$

$$10-97. I_x = \frac{2}{5} mb^2$$

$$10-98. I_y = \frac{m}{6} (a^2 + h^2)$$

$$10-99. I_y = 2.25 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

$$10-101. I_z = 1.53 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$10-102. I_G = 118 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

$$10-103. I_O = 293 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

$$10-105. I = 2.17 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

$$10-106. I_z = 34.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$10-107. I_A = 1.58 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

$$10-109. I_x = 3.25 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$10-110. I_x = 7.20 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$10-111. \bar{y} = 203 \text{ mm}, I_G = 0.230 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$10-113. I_y = 0.0954d^4$$

$$10-114. I_y = 0.187d^4$$

$$10-115. I_x = \frac{93}{70} mb^2$$

$$10-117. I_u = 5.09(10^6) \text{ mm}^4, I_v = 5.09(10^6) \text{ mm}^4,$$

$$I_{uv} = 0$$

$$10-118. I_y = 2.13 \text{ pies}^4$$

$$10-119. I_x = 0.610 \text{ pies}^4$$

$$10-121. \text{ a) } I_x = \frac{bh^3}{12}, \text{ b) } \bar{I}_{x'} = \frac{bh^3}{36}$$

$$10-122. I_{xy} = 0.1875 \text{ m}^4$$

Capítulo 11

$$11-1. F_{AC} = 7.32 \text{ lb}$$

$$11-2. \theta = 0^\circ, \theta = 73.1^\circ$$

$$11-3. F = 24.5 \text{ N}$$

$$11-5. k = 1.05 \text{ kN/m}$$

$$11-6. F = 512 \text{ N}$$

$$11-7. F = \frac{500\sqrt{0.04\cos^2\theta + 0.6}}{(0.2\cos\theta + \sqrt{0.04\cos^2\theta + 0.6})\sin\theta}$$

$$11-9. \theta = 13.9^\circ, \theta = 90^\circ$$

$$11-10. \theta = 0^\circ, \theta = 36.9^\circ$$

$$11-11. M = 52.0 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

$$11-13. P = \frac{W}{2} \cot \theta$$

$$11-14. \theta = 16.6^\circ, \theta = 35.8^\circ$$

$$11-15. \theta = 15.5^\circ, \theta = 85.4^\circ$$

$$11-17. F = 4.62 \text{ kN}$$

$$11-18. k = 10.8 \text{ lb/pie}$$

$$11-19. F = 2P \cot \theta$$

$$11-21. M = 42.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$11-22. F = 259 \text{ lb}$$

$$11-23. \theta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{2L}\right)^{\frac{1}{3}}$$

626 • Respuestas a problemas seleccionados

11-25. $m = 100 \text{ kg}$

11-26. Inestable en $x = 0$

Estable en $x = 0.167 \text{ m}$

11-27. Inestable en $\theta = 34.6^\circ$,

Estable en $\theta = 145^\circ$,

11-29. $(0, 0)$, estable

11-30. $\theta = 0^\circ$, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{W}{2KL}\right)$,

neutro cuando $W = 2kL$

11-31. $k = 2.81 \text{ lb/pie}$

11-33. $\theta = 23.2^\circ$, inestable

11-34. $k = 100 \text{ lb/pie}$

11-37. $h = 0$

11-38. $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{4W}{Ka}\right)$, $\theta = 90^\circ$

11-39. $m = 5.29 \text{ kg}$

11-41. $d = 87.9 \text{ mm}$

11-42. $b < 2r$

11-43. $d = \frac{h}{3}$

11-46. $P = 5.28 \text{ lb}$

11-47. $\theta = 37.8^\circ$, estable

11-49. Estable en $\theta = 90^\circ$,

Inestable en $\theta = 9.47^\circ$

11-50. $\theta = 90^\circ$, $\theta = 30^\circ$

11-51. Inestable en $\theta = 90^\circ$,

Estable en $\theta = 30^\circ$,

ÍNDICE DE TEMAS

- a punto de deslizarse, 381
- agujero, 462
- álgebra escalar, 33
- análisis:
 - de fricción, tornillos, 406-408
 - escalar, momento de una fuerza con respecto a un eje, 138-139
 - estructural, 257-323
 - procedimiento general, 14
 - vectorial, momento de una fuerza con respecto a un eje, 139-141
- análisis de fricción:
 - tornillos, 406-408
 - movimiento del tornillo hacia abajo, 407-408
 - movimiento del tornillo hacia arriba, 407
 - tornillo autobloqueante, 408
- análisis escalar, momento de una fuerza con respecto a un eje específico, 138-139
- análisis estructural, 257-323
 - armaduras espaciales, 283-286
 - hipótesis de diseño, 283
 - procedimiento de análisis, 283
 - armaduras simples, 257-259
 - armadura, definición, 257
 - armaduras planas, 258
 - construcción, 259
 - hipótesis de diseño, 259
 - placa de nudo, 257
- bastidores y máquinas, 287-302
 - diagramas de cuerpo libre, 287
 - ecuaciones de equilibrio, 293
 - procedimiento de análisis, 294
- método de las secciones 273-282, 318, 325
 - armaduras espaciales, 283-284
 - determinación de cargas internas, 328
 - diagrama de cuerpo libre, 275-278
 - ecuaciones de equilibrio, 275-278
 - ejemplos, 276-278
 - problemas, 279-282
 - procedimiento de análisis, 275, 283
- método de los nudos, 260-265, 318
 - armaduras espaciales, 283-284
 - ejemplos, 262-265
 - procedimiento de análisis, 261, 283
- miembros de fuerza cero, 266-268
- análisis numérico y por computadora, 586-591
 - ecuaciones algebraicas lineales, 586-587
 - ejemplo, 587
 - método de la secante, 590-591
 - ejemplo, 591
 - Simpson, regla de, 588-589
 - ejemplo, 589
- análisis vectorial, momento de una fuerza con respecto a un eje específico, 139-141
- ancho constante, 485
- ángulo:
 - de fricción cinética, 382
 - de paso, 406
- área plana, 475
- área superficial, 475, 495
 - de revolución, 475
- área(s):
 - centroide, 440
 - momento de inercia, 499-500
 - radio de giro, 501-502
 - teorema de los ejes paralelos, 501
- áreas compuestas:
 - momentos de inercia, 510-517
 - ejemplos, 511-512
 - partes compuestas, 510-512
 - problemas, 513-517
 - procedimiento de análisis, 510
 - sumatoria, 510-512
 - teorema de los ejes paralelos, 510-512
- armaduras, 257
 - análisis de, 318
 - definición, 257
 - geometría, 273
 - espaciales, 283-286
 - definición, 283
 - ejemplos, 284
 - hipótesis de diseño, 283
 - método de las secciones, 283-284
 - método de los nudos, 283-284
 - problemas, 285-286
 - procedimiento de análisis, 283
 - simple, 283
 - miembros de fuerza cero, 266-268
 - para puentes, diseño de, 321
 - planas, 258
 - Pratt, 274
 - simples, 257-259
 - construcción, 259
 - definición, 257
 - hipótesis de diseño, 259
 - paca de nudo, 257
- Arquímedes, 4
- atracción gravitatoria, ley de Newton, 6
- bandas planas:
 - fuerzas de fricción sobre, 414-416
 - análisis por fricción, 414-415
 - ejemplo, 416
 - problemas, 417-421
- bandas V:
 - fuerzas de fricción sobre, 414-416
 - análisis por fricción, 414-416
- barra uniforme, fuerzas de fricción en una, 423
- bastidores, 287-302, 318
 - definición, 287
 - diagramas de cuerpo libre, 287, 294
 - ecuaciones de equilibrio, 293, 294
 - ejemplos, 288, 291
 - procedimiento de análisis, 294
 - y miembros multifuerza, reacciones en los nudos de:
 - diagrama de cuerpo libre, 294-302
 - ecuaciones de equilibrio, 294-302

- problemas, 303-317
- procedimiento de análisis, 294
- brazo de momento, 114
- cabeza de flecha, uso gráfico, 31
- cable continuo, 83
- cable(s), 83, 360-375
 - ejemplo, 370-371
 - flexible, 360-361, 376
 - inextensible, 361, 376
 - perfectamente flexible, 361
 - problemas, 372-375
 - sometidos a cargas concentradas, 361-363
 - ejemplos, 362-363
 - sometidos a cargas distribuidas, 364-367
 - ejemplos, 366-367
 - sometidos a su propio peso, 368-371
- cables flexibles. *Vea* Cables
- cables inextensibles, 361
- cables perfectamente flexibles, 361
- cálculos numéricos, 10-13, 14
 - cifras significativas, 11
 - ejemplos, 12-13
 - homogeneidad dimensional, 10, 14
 - redondeo de números, 11
- carga distribuida, 350-351
 - de fricción, 380
- carga simple distribuida, reducción de una, 180-188
 - ejemplos, 182-184
 - localización de la fuerza resultante, 181
 - magnitud de una fuerza resultante, 180
 - problemas, 185-188
- carga suspendida, diseño de una herramienta para posicionar una, 322
- carga torsional, 376
- cargas concentradas, cables sometidos a, 361-363
- cargas distribuidas, 189
 - cables sometidos a, 364-367
 - definición, 180, 182
 - intensidad, 180
 - magnitud de la fuerza resultante, 180
 - normales, 380
 - reducción de, 180-184
 - relación entre fuerza cortante, momento y, 350-360
 - superficiales, 198
 - ubicación de la fuerza resultante, 181
 - ejemplos, 353, 356
 - problemas, 357, 360
 - uniformes, 181
- cargas externas, 325
- cargas internas, 325, 328, 376
- cargas resultantes, 327
- carretilla elevadora, diseño de una, 321
- catenaria, curva, 371, 374
- cateto vertical, 35
- centro de gravedad, 199
 - cuerpos compuestos, 461-474
 - con densidad y/o peso específico constante, 462
 - definición, 461
 - ejemplos, 463-465
 - problemas, 466-474
 - procedimiento de análisis, 462
 - de un cuerpo, 439
 - definición, 437, 495
 - elemento diferencial, 442-452
 - fórmulas para localizar un, 441
 - integraciones, 442-452
 - para un sistema de partículas, 437-438
 - presión de un fluido, 484-494
 - centro de presión, 485
 - definición, 484
 - ejemplos, 488-490
 - placa curva de ancho constante, 486
 - placa plana de ancho constante, 485
 - placa plana de ancho variable, 487
 - problemas, 491-494
 - procedimiento de análisis, 442
 - resultante de una carga general distribuida, 483
 - tamaño y brazos de momento, 442-452
 - teoremas de Pappus y Guldinus, 475-477, 495
 - área superficial, 475
 - área superficial de revolución, 475
 - curva plana, 475
 - formas compuestas, 476
 - volumen, 476
 - volumen de revolución, 475
- centro de masa:
 - de un cuerpo, 439
 - definición, 438
 - para un sistema de partículas, 438-439
- centro de presión, 485
- centro geométrico, 199, 440
- centroide(s), 182, 189, 199, 328, 345, 518-519. *Vea también* centro de gravedad
 - área, 440
 - de un cuerpo, 440-441
 - área, 440
 - línea, 440-441
 - simetría, 441
 - de una superficie, 440
 - definición, 440, 495
 - del volumen, 440
 - elemento diferencial, 442-452
 - ejemplos, 443-452
 - fórmulas para localizar, 441
 - integraciones, 442-452
 - problemas, 453-461
 - procedimiento de análisis, 442
 - superficie, 440
 - tamaño y brazos de momento, 442-452
 - volumen, 440
- cifras significativas, 10-11
- círculo, 525
 - de fricción, 424-425
- coeficiente de fricción, 382
 - cinética, 382
 - estática, 381, 433
- componente, 427
 - de resistencia al rodamiento, 427
 - cola, de vector, 18, 77
 - de desplazamiento, traslación, 553
 - horizontal, 35
- componentes, 327
 - de fuerza cortante, 327
 - de reacción, 234
- compresión, 260-261, 273
 - miembros seccionados, 318

- conceptos fundamentales:
 - idealizaciones, 5
 - ley de la atracción gravitatoria de Newton, 6
 - peso, 6
 - tres leyes del movimiento de Newton, 5
- constante de resorte, 82
- construcción del triángulo, 18-19
- convención de signos, 33
 - fuerza cortante, 343
- conversión de unidades, 8
- coordenada independiente q , 555, 557
- coordenadas de posición, 582
- cosenos directores, 44-45
- Coulomb, C. A., 379
- criterio de la energía potencial por equilibrio, 570-571
- cuerdas. *Vea* Cables
- cuerpo:
 - centro de gravedad, 439
 - centro de masa, 439
 - centroide, 440-441
 - área, 440
 - línea, 440-441
 - simetría, 441
 - volumen, 440
 - cuerpos rígidos, 5, 14
 - principio del trabajo virtual, 554
 - equilibrio de cuerpo rígido, 193-255
 - condiciones, 193-195
 - ecuaciones de equilibrio, 209-217, 237
 - equilibrio en dos dimensiones, 195-208
 - miembros de dos fuerzas, 218-230
 - miembros de tres fuerzas, 218-230
 - restricciones de un cuerpo rígido, 238-240
 - mecánica del cuerpo deformable, 3
 - mecánica del cuerpo rígido, 3
 - dinámica, 3
 - estática, 3
 - traslación, 198, 201
 - uniforme, 199
 - volumen, 475, 495
- cuerpo libre, definición, 195
- cuerpo uniforme, 199
- cuerpos compuestos, 461-474
 - con densidad y/o peso específico constante, 462
 - definición, 461
 - ejemplos, 463-465
 - momento de inercia de masa, 540
 - problemas, 466-474
 - procedimiento de análisis, 462
 - brazos de momento, 462-465
 - partes compuestas, 462-465
 - sumatorias, 462-465
- cuerpos rígidos, 5, 14
 - principio del trabajo virtual para, 554
- cuerpos rígidos conectados, principio del trabajo virtual, 555-556
- cuñas, 404-405
 - autobloqueantes, 404
 - definición, 404
 - ejemplo, 405
- curva plana, 475
 - sistema con n grados de libertad, 571
 - sistema con un grado de libertad, 570-571
- chumaceras de collar, fuerzas de fricción en, 421-423
 - análisis por fricción, 422
 - definición, 421
- chumaceras de pivote, fuerzas de fricción en, 421-423
 - análisis por fricción, 422
- chumaceras simples:
 - ejemplo, 425
 - fuerzas de fricción en, 424-425
 - círculo de fricción, 424-425
- densidad, 439, 440
 - constante, 462
- derivadas, 584
- desarrollo en serie de potencias, 584
- deslizamiento, 383
- deslizamiento, a punto de ocurrir, 381
- desplazamiento:
 - componentes de, traslación, 553
 - diferencial, 568
 - vertical, 569
 - virtual, 557, 571
 - método, 556*np*
- diagrama de densidad de carga, 180
- diagrama de momento flexionante, 342
 - para una viga, procedimiento de análisis, 343
- diagramas de cuerpo libre, 82-83, 195-208, 210
 - bastidores, 287, 294
 - bastidores y máquinas, 287
 - cables y/o poleas, 83
 - equilibrio de un cuerpo rígido, 201
 - equilibrio de una partícula, 82-83
 - cables y/o poleas, 83
 - resortes, 82
 - equilibrio en dos dimensiones:
 - fuerzas externas, 199
 - fuerzas internas, 199
 - modelos idealizados, 199-200
 - peso y centro de gravedad, 199
 - equilibrio en tres dimensiones, 231-236
 - ejemplo, 235-236
 - procedimiento para establecer, 234-235
 - reacciones en los soportes, 231
- equilibrio tridimensional, 241-246
- fricción seca, 386-392
- fuerzas internas, 328-334
- inversión, 261
- máquinas, 287-294
- método de las secciones, 275-278
- procedimiento para trazar un, 83, 201
 - ejemplo, 84
- reacciones en los soportes, 197-198
- resortes, 82
- sistemas de fuerzas coplanares, 86-89
- sistemas de fuerzas tridimensionales, 99-103, 241
- trabajo virtual, 557-561
 - y cargas internas, 328
 - y problemas de equilibrio de fuerzas coplanares, 86, 210-217
 - y problemas de equilibrio que implican fricción seca, 386
 - y sistemas de fuerzas tridimensionales, 99
- diagramas de fuerza cortante, 342, 343, 376
- discontinuidades en, 351
 - ejemplos, 344-345

- métodos gráficos para establecer, 376
- problemas, 346-349
- en vigas, procedimiento de análisis, 343
- funciones de fuerza cortante y momento, 343-345
- pendiente en, 352
- procedimiento de análisis, 343
- reacciones en los soportes, 343-345
- diagramas de momentum, 343, 376
- discontinuidades en, 351
- ejemplos, 344-345
- funciones de fuerza cortante y momento, 343-345
- métodos gráficos para establecer, 376
- pendiente, 352
- problemas, 346-349
- procedimiento de análisis, 343
- reacciones en los soportes, 343-345
- dinámica, definición, 3
- dirección:
 - momentum de una fuerza (formulación escalar), 114, 189
 - momentos de par, 148
 - producto cruz, 118
 - vectores, 18
 - vectores cartesianos, 44-45
- dirección cenital, 55
- discontinuidades, en diagramas de fuerza cortante y de momentum, 351
- discos, fuerzas de fricción en, 421-423
 - análisis por fricción, 422
- dispositivo para izar un tubo de acero inoxidable, diseño de un, 435
- división de un vector, 18, 21
- dos dimensiones, 109
- ecuaciones algebraicas lineales, 586-587
 - ejemplo, 587
- ecuaciones de equilibrio, 85, 194, 195, 209-217
 - bastidores, 293, 294
 - conjuntos alternativos, 209-210
 - equilibrio de un cuerpo rígido, 194-195, 237
 - escalar, 237
 - vectorial, 237
 - equilibrio tridimensional, 241-246
 - fricción seca, 386-392
 - fuerzas interiores, 328-334
 - máquinas, 293, 294
 - método de las secciones, 275-278
 - problemas de equilibrio de fuerzas coplanares, 86
 - problemas de equilibrio que implican fricción seca, 386
 - procedimiento de análisis, 210
 - sistemas de fuerzas coplanares, 293, 294
 - sistemas de fuerzas tridimensionales, 99-103, 241 y cargas internas, 328
 - y sistemas de fuerzas tridimensionales, 99
- ecuaciones de fricción, contra ecuaciones de equilibrio, 386
- ecuaciones escalares de equilibrio, 85, 237
- ecuaciones vectoriales de equilibrio, 237
- ecuaciones y diagramas de fuerza cortante y de momento, 342-349
 - procedimiento de análisis, 343
- eje:
 - análisis escalar, 138-139
 - análisis vectorial, 139-141
 - de una llave, 169
 - específico, momentum de una fuerza con respecto a un, 138-143
 - momentum, 113-114, 140
- eje de momentum, 113-114, 140
- ejes principales, 522-523, 526-527
- elementos de disco, y momentos de inercia de masa, 536, 538
- embrague de disco, 428
- energía potencial, 569-570, 582
 - constante, 572
 - elástica, 570
 - función potencial, 570
 - gravitatoria, 569
- equilibrio, 109
 - como problema de fricción, 384
 - criterio de energía potencial, 570-571
 - ecuaciones de fricción contra, 386
 - estabilidad de, 573-574
 - determinación, 574-577
 - ejemplos, 575-577
 - función potencial, 574-577
 - posición de equilibrio, 574-577
 - problemas, 578-581
 - procedimiento de análisis, 574
 - sistemas con n grados de libertad, 573-574
 - sistemas con un grado de libertad, 572-573
 - tipos de equilibrio, 572
 - estable, 572, 582
 - inestable, 572, 582
 - neutro, 572, 582
- equilibrio de fuerzas, 218
 - coplanares, problemas:
 - procedimiento de análisis:
 - diagrama de cuerpo libre, 210-217
 - ecuaciones de equilibrio, 210-217
 - ejemplos, 211-217
 - resolución, 86
 - equilibrio de un cuerpo rígido, 193-255
 - condiciones, 193-195
 - ecuaciones de equilibrio, 194-195, 209-217, 237
 - conjuntos alternativos de, 209-210
 - equilibrio en dos dimensiones, 195-208
 - diagramas de cuerpo libre, 195-208
 - miembros de dos fuerzas, 218-230
 - miembros de tres fuerzas, 218-230
 - procedimiento para dibujar un diagrama de cuerpo libre, 201
 - ejemplos, 202-206
 - problemas, 207-208
 - restricciones para un cuerpo rígido, 238-240
 - restricciones impropias, 239-240
 - restricciones redundantes, 238
 - equilibrio de una partícula, 81-111
 - cables y poleas, 83
 - condición de, 81
 - diagrama de cuerpo libre, 82-83
 - notación escalar, 85-86
 - resortes, 82
 - sistemas de fuerzas coplanares, 85-86
 - sistemas tridimensionales de fuerza, 98-99
 - equilibrio estable, 572, 582
 - equilibrio inestable, 381, 572, 582
 - equilibrio neutro, 572, 582
 - equilibrio por momentos, 218
 - equilibrio rotatorio, 218
 - equilibrio traslacional, 218
 - equilibrio tridimensional, 231-236
 - diagrama de cuerpo libre, 241-246

- concurrente, 167, 189, 218, 260
- conservadora, 568-569
- de compresión, 258
- desbalanceada, 5
- eléctrica, 4
- en tensión, 318
- gravitatoria, 4
- magnética, 4
- miembros de fuerza cero, 266-268
 - ejemplos, 268
 - problemas, 269-272
- no conservadora, 569
- reducción de, 166-173
 - reducción a una llave, 169-173
 - simplificación a una sola fuerza resultante, 166-168
- y desplazamiento virtual, 556
- fuerzas activas, sobre una partícula, 83
- fuerzas conservadoras, 568-569
 - fricción, 569
 - peso, 568-569
 - resorte elástico, 569
- fuerzas coplanares, 33
- fuerzas coplanares paralelas, 180
- fuerzas de fricción, 380, 383
 - cinéticas, 382
 - estáticas límite, 381
 - estáticas máximas, 383
- fuerzas de fricción estática máximas, 383
- fuerzas eléctricas, 4
- fuerzas externas, 193-195, 287
- fuerzas gravitatorias, 4
- fuerzas internas, 193, 287, 291, 325-378, 554
 - cables, 360-375
 - sometidos a cargas concentradas, 361-363
 - sometidos a cargas distribuidas, 364-367
 - sometidos a su propio peso, 368-371
 - carga distribuida, 350-351
 - desarrolladas en miembros estructurales, 325-341
 - diagrama de cuerpo libre, 328-334
 - ecuaciones de equilibrio, 328-334
 - ecuaciones y diagramas de fuerza cortante y momento, 342-349
 - equilibrio en dos dimensiones, 199
 - ejemplos, 329-334
 - fuerza, 352
 - momento de par, 352
 - problemas, 335-341
 - procedimiento de análisis, 328
 - reacciones en los soportes, 328-334
 - relaciones entre carga distribuida/fuerza cortante/momento, 350-360
 - procedimiento de análisis, 343
- fuerzas magnéticas, 4
- fuerzas reactivas, 83
- función coseno hiperbólico, 374
- función de carga, 180
- funciones de fuerza cortante, 343
- funciones de momento, 343
- funciones hiperbólicas, 584
- Galileo Galilei, 4
- grados, 9
- grados de libertad, 555, 570
- Guldinus, Paul, 475. *Vea también* Teoremas de Pappus y Guldinus
- herramienta para hacer girar un tubo plástico, diseño de una, 435
- homogeneidad dimensional, 10, 14
- idealizaciones, 5
- identidades trigonométricas, 584
- ingeniería mecánica:
 - cálculos numéricos, 10-13
 - exactitud, 11
 - homogeneidad dimensional, 10-14
 - redondeo de números, 11
 - cifras significativas, 10-11
 - conceptos fundamentales, 4-6
 - cantidades básicas, 4
 - idealizaciones, 5
 - ley de la atracción gravitatoria de Newton, 6
 - peso, 6
 - tres leyes del movimiento de Newton, 5
 - unidades comunes en Estados Unidos (FPS), 7
 - unidades de medición, 6-8
 - conversión de unidades, 8
 - unidades SI, 7
- integración(es):
 - centro de gravedad, 442-452
 - centroide, 442-452
 - momentos de inercia para un área, 502
- integrales, 585
- intensidad de cargas distribuidas, 180
- kilogramos (kg), 7, 9
- kilonewton (kN), 8
- largueros, 258
- ley conmutativa, 68
- ley de la atracción gravitatoria de Newton, 6
- ley de Pascal, 484, 495
- ley del paralelogramo, 18-21, 77
- ley distributiva, 68
- libras (lb), 7
- longitud, 4, 6
- llave, 189
 - eje de una, 169
 - reducción a una, 169-173
- magnitud:
 - de momentos, 126, 160
 - de un momento de par, 148
 - de un producto cruz, 118
 - de un vector, 31, 37
 - de vectores cartesianos, 44, 47
 - del momento de una fuerza, 114
 - formulación escalar, 114, 126
 - formulación vectorial, 121
- magnitud desconocida, 234
- manipulaciones algebraicas de una ecuación, 10, 14
- máquinas, 287-302, 318
 - definición, 287
 - diagramas de cuerpo libre, 287, 294
 - ecuaciones de equilibrio, 293, 294
 - ejemplos, 289, 290, 292
- y miembros multifuerza, reacciones en los nudos de:
 - ecuaciones de equilibrio, 294-302
 - diagrama de cuerpo libre, 294-302

- problemas, 303-317
- procedimiento de análisis, 294
- masa, 4, 6, 14
- masa por volumen unitario, 439
- materia, movimiento de la, 438
- material homogéneo, 440
- mecánica, 3
 - cantidades físicas en, expresadas matemáticamente, 17
 - mecánica de fluidos, 3
 - mecánica del cuerpo deformable, 3
 - mecánica del cuerpo rígido, 3
 - dinámica, 3
 - estática, 3
 - meganewton (MN), 8
 - método de la secante, 590-591
 - ejemplo, 591
 - método de las secciones, 273-282, 318, 325
 - armaduras espaciales, 283-284
 - determinación de cargas internas, 328
 - ecuaciones de equilibrio, 275-278
 - diagrama de cuerpo libre, 275-278
 - ejemplos, 276-278
 - problemas, 279-282
 - procedimiento de análisis, 275, 283
 - método de los desplazamientos virtuales, 566np
 - método de los nudos, 260-265, 318
 - armaduras espaciales, 283-284
 - ejemplos, 262-265
 - procedimiento de análisis, 261, 283
 - metros (m), 7
 - metros por segundo ($m \cdot s$), 8
 - miembros de dos fuerzas, 218-230
 - ejemplos, 220
 - problemas, 221-230
 - miembros de fuerza cero, 266-268
 - ejemplos, 268
 - fuerza cortante cero, puntos de, 352
 - problemas, 269-272
 - miembros de tres fuerzas, 218-230
 - miembros estructurales, fuerzas internas desarrolladas en, 325-341
 - ejemplos, 220
 - problemas, 221-230
 - miembros multifuerza, 287, 327
 - miembros rectos de dos fuerzas, 327np
 - miembros seccionados:
 - en compresión, 318
 - en tensión, 318
 - milímetro (mm), 8
 - milisegundo (ms), 9
 - Mohr, círculo de, 525-528
 - ejemplo, 527
 - momento de inercia polar, 500
 - momentos de inercia principales, 523, 526-527
 - problemas, 528-534
 - procedimiento de análisis, 526
 - producto de inercia para un área, 518-521
 - definición, 518
 - ejemplos, 520-521
 - teorema de los ejes paralelos, 518-519
 - radio de giro para un área, 501-502
 - teorema de los ejes paralelos para un área, 501
 - Mohr, Otto, 525
 - momento con respecto a un eje específico, 189
 - momento de inercia de masa, 535-549
 - cuerpos compuestos, 540
 - definición, 535, 547
 - elemento cascarón, 536-537
 - elemento de disco, 536, 538
 - ejemplos, 541-542
 - problemas, 543-547
 - procedimiento de análisis, 536
 - radio de giro, 540
 - teorema de los ejes paralelos, 539
 - momento de inercia polar, 500
 - momento de torsión, 327
 - momento de un par, 148-159, 189
 - formulación escalar, 148
 - formulación vectorial, 148-149
 - magnitud, 148
 - momento de par resultante, 149
 - pares equivalentes, 149
 - ejemplos, 150-153
 - problemas, 154-159
 - resultantes de un sistema de fuerzas, formulación vectorial, 148-149
 - momento de una fuerza, 189
 - dirección del, 189
 - momento de una fuerza (formulación escalar), 113-117
 - brazo de momento, 114
 - dirección, 114
 - magnitud, 114
 - momento de una fuerza (formulación vectorial), 121-125
 - dirección, 121
 - ejemplos, 124-125
 - formulación vectorial cartesiana, 122-123
 - magnitud, 121
 - momento resultante de un sistema de fuerzas, 123
 - principio de transmisibilidad, 122
 - momento de una fuerza con respecto a un eje específico, 138-143
 - ejemplos, 142-143
 - análisis escalar, 138-139
 - análisis vectorial, 139-141
 - problemas, 144-147
 - momento flexionante, 327, 376
 - momento máximo, 139, 352
 - momento mínimo, 352
 - momento positivo, 342
 - momento torsionante, 327
 - momentos:
 - magnitud, 126-160
 - principio, 126
 - momentos de inercia, 499-549
 - definición, 499-500
 - momento de inercia de masa, 535-549
 - cuerpos compuestos, 540
 - definición, 535, 547
 - ejemplos, 541-542
 - elemento cascarón, 536-537
 - elemento de disco, 536, 538
 - problemas, 543-547
 - procedimiento de análisis, 536
 - radio de giro, 540
 - teorema de los ejes paralelos, 539
 - para áreas, 499-500
 - para áreas compuestas, 510-517

- para un área con respecto a ejes inclinados, 522-524
 - ejemplo, 524
 - momentos de inercia principales, 522-523
- para un área por integración, 502
 - ejemplos, 503-506
 - problemas, 507-509
 - procedimiento de análisis, 502
- partes componentes, 510-512
 - ejemplos, 511-512
 - problemas, 513-517
 - procedimiento de análisis, 510
 - sumatoria, 510-512
 - teorema de los ejes paralelos, 510-512
- momentos de inercia de área, 499-500, 547
- momentos de inercia principales, 523, 526-527, 547
- momentos de par, 148-159, 189, 201
 - dirección, 148
 - en el sentido de las manecillas del reloj, 352
 - formulación escalar, 148
 - formulación vectorial, 148-149
 - magnitud, 148
 - momento de par resultante, 149
 - pares equivalentes, 149
 - resultantes de un sistema de fuerzas, formulación vectorial, 148-149
 - y desplazamiento virtual, 556
- movimiento, 382
- movimiento del tornillo hacia abajo, 407-408
- movimiento del tornillo hacia arriba, 407
- movimiento imaginario, 553
- movimiento inminente, 415, 425
 - fricción:
 - en algunos puntos, 385
 - en todos los puntos, 384
 - fuerzas de fricción sobre bandas planas, 415
- movimiento real contra movimiento imaginario, 553
- movimiento relativo, 383
- movimiento virtual, 553
- multiplicación de un vector, 18, 21
- multiplicación por un escalar, 68

- Newton (N), 7
- Newton, Isaac, 4
- Newton, las tres leyes del movimiento de, 5, 14
- Newton, primera ley del movimiento de, 5, 81
- Newton, tercera ley del movimiento de, 5, 288, 332
- notación:
 - de ingeniería, 11
 - escalar, 33, 35, 36
 - vectorial cartesiana, 32-33, 35, 36
- nudos, 258
 - método de los, 260-265, 318
 - armaduras espaciales, 283-284
 - procedimiento de análisis, 261, 283

- Pappus de Alejandría. *Vea también* Teoremas de Pappus y Guldinus
- par:
 - definición, 148
 - trabajo, 553
- parábola, 367, 374
- pares equivalentes, 149
- partícula(s), 14
 - centro de gravedad, 437-438
 - centro de masa, 438-439
 - definición, 5
- equilibrio, 81-111
 - condición, 81
 - diagrama de cuerpo libre, 82-83
 - sistemas de fuerzas coplanares, 85-86
 - sistemas tridimensionales de fuerza, 98-99
- principio del trabajo virtual, 554
- fuerzas activas, 83
- paso de un tornillo, 406
- peso, 6, 14
 - específico, 440, 462
- pies, 7
- placa curva de ancho constante, 486
- placa de nudo, 40, 257
- placa plana de ancho constante, 485
- placa plana de ancho variable, 487
- poleas, 83
- prefijos, 8, 14
 - compuestos, 9
- presión de un fluido, 484-494, 495
 - centro de presión, 485
 - definición, 484
 - ejemplos, 488-490
 - placa curva de ancho constante, 486
 - placa plana de ancho constante, 485
 - placa plana de ancho variable, 487
 - problemas, 491-494
- principio de momentos, 126-137
 - ejemplos, 127-128
 - problemas, 129-137
- principio de transmisibilidad, 126, 160
- procedimiento general para el análisis, 14
- producto cruz, 118-120, 126
- producto de inercia para un área, 518-521, 547
 - definición, 518
 - teorema de los ejes paralelos, 518-519
- producto escalar. *Vea* Producto punto
- producto punto, 68-76, 77
 - aplicaciones, 69-70
 - definición, 68-70
 - ejemplos, 71-72
 - formulación vectorial cartesiana, 68-69
 - leyes de operación, 68
 - problemas, 73-76
- proyectos de diseño:
 - armadura para puente, 321
 - carga suspendida, diseño de un herramienta para posicionar una, 323
 - carretilla elevadora, 321
 - extractor de postes de cerca, 322
 - herramienta para hacer girar un tubo de plástico, 435
 - izador de tubos de acero inoxidable, dispositivo, 435
 - sistema de cuerdas y poleas para jalar una caja hacia arriba por un plano inclinado, 435
 - sistema de poleas, 322
- punta, de vectores, 18, 77

- radio de giro:
 - momento de inercia de masa, 540
 - para un área 501-502
- reacciones de fuerza, 231
- reacciones en los soportes, 325, 343
- y cargas internas, 328

- reacciones externas, 331
- redondeo de números, 11, 14
- reducción de un sistema de fuerza y par, 166-173, 189
 - reducción a una llave, 169-173
 - simplificación a una sola fuerza resultante, 166-168
- reducción de una carga simple distribuida, 180-184
 - localización de una fuerza resultante, 181
 - magnitud de una fuerza resultante, 180
- repaso para un examen de los fundamentos de ingeniería, 594-608
 - soluciones parciales y respuestas, 609-613
- resistencia al rodamiento, 426-427
 - coeficiente, 427
 - ejemplo, 427
 - problemas, 428-433
- resolución de problemas, 14
- resolución de un vector, 19
- resorte lineal elástico, 82, 109
- resorte elástico:
 - fuerza desarrollada, 569
 - lineal, 82, 109
- resortes, 82
 - diagramas de cuerpo libre, 82
- resta:
 - de vectores, 19
 - de vectores cartesianos, 46
- restricciones en un cuerpo rígido, 238-240
 - impropias, 239-240
 - redundantes, 238
- resultantes de fuerzas coplanares, 33-34
- resultantes de sistemas de fuerza, 113-191
 - carga simple distribuida, reducción de, 180-188
 - dirección, 121
 - eje de momento, 113-114
 - formulación vectorial cartesiana, 122-123
 - magnitud, 121
 - momento de un par, 148-159, 189
 - formulación escalar, 148
 - formulación vectorial, 148-149
 - magnitud, 148
 - momento de una fuerza, definición, 113, 189
 - momento de una fuerza, formulación escalar, 113-117
 - brazo de momento, 114
 - dirección, 114
 - magnitud, 114
 - momento resultante de un sistema de fuerzas coplanares, 115
 - momento de una fuerza, formulación vectorial, 121-125
 - momento de una fuerza con respecto a un eje específico, 138-143
 - análisis escalar, 138-139
 - análisis vectorial, 139-141
 - momento resultante de un sistema de fuerzas, 123
 - principio de momentos, 126
 - principio de transmisibilidad, 122
 - reducción de un sistema de una fuerza y un par, 166-173, 189
 - reducción a una llave, 169-173
 - simplificación a una sola fuerza resultante, 166-168
 - reducción de una carga simple distribuida, 180-184
 - producto cruz, 118-120
 - dirección, 118
 - formulación vectorial cartesiana, 119-120
 - leyes de operación, 119
 - magnitud, 118
 - resultantes de un sistema de una fuerza y un par, 162-165
 - sistema equivalente, 160-161
 - sistemas de fuerzas concurrentes, 167
 - sistemas de fuerzas coplanares, 167
 - sistemas de fuerzas paralelas, 167-168
 - y sistemas de par, 162-163
 - resultantes de un sistema de una fuerza y un par, 162-165
 - ejemplos, 164-165
 - procedimiento de análisis, 163
 - suma de fuerzas, 163-165
 - suma de momentos, 163-165
 - rigidez, 82
- secciones, método de las, 273-282, 318, 325
 - armaduras espaciales, 283-284
 - determinación de cargas internas, 328
 - diagrama de cuerpo libre, 275-278
 - problemas, 279-282
 - ecuaciones de equilibrio, 275-278
 - ejemplos, 276-278
 - procedimiento de análisis, 275-283
 - segunda ley del movimiento de Newton, 5, 81
 - segundo(s), 7
 - Simpson, regla de, 588-589
 - ejemplo, 589
 - sistema coordinado derecho, 42
 - sistema de cuerdas y poleas, diseño de un, 435
 - sistema de dos grados de libertad, 555
 - sistema de fuerzas coplanares, 31-37
 - suma, 31-37
 - ejemplos, 35-37
 - notación escalar, 31
 - notación vectorial cartesiana, 32
 - problemas, 38-42
 - resultantes de fuerzas coplanares, 33-34
 - sistema de fuerzas paralelas, 199
 - sistema de miembros conectados, 287
 - sistema de poleas, diseño de un, 322
 - sistema de un grado de libertad, 555
 - sistema de una fuerza y un par, reducción de un, 166-179, 189
 - ejemplos, 170-173
 - problemas, 174-179
 - reducción a una llave, 169-173
 - simplificación a una sola fuerza resultante, 166-168
 - sistemas de fuerzas concurrentes, 167
 - sistemas de fuerzas coplanares, 167
 - sistemas de fuerzas paralelas, 167-168
 - sistema equivalente, 160-161
 - sistema Internacional de Unidades (SI), 7, 8-9
 - prefijos, 8
 - reglas para su uso, 9
 - sistemas de fuerzas bidimensionales, 195
 - soportes para cuerpos rígidos sometidos a, 196-197
 - sistemas de fuerzas concurrentes, 167, 189, 218, 260
 - sistemas de fuerzas coplanares, 85-86, 167, 189, 195, 260, 328. *Vea también* Suma de un sistema de fuerzas coplanares
 - diagrama de cuerpo libre, 86-89
 - ecuaciones de equilibrio, 86-89
 - ejemplos, 87-89
 - notación escalar, 85-86
 - problemas, 90-97
 - procedimiento de análisis, 86
 - sistemas de fuerzas paralelas, 167-168, 189, 218, 483

- sistemas de fuerzas tridimensionales, 195
 - diagramas de cuerpo libre, 99-103, 241
 - ecuaciones de equilibrio, 99-103, 241
 - ejemplos, 100-103
 - problemas, 104-109
 - procedimiento de análisis, 99
 - resolución, 99
 - soportes para cuerpos rígidos sometidos a, 232-233
- slug, 7
- soporte fijo (empotramiento), 198
- suma:
 - algebraica, 19
 - de un sistema de fuerzas coplanares, 31-37
 - notación escalar, 31
 - notación vectorial cartesiana, 32
 - escalares, 19
 - vectores cartesianos, 46
 - vectores colineales, 18
 - vectorial, 18-19
- suma de fuerzas, 163, 168
- suma de momentos, 163, 168
- suma de un sistema de fuerzas coplanares, 31-37
 - notación vectorial cartesiana, 32
 - resultantes de fuerzas coplanares, 33-34
- suma escalar, 19
- suma vectorial de fuerzas, 20
 - ejemplos, 22-25
 - ley del paralelogramo, 21-24
 - problemas, 26-30
 - procedimiento de análisis, 21
 - trigonometría, 21-24
- superficie resbalosa de un tornillo, 407
- superficie rígida de contacto, 426
- superficies deformables, 380
- superficies no rígidas, 380
- tendencia a la rotación, 114
- tensión:
 - fuerzas en, 318
 - miembros seccionados en, 318
- teorema de los ejes paralelos:
 - áreas compuestas, 510-512
 - momento de inercia de masa, 539
 - producto de inercia para un área, 518-519
- teorema de los ejes paralelos para un área, 501
- teorema de Pitágoras, 34
- teorema de Varignon, 126
- teoremas de Pappus y Guldinus, 475-477, 495
 - área superficial, 475-476
 - área superficial de revolución, 475
 - curva plana, 475
 - ejemplos, 477
 - formas compuestas, 476
 - problemas, 478-482
 - volumen, 476
 - volumen de revolución, 475
- tetraedro, 283
- tiempo, 4
- torca, 113
- tornillo, 169
- tornillo autobloqueante, 408
 - movimiento de un tornillo hacia abajo, 408
- tornillos:
 - análisis por fricción, 406-408
 - movimiento de un tornillo hacia abajo, 407-408
 - movimiento de un tornillo hacia arriba, 407
 - de rosca cuadrada, 406
 - fuerza de fricción en, 406-408
 - ejemplo, 408
 - problemas, 409-413
 - paso de, 406
- trabajo virtual, 551-583
 - criterio de la energía potencial para el equilibrio, 570-571
 - definición, 553, 582
 - energía potencial, 569-570
 - estabilidad del equilibrio, 572-574
 - sistema con n grados de libertad, 573-574
 - sistema con un grado de libertad, 572-573
 - tipos de equilibrio, 572
 - fuerzas conservadoras, 568-569
 - principio del, 556, 582
 - para un cuerpo rígido, 554
 - para un sistema de cuerpos rígidos conectados, 555-556
 - para una partícula, 554
 - procedimiento de análisis, 557
 - ejemplos, 558-561
 - desplazamientos virtuales, 557-561
 - diagrama de cuerpo libre, 557-561
 - ecuación del trabajo virtual, 557-561
 - problemas, 562-567
 - trabajo de un par, 553
 - trabajo de una fuerza, 551-553
- transformación de ecuaciones, 522-523
- transmisibilidad, principio de, 126, 160
- traslación de un cuerpo, 198, 201
- tres dimensiones, 109, 123
 - momento de par, 150
- trigonometría, 21, 34
- triple producto escalar, 140
- unidades básicas, 6-7, 9
- unidades comunes en Estados Unidos, 7
- unidades de fuerza, 58
- unidades de medición, 6-8
 - conversión de unidades, 8
 - unidades SI, 7
- unidades derivadas, 9
- unidades SI, 7, 11
- valor máximo, 381
- vector flecha, cabeza de, 31
- vectores, 17-18, 21
 - cabeza, 18
 - cola, 18, 77
 - colineales, suma de, 18
 - deslizantes, 201
 - dirección, 18
 - libres, 201
 - magnitud, 18
 - operaciones, 18-20
 - multiplicación por un escalar, 18
 - suma vectorial, 18-19
 - producto punto, 68-76

- punta, 18, 77
- representación gráfica, 18
- resolución, 19
- resta, 19
- vectores cartesianos, 32, 35, 42-45, 77
 - suma, 46
 - ejemplos, 47-50
 - problemas, 51-54
- vectores colineales, suma de, 18, 21
- vectores de posición, 55-57, 58, 77
 - coordenadas x, y, z , 55
 - definición, 55
 - ejemplos, 57
- vectores deslizantes, 201
- vectores fuerza, 17-79
 - dirigidos a lo largo de una línea, 58
 - ejemplos, 59-61
 - problemas, 62-67
 - escalares, 17
 - producto punto, 68-76
 - definición, 68-70
 - sistemas de fuerzas coplanares, 31-37
- vectores, 17-18
- vectores cartesianos, 42-45
 - componentes rectangulares de un vector, 43
 - dirección de, 44-45, 47
 - magnitud de, 44, 47
 - representación, 44
 - resta, 46
 - sistema coordenado derecho, 42
 - sistemas de fuerzas concurrentes, 46
- suma, 46
- vector unitario, 43
- vectores de posición, 55-57, 58
 - definición, 55
 - coordenadas x, y, z , 55
 - dirección, 18
 - magnitud, 18
 - operaciones, 18-20
 - representación gráfica, 18
- vectores libres, 201
- vectores unitarios cartesianos, 32, 43
 - componentes rectangulares de un vector, 43
 - dirección, 44-45, 47
 - magnitud, 44, 47
 - representación, 44
 - resta, 46
 - ejemplos, 47-50
 - problemas, 51-54
 - sistema coordenado derecho, 42
 - sistemas de fuerzas concurrentes, 46
 - vector unitario, 43
- viga(s), 342
 - convención de signos, 342, 343
 - de piso, 258
 - en voladizo, 342
 - procedimiento de análisis, 343
 - resistencia a la fuerza cortante, 342
 - soportadas simplemente, 342
- volumen:
 - de revolución, 475
 - de un cuerpo, 475, 495

JUN

LITOGRAFÍA INGRAMEX, S.A.
CENTENO No. 162-1
COL. GRANJAS ESMERALDA
09810 MEXICO, D.F.

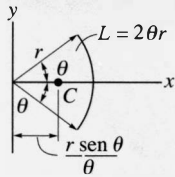
2005



Certificado No. 02-2082

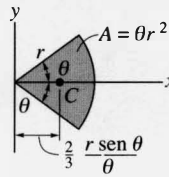
Propiedades geométricas de líneas y elementos de área

Ubicación del centroide



Segmento de arco circular

Ubicación del centroide

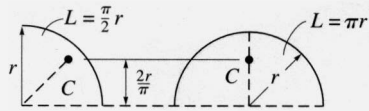


Área de sector circular

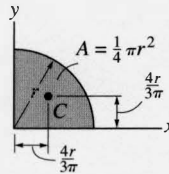
Momento de inercia del área

$$I_x = \frac{1}{4} r^4 (\theta - \frac{1}{2} \text{sen } 2\theta)$$

$$I_y = \frac{1}{4} r^4 (\theta + \frac{1}{2} \text{sen } 2\theta)$$



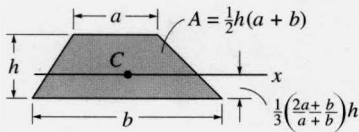
Arcos de un cuarto y de medio círculo



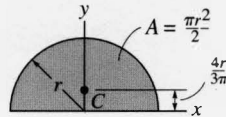
Área de un cuarto de círculo

$$I_x = \frac{1}{16} \pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$$



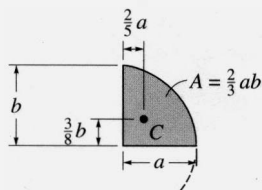
Área de un trapecio



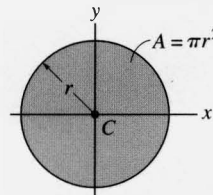
Área de un semicírculo

$$I_x = \frac{1}{8} \pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{8} \pi r^4$$



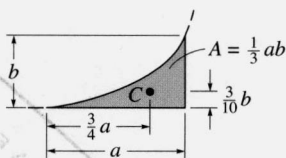
Área semiparabólica



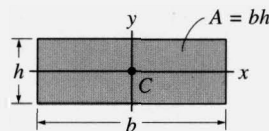
Área circular

$$I_x = \frac{1}{4} \pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{4} \pi r^4$$



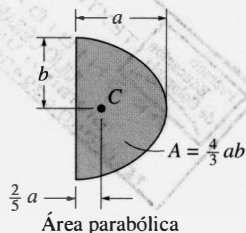
Área exparabólica



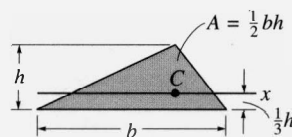
Área rectangular

$$I_x = \frac{1}{12} bh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} hb^3$$



Área parabólica



Área triangular

$$I_x = \frac{1}{36} bh^3$$

Centro de gravedad y momento de inercia de masa de cuerpos sólidos homogéneos

